

## 静電場の解釈に基づく代数方程式の反復解法†

櫻井鉄也<sup>††</sup> 鳥居達生<sup>††</sup> 杉浦洋<sup>††</sup>

多項式  $f(z)$  の根を求める反復解法を提示する。これは、静電場的なモデルによって得られる有理式により  $f'(z)/f(z)$  を近似する方法で、 $f(z)$  が多重根を持つ場合でも収束が遅くならず、大域的収束性もよい。修正量の計算では、 $f(z)$  の4階導関数までを必要とするが、2次方程式を解くだけで4次収束する。

### 1. ま え が き

M. Marden<sup>1)</sup> は多項式  $f(z)$  に対して  $e(z)=f'(z)/f(z)$  を考えることにより、代数方程式について静電場的な解釈を与えている。それによって O. Aberth<sup>2)</sup> は静電場的な取扱いによって連立型の解法を導出している。一方、Garside ら<sup>3)</sup> は  $e(z)$  を有理式

$$g(z) = \frac{b_0 + b_1 z + \dots + b_{n-2} z^{n-2}}{z - a}$$

によって近似する方法を示した。このような、ある有理式による近似によって零点を求める方法は、このほかに Nourein<sup>4)</sup>, Pomentale<sup>5)</sup> などがある。これらの方法は、いずれも局所的には高い次数の反復公式を構成できるが、次数を上げると用いる有理式の近似式としてのモデルの不適切さが目立つようになる。我々は静電場的な解釈から従来の方法のいくつかが導かれることを示し、さらにそれに基づいて新しい方法（電荷量推定型2電荷モデルによる方法）を提案する。これは  $e(z)$  を静電場的なモデルに基づいて得られる有理式

$$\tilde{e}(z) = \frac{\mu_1}{z - \alpha_1} + \frac{\mu_2}{z - \alpha_2}$$

によって局所的に近似する方法で、従来の方法と比べて近似式のモデルとして適切な形式を持つ。実験により、反復回数が少なく、問題による反復回数のばらつきも小さいことが確かめられた。

我々の方法は、修正量の計算では、 $f(z)$  の4階導関数までを必要とするが、2次方程式を解くだけで4次収束する。まず、代数方程式と静電場の対応を示す。力学で知られているように、電場  $\vec{E}$  と電位  $V$  の関係は  $\vec{E} = -\text{grad } V$  である。2次元の平面上で点  $(\xi, \eta)$

に電荷量1の正電荷を置いたときに点  $(x, y)$  で観測されるポテンシャルは  $\bar{z}=(x, y)$ ,  $\bar{\zeta}=(\xi, \eta)$  とおいて

$$u(\bar{z}) = -\log \frac{1}{\|\bar{z} - \bar{\zeta}\|} \\ = \log \{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2\}^{1/2}$$

と表せる。これより、ポテンシャルの微分は

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y - \eta}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}. \quad (1.2)$$

一方、 $\bar{z}=(x, y)$ ,  $\bar{\zeta}=(\xi, \eta)$ ,  $\vec{E} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$  をそれぞれ複素数  $z = x + iy$ ,  $\zeta = \xi + i\eta$ ,  $E = -\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$  とおきかえて、複素対数関数  $-\log(z - \zeta)^{-1}$  を  $z$  で微分すると

$$-\frac{d}{dz} \log \frac{1}{z - \zeta} = \frac{1}{z - \zeta} = \frac{1}{(x - \xi) + (y - \eta)i} \\ = \frac{(x - \xi) - (y - \eta)i}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \\ = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.3)$$

となり、式(1.3)の実部、虚部と式(1.1)、(1.2)を比べると

$$\vec{E} = -\frac{d}{dz} \log \frac{1}{z - \zeta} = \frac{1}{z - \zeta}.$$

これより、 $e(z) = \vec{E} = 1/(z - \zeta)$  は2次元実ベクトル空間を複素平面と同一視したときに点  $z$  で観測される電場の共役複素数とみることができる。この  $e(z)$  を共役電場と呼ぶことにする。 $n$ 次代数方程式  $f(z)=0$  の  $n$ 個の根を  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$  とし、点  $\zeta_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) に電荷量1の正電荷を置いたときに点  $z$  で観測される共役電場  $e(z)$  は

$$e(z) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{z - \zeta_i} = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

である。

† An Electrostatic Interpretation Iterative Method for Finding Roots of Polynomial by TETSUYA SAKURAI, TATSUO TORII and HIROSHI SUGIURA (Department of Information Engineering, Nagoya University).

†† 名古屋大学工学部情報工学科

2. 静電場の解釈

静電場的なモデルからいくつかの反復公式を導いてみよう。

2.1 1 電荷モデル (Newton 法)

点  $z$  で観測した共役電場  $e(z)$  が、点  $\alpha$  にある電荷量 1 の正電荷のみによってつくられていると仮定すると

$$\frac{1}{z-\alpha} = e(z).$$

電荷のある位置が根と対応しているので、 $\alpha$  を新しい近似根とする。これより、 $z$  からの修正量は  $d := z - \alpha = 1/e(z)$  となり、新しい近似根は

$$\alpha = z - \frac{1}{e(z)} = z - \frac{f(z)}{f'(z)}$$

で得られる。これは Newton 法にほかならない。

2.2 Newton 法の連立化 (Aberth 法)

連立させる近似根に対して電荷量 -1 の負電荷を対応させることにより、Aberth 法<sup>2)</sup>

$$\frac{1}{z_k - z_k'} = \frac{f'(z_k)}{f(z_k)} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{1}{z_k - z_i} \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

