

## Padé 近似による代数方程式の反復解法†

櫻井 鉄也<sup>††</sup> 鳥居 達生<sup>††</sup> 杉浦 洋<sup>††</sup>

代数方程式  $f(z)=0$  の1つの根を求めるための、高次収束する反復公式の計算法を示す。 $f(z)/f'(z)$  に対する Padé 近似式の分子を、有理式を連分数に展開する Viscovatov の算法と Euclid の互除法を組み合わせることによって求め、この分子の零点を  $f(z)$  の近似根とすることで、高次収束する反復法を得る。この反復法は、重根に対しても収束次数が変わらない特徴を持つ。また、容易に収束次数の異なる反復公式が得られるため、要求精度に応じて反復法の収束次数を変えることが可能である。

## 1. はじめに

本論文では、高階導関数値を用いて、代数方程式の1つの根を求める反復法について述べる。代数方程式の解法としては Newton-Raphson 法がよく知られているが、初期値に対する依存性が強く、よい初期値を与える必要がある。我々は初期値依存性が弱く、反復回数も少ない方法を得るために、収束次数の高い方法について考える。

高次収束する反復法を得る方法として、Padé 近似を用いる方法がある。分子の次数が  $M$  次で、分母の次数が  $N$  次の有理式を  $r_{M,N}(z)=p(z)/q(z)$  とする。 $z_0$  における  $F(z)$  の Taylor 展開

$$F(z)=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\dots$$

に対して

$$F(z)q(z)-p(z)=O((z-z_0)^{M+N+1})$$

が成り立つとき、この有理式を  $z_0$  における  $F(z)$  の  $M+N$  次 Padé 近似式、あるいは  $[M/N]$ -Padé 近似式と呼ぶ。 $r_{M,N}(z)$  は  $M$  と  $N$  に関して2次元の表を作り、これを  $F(z)$  の Padé 表と呼ぶ。また、この要素を  $[M/N]$  と表す。表のすべての要素が異なるとき、Padé 表は正規であるという。

いま  $z_0$  を多項式  $f(z)$  の零点  $z_0$  の近似とし、 $r_{M,N}(z)$  を  $z_0$  における  $f(z)$  の  $M+N$  次 Padé 近似式とする。このとき次の近似解  $z_1$  を、 $p(z_1)=0$  となるようにとる。このようにして得られる反復法は、もし Padé 表が正規ならば、 $f(z)=0$  の単根に対して  $M+N+1$  次収束する<sup>1)-3)</sup>。

Nourein<sup>4),5)</sup> は分子の次数が1次の Padé 近似式

$[1/N]$ -Padé 近似式)を用いて、任意の収束次数の反復公式を得た。また  $N$  を適当にとることによって、Newton 法や Halley 法などの従来知られている公式のいくつかが得られることを示した。

Pomentale<sup>6)</sup> は Padé 近似とは別の立場から、任意の収束次数の反復公式を示したが、これは  $f(z)/f'(z)$  の  $[1/N]$ -Padé 近似から導ける。Pomentale の示した公式では  $(f'(z)/f(z))$  の高階導関数が必要なため、 $f(z)$  の零点付近ではオーバフローの危険性が高い。

高次の方法を得るためには、高次の Padé 近似を行う必要があるが、分子の零点を求めなければならないために、分子の次数  $M$  はそれほど大きくできない。そのため分母の次数  $N$  を大きくすることによって、近似次数  $M+N$  を大きくすることになる。このように、分子の次数に対して分母の次数の高い有理式を用いて近似するために、 $f(z)$  そのものを近似するよりも、 $f(z)/f'(z)$  を近似するほうが効果的である。

我々は次章で、 $f(z)/f'(z)$  の任意次数の Padé 近似式の分子を得る算法を示し、それを用いて3章で、代数方程式  $f(z)=0$  の1つの根を求める反復公式を示す。ここで分子の次数を1とすると、Pomentale の反復とみなせる。また同様の算法で、 $f(z)$  に対する Padé 近似式も得られ、このとき分子の次数を1とすると、Nourein の公式となる。

本方法は、重根に対しても収束次数が変わらない特徴を持つ。また任意の収束次数の反復公式が容易に得られるため、要求精度に応じて反復公式の次数を変えることが可能である。

2.  $f(z)/f'(z)$  に対する Padé 表

## 2.1 対角要素の計算

$f(z)/f'(z)$  の任意次数の Padé 近似式を求めるために、まず  $f(z)/f'(z)$  の連分数展開を求める。これは

† An Iterative Method for Algebraic Equation by Padé Approximant by TETSUYA SAKURAI, TATSUO TORII and HIROSHI SUGIURA (Department of Information Engineering, Faculty of Engineering, Nagoya University).

†† 名古屋大学工学部情報工学科

$f(z)/f'(z)$  の Padé 表の対