を得る。ここで  $z_k'$  は  $z_k$  を修正した値である。図 1.1 に  $f(z) = (z+1)(z^2-2z+2)$  のときのポテンシャルを示す。図 1.2 は 1 回反復した後のポテンシャルである。

2.3 2 電荷モデル (一松の方法)

点  $z$  で観測した共役電場  $e(z)$  が、点  $\alpha_1, \alpha_2$  にある電荷量 1 の正電荷によってつくられていると仮定すると

$$\frac{1}{z-\alpha_1} + \frac{1}{z-\alpha_2} = e(z) \tag{2.1}$$

$$\frac{1}{(z-\alpha_1)^2} + \frac{1}{(z-\alpha_2)^2} = -e'(z) \tag{2.2}$$

ここで

$$e'(z) = \left( \frac{f'(z)}{f(z)} \right)' = \frac{f''(z)}{f(z)} - \left( \frac{f'(z)}{f(z)} \right)^2.$$

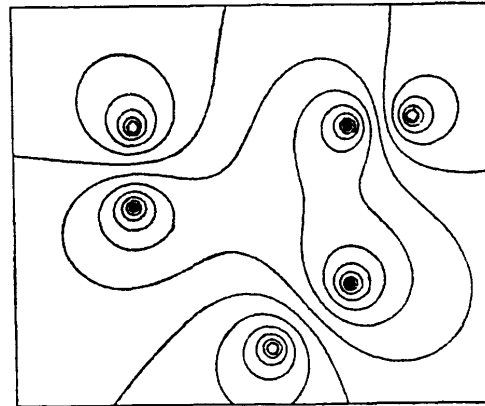
$z$  からの修正量を  $d_1 = z - \alpha_1, d_2 = z - \alpha_2$  とおくと式 (2.1), (2.2) より  $d_1, d_2$  の従う 2 次方程式

$$\{e^2(z) + e'(z)\} x^2 - 2 \cdot e(z) \cdot x + 2 = 0$$

を得る。 $e(z), e'(z)$  を  $f(z), f'(z), f''(z)$  で表すと 2 次の Taylor 展開法 (一松の方法)<sup>6)</sup> の式

$$\frac{f''(z)}{2} \cdot x^2 - f'(z) \cdot x + f(z) = 0$$

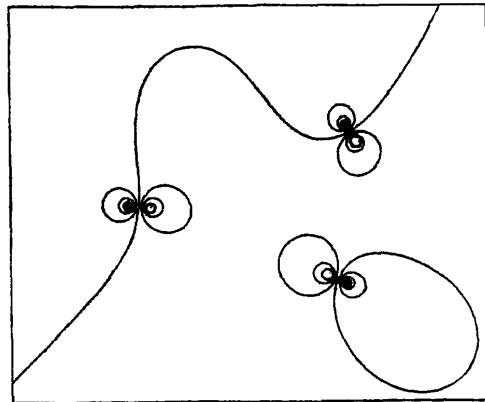
となる。これは 3 次収束で、修正量の計算のためには



●...root  
○...approximate root

図 1.1  $\log \frac{1}{|f(z)|} - \sum_{i=1}^n \log \frac{1}{|z-z_i|}$  の等高線図

Fig. 1.1 Contour map of  $\log \frac{1}{|f(z)|} - \sum_{i=1}^n \log \frac{1}{|z-z_i|}$ .



●...root  
○...approximate root

図 1.2 Aberth 法による 1 回反復後の等高線図

Fig. 1.2 Contour map after one iteration by Aberth's method.

この 2 次方程式を解く。鳥居、都田による 3 次 Taylor 展開に基づく方法<sup>7)</sup> は 3 電荷モデルから導かれる。これは 4 次収束で、修正量の計算は通常 3 次式に対する Newton 反復 2 回であり、例外的に 3 次方程式を解く。一般に、 $k$  次の Taylor 展開法が  $k$  個の単位電荷から成る静電場モデルから導かれることを示そう。いま、点  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  にある  $k$  個の単位電荷によって点  $z$  で観測される共役電場  $e(z)$  を近似すると考えると

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \frac{1}{z-\alpha_i} &\approx e(z) \\ &= \frac{f'(z)}{f(z)} \end{aligned} \tag{2.3}$$

ここで、 $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  を根とする  $k$  次の多項式を  $g(z)$  と

おくと式(2.3)の左辺は  $g'(z)/g(z)$  と表せる。このことより、 $k$  次の多項式  $g(z)$  によって  $n$  次の多項式  $f(z)$  を近似し、 $g(z)=0$  の根を  $f(z)=0$  の根の近似根としていることがわかる。特に、 $g(z)$  を  $f(z)$  の  $k$  次の Taylor 展開にとれば、この方法は  $k$  次の Taylor 展開法である。

### 3. 電荷量推定型 2 電荷モデル

#### 3.1 方法

先に示した 2 電荷モデルの発展として、電荷量を 1 ではなく未知パラメータとするモデルが考えられる。これは、点  $\alpha_1, \alpha_2$  にある電荷が単位電荷ではなく、それぞれ電荷量  $\mu_1, \mu_2$  とするモデルである。それは

$$\frac{\mu_1}{z-\alpha_1} + \frac{\mu_2}{z-\alpha_2} = e(z) \equiv c_1 \quad (3.1)$$

と表せる。点  $z$  での 3 階微係数までが一致するように  $\alpha_1, \alpha_2, \mu_1, \mu_2$  を決める。そのためには式(3.1)と以下の式を用いる。

$$\frac{\mu_1}{(z-\alpha_1)^2} + \frac{\mu_2}{(z-\alpha_2)^2} = -e'(z) \equiv c_2 \quad (3.2)$$

$$\frac{\mu_1}{(z-\alpha_1)^3} + \frac{\mu_2}{(z-\alpha_2)^3} = \frac{1}{2}e''(z) \equiv c_3 \quad (3.3)$$

$$\frac{\mu_1}{(z-\alpha_1)^4} + \frac{\mu_2}{(z-\alpha_2)^4} = -\frac{1}{6}e'''(z) \equiv c_4 \quad (3.4)$$

上の 4 つの式において、 $\mu_1, \mu_2$  を消去することにより、修正量  $z-\alpha_1, z-\alpha_2$  が従う 2 次方程式

$$(c_2c_4 - c_3^2)x^2 + (c_2c_3 - c_1c_4)x + (c_1c_3 - c_2^2) = 0 \quad (3.5)$$

を得る。この式は差分方程式の関係を使って導出できる。いま、

$$\rho_i = \frac{1}{z-\alpha_i} \quad (i=1, 2) \quad (3.6)$$

とおくと、式(3.1)~(3.4)は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \mu_1\rho_1 + \mu_2\rho_2 &= c_1 \\ \mu_1\rho_1^2 + \mu_2\rho_2^2 &= c_2 \\ \mu_1\rho_1^3 + \mu_2\rho_2^3 &= c_3 \\ \mu_1\rho_1^4 + \mu_2\rho_2^4 &= c_4. \end{aligned}$$

これらの式の左辺を一般化して  $\mu_1\rho_1^n + \mu_2\rho_2^n$  を考えると、これは定数係数の線形 2 階差分方程式

$$\begin{aligned} c_{n+1} + pc_n + qc_{n-1} &= 0 \\ (p &= -(\rho_1 + \rho_2), \quad q = \rho_1\rho_2) \end{aligned}$$

の一般解の形をしている。ここで、 $n=2, 3$  とおけば、 $p, q$  に関する方程式

$$c_3 + pc_2 + qc_1 = 0$$

$$c_4 + pc_3 + qc_2 = 0$$

を得る。これより  $p, q$  を求めると

$$p = \frac{c_3c_2 - c_4c_1}{c_3c_1 - c_2^2}, \quad (3.7)$$

$$q = \frac{c_4c_2 - c_3^2}{c_3c_1 - c_2^2}. \quad (3.8)$$

$\rho_1, \rho_2$  は特性方程式  $x^2 + px + q = 0$  の根であり、 $z$  に対する修正量が  $z-\alpha_1 = 1/\rho_1, z-\alpha_2 = 1/\rho_2$  であることを考慮すると式(3.5)を得る。これは、局所近似に基づいているので、得られた 2 つの近似根  $\alpha_1, \alpha_2$  のうち、 $z$  に近い方を新しい近似根として採用する。

#### 3.2 収束の次数

この方法が 4 次収束することを示そう。 $f(z)=0$  の 1 つの根を  $\alpha_i$ 、その多重度を  $\mu_i$  とする。共役電場  $e(z)$  を  $\alpha_i$  の項とそれ以外の項に分けて

$$e(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\mu_i}{z-\alpha_i} + h(z-\alpha_i) \quad (3.9)$$

と表す。これを用いて次の定理が証明される。

**定理**  $z_0$  は根  $\alpha_i$  に十分近いものとし、 $\alpha_i$  の近傍で  $h(z-\alpha_i) \neq 0$  とする。 $z_0$  の誤差を  $\varepsilon = z_0 - \alpha_i$ 、1 回反復後の近似根  $\alpha_1$  の誤差を  $\varepsilon' = \alpha_1 - \alpha_i$  とすると  $\varepsilon' = O(\varepsilon^4)$  である。

**証明** 式(3.9)より  $c_1 \sim c_4$  を求めると

$$c_1 = e(z_0) = \frac{\mu_i}{\varepsilon} + h(\varepsilon)$$

$$c_2 = -e'(z_0) = \frac{\mu_i}{\varepsilon^2} - h'(\varepsilon)$$

$$c_3 = \frac{1}{2}e''(z_0) = \frac{\mu_i}{\varepsilon^3} + \frac{1}{2}h''(\varepsilon)$$

$$c_4 = -\frac{1}{6}e'''(z_0) = \frac{\mu_i}{\varepsilon^4} - \frac{1}{6}h'''(\varepsilon)$$

となり、これらを式(3.7)、(3.8)に代入して

$$\begin{aligned} p &= \frac{c_3c_2 - c_4c_1}{c_3c_1 - c_2^2} = \frac{-\frac{h(\varepsilon)}{\varepsilon^4} + O\left(\frac{1}{\varepsilon^3}\right)}{\frac{h(\varepsilon)}{\varepsilon^3} + O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)} \\ &= -\frac{1}{\varepsilon} + O(1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q &= \frac{c_4c_2 - c_3^2}{c_3c_1 - c_2^2} = \frac{\frac{h'(\varepsilon)}{\varepsilon^4} + O\left(\frac{1}{\varepsilon^3}\right)}{\frac{h(\varepsilon)}{\varepsilon^3} + O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)} \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{h'(\varepsilon)}{h(\varepsilon)} + O(1) \end{aligned}$$

となる。これより修正量の逆数  $\rho$  を根とする 2 次方程式  $x^2 + px + q = 0$  を解いて

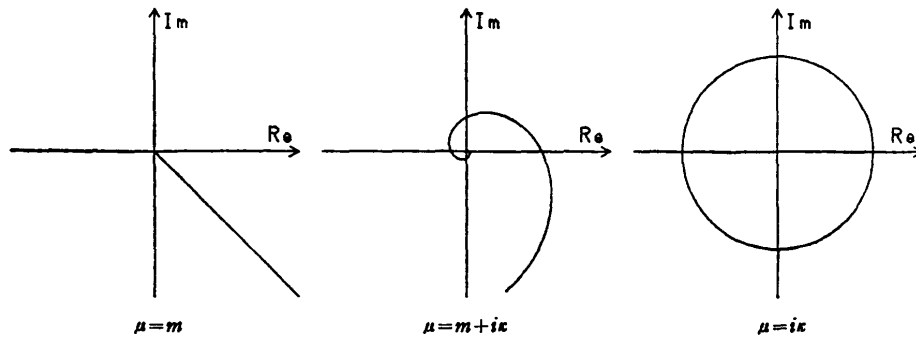


図2 電荷量  $\mu$  が複素数のときの力線のグラフ  
Fig. 2 Graph of flux for the complex charge  $\mu$ .

$$\rho = \frac{1}{\varepsilon} + O(1), O(1)$$

を得る。この逆数が修正量  $d$  であるが、絶対値の小さい方を採用すると

$$d = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon} + O(1)} = \varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

となる。次に  $F(z) = 1/e(z)$ ,  $G(z) = 1/\bar{e}(z)$  とおき  $G(z)$  によって  $F(z)$  を近似すると考える。  $F(z)$  と  $G(z)$  は  $z_0$  で3階微分まで一致するので、  $F(\alpha_1)$  と  $G(\alpha_1)$  を  $z_0$  を中心として Taylor 展開して両辺の差をとれば

$$F(\alpha_1) - G(\alpha_1) = \frac{1}{4!} (F^{(4)}(z_0) - G^{(4)}(z_0)) (z_0 - \alpha_1)^4 + \dots$$

$\alpha_1$  は  $G(z)$  の零点であり、  $d = z_0 - \alpha_1 = \varepsilon + O(\varepsilon^4)$  であるから

$$F(\alpha_1) = O(d^4) = O(\varepsilon^4) \tag{3.10}$$

である。一方、  $F(\alpha_1)$  を  $\alpha_1$  を中心として Taylor 展開すると

$$F(\alpha_1) = F(\alpha_1) + F'(\alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_1) + \dots$$

で、  $\alpha_1$  は  $F(z)$  の根であるから  $F(\alpha_1) = 0$ 、近似根  $\alpha_1$  の誤差は  $\varepsilon' = \alpha_1 - \alpha_1 = \varepsilon - d = O(\varepsilon^2)$  より

$$F(\alpha_1) = F'(\alpha_1)\varepsilon' + O(\varepsilon'^2) \tag{3.11}$$

$F(z)$  は単根しか持たないので  $F'(\alpha_1) \neq 0$  であるから式 (3.10), (3.11) より

$$\varepsilon' = O(\varepsilon^4)$$

を得る。

### 3.3 複素電荷量 $\mu$ の意味

$\alpha_1, \alpha_2$  を求めた上で式 (3.1), (3.2) に代入すると  $\mu_1, \mu_2$  が得られる。これらの式は一般には複素数でありこれにより求められる  $\mu_1, \mu_2$  もまた複素数となる。このとき、点  $z$  におけるポテンシャルは

$$u(z) = -\mu_1 \log(z - \alpha_1) - \mu_2 \log(z - \alpha_2) = -\log(z - \alpha_1)^{\mu_1} (z - \alpha_2)^{\mu_2}$$

と表せ、多項式  $f(z)$  を  $(z - \alpha_1)^{\mu_1} (z - \alpha_2)^{\mu_2}$  によって近似していることになる。もし、  $\alpha_1$  あるいは  $\alpha_2$  が  $f(z)$  の根に十分近いならば  $\mu_1$  あるいは  $\mu_2$  はその根の多重度に近いはずであり、正の整数になる。しかし、先に示したように反復の過程においては、  $\mu_1, \mu_2$  はたいてい複素数である。ここで、電荷量が複素数になることの意味を考えてみる。いま、原点に電荷量  $\mu$  の電荷があるとすると、その複素ポテンシャルは

$$u(z) = -\mu \log z$$

ここで、  $z = re^{i\theta}$ ,  $\mu = m + i\kappa$  とおくと

$$u(z) = -(m + i\kappa)(\log r + i\theta) = -(m \log r - \kappa\theta) - i(m\theta + \kappa \log r) \equiv \phi(r, \theta) + i\psi(r, \theta)$$

$\phi(r, \theta)$  はポテンシャルを表し、それに直交する  $\psi(r, \theta)$  が力線を表す。力線は  $\psi = C$  (定数) であることより

$$\theta = -\frac{C}{m} - \frac{\kappa}{m} \log r.$$

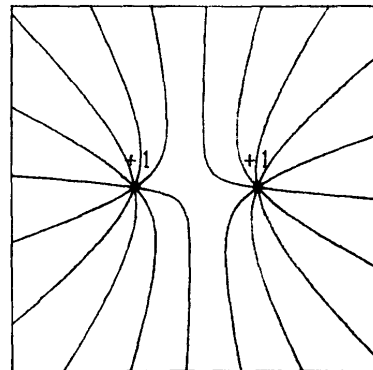


図3 2つの電荷の力線  
Fig. 3 Flux of two charges.

このグラフを図2に示す。これより電荷量 $\mu$ の虚部は、力線の曲がり方に対応していることがわかる。多項式 $f(z)$ に対応する静電場モデルでは、電荷はすべて正の整数の電荷量を持っているが、その力線が曲がる原因は図3のように近接した他の根の影響である。そこで、 $\mu$ の虚部が実部に比べて大きいかどうかで、近接根の有無を推定できる。

3.4 減次, 初期値, 収束判定

減次による誤差の蓄積を避けるため平野の方法<sup>9)</sup>を用いて減次する。初期値を適当にとって一根を求め減次することを繰り返すことによって、全根を求めるこ

とができる。このとき初期値をつねに一定にとると、減次の途中において根の分布に偏りが生じる。すなわち初期値の近傍において、根が疎らに分布することになる。例えば $f(z) = \prod_{k=-m}^m (z-k)$ において、初期値をつねに $z = -m-1$ にとれば、負の根だけが先に求まり、減次の過程で $\prod_{k=1}^m (z-k)$ が現れる。この方程式は、係数の誤差が根に敏感に影響する問題として知られている<sup>9)</sup>。このような状況を避けるため、原点を中心として根の幾何平均を半径とする円周上に等間隔に4点を取り、これらの点を順に初期値とし、原点のま

表1  $f(z) = (z-1)^2(z-2)(z^2+2z+5)$   
Table 1

-1.0000000000000000	-	2.0000000000000000i	( 3 )
-1.0000000000000000	+	2.0000000000000000i	( 3 )
0.9999999999999984	+	0.0000000000000011i	( 1 )
2.0000000000000000	+	0.0000000000000000i	( 0 )
1.0000000000000013	-	0.0000000000000012i	( 0 )

Inaccurate digits are underlined and the number of iterations is given in brackets after each root.

表2  $f(z) = \prod_{i=1}^{20} (z-i)$   
Table 2

2.00000000000009330	+	0.0000000000000000i	( 5 )
2.9999999998994014	+	0.0000000000000008i	( 5 )
0.9999999999999982	+	0.0000000000000000i	( 3 )
4.0000000025505593	-	0.00000000000000377i	( 5 )
6.0000000480188842	+	0.00000000581637284i	( 4 )
7.0000003868927945	-	0.00000007543279865i	( 4 )
4.9999999773530670	-	0.0000000018695453i	( 3 )
8.9999919241522430	-	0.0000267962365006i	( 7 )
10.0001007995120004	+	0.0000898820496822i	( 4 )
7.9999982014238884	+	0.0000055764209130i	( 4 )
12.0012422797573626	+	0.0003998991385081i	( 3 )
10.9995465245139177	-	0.0002190685587416i	( 4 )
14.0030398318830078	+	0.0005753652231842i	( 3 )
12.9976926710550551	-	0.0005491578763337i	( 4 )
14.9971502370823311	-	0.0004557147553364i	( 4 )
16.0018709788265738	+	0.0002670320703676i	( 4 )
16.9991690993678972	-	0.0001139074291434i	( 3 )
18.0002279957767719	+	0.0000329594795987i	( 3 )
20.0000012846799926	+	0.0000004787628634i	( 0 )
18.9999677573432919	-	0.0000058502552212i	( 0 )

わりで根の分布になるべく偏りが生じないようにする。近似根  $\alpha$  が

$$|f(\alpha)| \leq u \sum_{i=0}^n |a_i| |\alpha|^{n-i}$$

(ここで  $u$  は丸めの単位)

を満たしたときに収束したと判定する。

### 3.5 数値例

本方法を用いて、いくつかの問題を解いた結果を示す。一根  $\alpha$  を求めると  $f(z)/(z-\alpha)$  により一次減次する。これに対して同様な操作をくり返し、 $n=2$  となったところで2次方程式を直接解いて最後の2根を得る。計算機は FACOM M-780 を使用し、倍精度で行

表 3  $f(z)=(z^2+z+2)(z^2+z+3)$   
Table 3

-0.498796 - 1.324275i (3)	-0.501410 - 1.324068i (4)
-0.498202 + 1.323262i (3)	-0.500401 + 1.324680i (4)
-0.501328 - 1.659773i (3)	-0.498550 - 1.659651i (4)
-0.502046 + 1.658081i (3)	-0.499755 + 1.656258i (4)
-0.498611 - 1.321683i (4)	-0.501181 - 1.321476i (4)
-0.499605 + 1.321092i (4)	-0.501790 + 1.322467i (4)
-0.501471 - 1.656973i (4)	-0.497961 + 1.658564i (0)
-0.500237 + 1.660344i (4)	-0.498649 - 1.656852i (0)

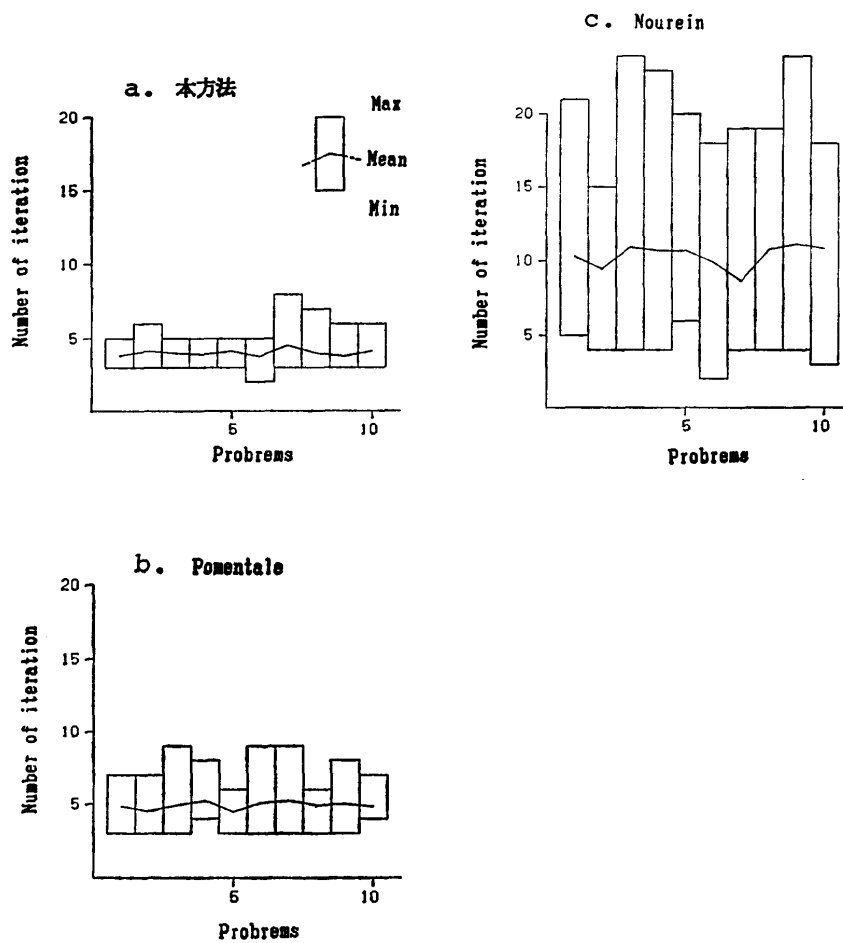


図 4 反復回数の比較  
Fig. 4 Comparison of the number of iteration.

った。真の根と異なる桁に下線をひいた。それぞれの根の後の括弧の中の値は反復回数を示している。

i) 二重根を一組もつ5次式

$$f(z) = z^5 - 2z^4 + 2z^3 - 12z^2 + 21z - 10$$

$$= (z-1)^2(z-2)(z^2+2z+5)$$

を解いた結果である。

ii) 根が実軸上に等差数列をなして分布する多項式

$$f(z) = \prod_{i=1}^n (z-i), \text{ ここで } n=20 \text{ とした.}$$

iii) 多重根を含む多項式

$$f(z) = z^{16} + 8z^{15} + 48z^{14} + 196z^{13} + 664z^{12} + 1800z^{11}$$

$$+ 4198z^{10} + 8208z^9 + 13992z^8 + 20228z^7$$

$$+ 25480z^6 + 26904z^5 + 24385z^4 + 17688z^3$$

$$+ 10584z^2 + 4320z + 1296$$

$$= (z^2+z+2)^4(z^2+z+3)^4$$

反復回数を他の方法と比較した結果を図4に示す。10個の多項式に対して、それぞれ、根ごとの反復回数の最大値と最小値、および平均の反復回数をグラフにしている。用いた方法は、

- a. 本方法 (電荷量推定型2電荷モデル)
- b. Pomentale の方法 ( $k=4$ )
- c. Nourein の方法 ( $p=3$ )

で、a, b は4次、c は5次の方法である。実験に用いた多項式は、次数  $n=15$  で、領域  $(0, 10) \times (0, 10)$  に乱数で根を配置している。根は、領域内に一様に分布しているが、分布にかたよりのあるものや、領域を変えた場合でもほぼ同様の結果を示した。乱数は、名古屋大学数学ライブラリーの中のサブルーチン RAN-

DOM を用いた。

これらの数値例より、本方法は反復回数が少なく、問題による反復回数のばらつきも小さいことがわかる。また、多重根に対しても反復回数がふえることはない。

### 3.6 収束の振舞い

円周等分多項式  $f(z) = z^n + 1$  について  $n=7$  のときの近似根の振舞いを図 5.1~5.3, 6 に示す。この多項式は、Newton 法を用いた場合、 $|z| \ll 1$  では修正量が非常に大きくなり、近似根の“飛び”の現象が起こり、 $|z| \gg 1$  では原点に  $n$  重根があるかのように振舞う。そのため、1点  $z$  での関数値およびその導関数から修正量を求める方法では、たいへん解きにくい問題である。しかしながら、本方法では、このような

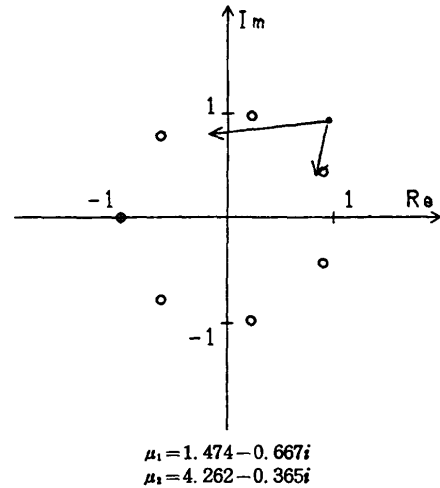


図 5.2 2回反復したときの近似根  
Fig. 5.2 Approximate roots at second iteration.

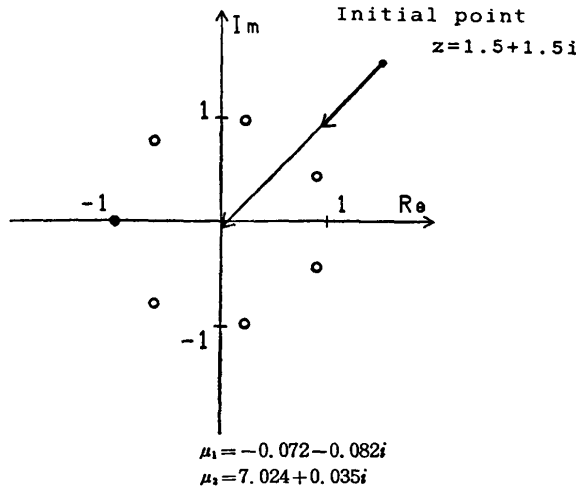


図 5.1 1回反復したときの近似根  
Fig. 5.1 Approximate roots at first iteration.

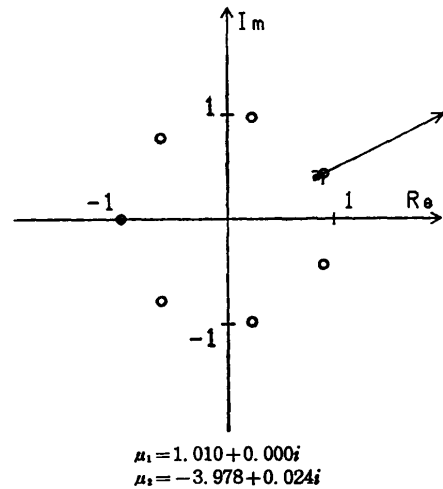


図 5.3 3回反復したときの近似根  
Fig. 5.3 Approximate roots at third iteration.

Newton 法固有の難点は生じない。図 5.1 は、初期値を  $1.5+1.5i$  として 1 回目の反復である。  $\alpha_2$  は重心に近く、その電荷量  $\mu_2$  は次数  $n$  にほぼ等しい。そのため、根の影響はほとんど打消され、  $\mu_1$  は小さな値となっている。図 5.2 は 2 回目の反復である。近似根が根に近づいたため、近くにある根が分離して見えはじめている。図 5.3 は 3 回目の反復である。  $\mu_1$  はほぼ 1 と推定している。その後 1 回の反復で収束した。図 6 は初期値を原点の近くに置いた場合の 4 回の反復を示している。この場合でも近似根の“飛び”は起こらない。

### 3.7 差分を使う方法

本方法を代数方程式に限らず一般の方程式に適用しようとする、高次の微分を用いることは大きな負担となる。そこで、高次の微分を用いるかわりに、4 点での  $e(x)$ 、または、2 点での  $e(x)$  と  $e'(x)$  を用いる方法を示す。これらの方法も、  $x$  に対する修正量  $d_1, d_2$  の計算では 2 次方程式を解けばよい。

#### 3.7.1 4 点での $e(x)$ を用いる方法

観測する 4 点を  $z_1, z_2, z_3, z_4$ 、新しい 2 つの近似根を  $\alpha_1, \alpha_2$  とする。式 (3.1) ~ (3.4) に対応して

$$\frac{\mu_1}{z_i - \alpha_1} + \frac{\mu_2}{z_i - \alpha_2} = e(z_i) \equiv c_i \quad (3.12)$$

$$(i=1, 2, 3, 4)$$

を得る。ここで、  $d_1 = z_4 - \alpha_1$ 、  $d_2 = z_4 - \alpha_2$ 、  $y_1 = z_1 - z_4$ 、  $y_2 = z_2 - z_4$ 、  $y_3 = z_3 - z_4$  とおくと、式 (3.12) は

$$\frac{\mu_1}{y_1 + d_1} + \frac{\mu_2}{y_1 + d_2} = c_1$$

$$\frac{\mu_1}{y_2 + d_1} + \frac{\mu_2}{y_2 + d_2} = c_2$$

$$\frac{\mu_1}{y_3 + d_1} + \frac{\mu_2}{y_3 + d_2} = c_3$$

$$\frac{\mu_1}{d_1} + \frac{\mu_2}{d_2} = c_4$$

REDUCE を用いて式を整理すると、修正量  $d_1, d_2$  の従う 2 次方程式を  $ax^2 + bx + c = 0$  とすれば

$$a = -(y_2 - y_1)(c_3 c_4 + c_1 c_2) y_3$$

$$+ (y_3 - y_1)(c_2 c_4 + c_1 c_3) y_2$$

$$- (y_3 - y_2)(c_2 c_3 + c_1 c_4) y_1$$

$$b = -y_3(y_2 - y_1) \{y_3 c_3 c_4 + (y_2 + y_1) c_1 c_2\}$$

$$+ y_2(y_3 - y_1) \{y_2 c_2 c_4 + (y_3 + y_1) c_1 c_3\}$$

$$- y_1(y_3 - y_2) \{y_1 c_1 c_4 + (y_3 + y_2) c_2 c_3\}$$

$$c = y_1 y_2 y_3 \{-(y_2 - y_1) c_1 c_2 + (y_3 - y_1) c_1 c_3$$

$$- (y_3 - y_2) c_2 c_3\}$$

となる。

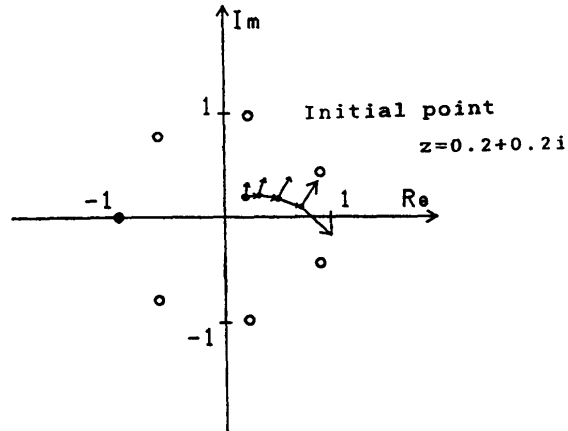


図 6 原点近くの初期値に対する近似根の振舞い  
Fig. 6 Behavior of approximate roots for an initial point near the origin.

#### 3.7.2 2 点での $e(x)$ 、 $e'(x)$ を用いる方法

観測する 2 点を  $z_1, z_2$  とすると式 (3.1) ~ (3.4) に対応して

$$\frac{\mu_1}{z_1 - \alpha_1} + \frac{\mu_2}{z_1 - \alpha_2} = e(z_1) \equiv c_1$$

$$\frac{\mu_1}{(z_1 - \alpha_1)^2} + \frac{\mu_2}{(z_1 - \alpha_2)^2} = -e'(z_1) \equiv c_2$$

$$\frac{\mu_1}{z_2 - \alpha_1} + \frac{\mu_2}{z_2 - \alpha_2} = e(z_2) \equiv c_3$$

$$\frac{\mu_1}{(z_2 - \alpha_1)^2} + \frac{\mu_2}{(z_2 - \alpha_2)^2} = -e'(z_2) \equiv c_4$$

を得る。ここで、  $d_1 = z_2 - \alpha_1$ 、  $d_2 = z_2 - \alpha_2$ 、  $y = z_1 - z_2$  とおくと、上式は

$$\frac{\mu_1}{y + d_1} + \frac{\mu_2}{y + d_2} = c_1$$

$$\frac{\mu_1}{(y + d_1)^2} + \frac{\mu_2}{(y + d_2)^2} = c_2$$

$$\frac{\mu_1}{d_1} + \frac{\mu_2}{d_2} = c_3$$

$$\frac{\mu_1}{d_1^2} + \frac{\mu_2}{d_2^2} = c_4$$

これより、修正量  $d_1, d_2$  の従う 2 次方程式を  $ax^2 + bx + c = 0$  とすれば

$$a = y^2 c_2 c_4 - (c_1 - c_3)^2$$

$$b = y \{y(c_2 c_4 - c_1 c_4 - c_2 c_3) - 2c_1(c_1 - c_3)\}$$

$$c = -y^2 \{y c_2 c_3 + c_1(c_1 - c_3)\}$$

である。

## 4. む す び

静電場的なモデルに基づいて、  $f'(x)/f(x)$  を有理式



により近似し, 方程式  $f(x)=0$  の根を求める反復解法を示した. 数値例より, 本方法は反復回数が非常に少なく, 大域的収束性も良いことが確かめられた. 本方法と, 代数方程式の連立型解法である Aberth 法<sup>2)</sup>, Durand-Kerner 法<sup>10), 11)</sup>と比較すると, 計算時間の点で本方法は格段に速い. 本方法は反復の度ごとに2次方程式を解かなければならないが, 根の重複度に関係なく4次収束する特長をもつ. さらに, 本方法は代数方程式だけでなく, 解析関数の零点や極を求めるために応用できる.

### 参 考 文 献

- 1) Marden, M.: *The Geometry of the Zeros of a Polynomial in a Complex Variables*, Amer. Math. Soc. (1949).
- 2) Aberth, O.: *Iteration Methods for Finding All Zeros of a Polynomial Simultaneously*, *Math. Comp.*, Vol. 27, pp. 339-344 (1973).
- 3) Garside, G.R., Jarrat, P. and Mack, C.: *A New Method for Solving Polynomial Equations*, *Comp. J.*, Vol. 11, pp. 87-89 (1968).
- 4) Nourein, A.M.: *Root Determination by Use of Pade Approximants*, *BIT*, Vol. 16, pp. 291-297 (1976).
- 5) Pomentale, T.: *A Class of Iterative Method for Holomorphic Functions*, *Numer. Math.*, Vol. 18, pp. 193-203 (1971).
- 6) Hitotumatu, S.: *A Method of Successive Approximation Based on the Expansion of Second Order*, *Mathematica Japonicae*, pp. 31-50 (1966).
- 7) 鳥居達生, 都田艶子: 3次テーラー展開に基づく複素係数代数方程式の解法, *情報処理*, Vol. 15, No. 8, pp. 644-645 (1974).
- 8) 平野菅保: 代数方程式の減次, *Computrol*, No. 12, pp. 92-95 (1985).
- 9) Wilkinson, J.H.: *The Evaluation of the Zeros of Ill-conditioned Polynomials, Parts I and II*, *Num. Math.*, Vol. 1, pp. 150-166 (1959).

10) Durand, E.: *Solutions Numeriques des Equations Algebriques, Tome I: Equations du Type  $F(x)=0$ ; Racine d'un Polynome*, Masson, Paris (1960).

11) Kerner, I. O.: *Ein Gesamtschrittverfahren zur Berechnung der Nullstellen von Polynomen*, *Numer. Math.*, Vol. 8, pp. 290-294 (1966).

(昭和61年9月16日受付)

(昭和63年3月9日採録)



櫻井 鉄也 (正会員)

昭和36年生. 昭和59年名古屋大学工学部応用物理学科卒業. 昭和61年同大学院工学研究科情報工学専攻博士課程前期課程修了. 同年同大学工学部情報工学科助手. 代数方程式の数値解法と有理関数による近似に興味を持つ.



鳥居 達生 (正会員)

昭和9年熊本県生. 昭和32年九州工業大学電気工学科卒業. 同年新日本窒素肥料(株)就職. 昭和39年同社退職. 同年大阪大学工学部助手(応用物理学科). 昭和50年名古屋大学工学部情報工学科講師, 助教授を経て昭和60年教授. 数値解析, 数学ソフトウェアの研究に従事. とくにFFTを基礎に関数近似, 数値積分について研究している.



杉浦 洋 (正会員)

昭和27年生. 昭和50年名古屋大学理学部数学科卒業. 昭和53年同大学院理学研究科数学専攻修士課程修了. 昭和56年同大学院工学研究科情報工学専攻博士課程満了. 昭和57年より同大学工学部助手. 数値積分と積分方程式に興味をもつ.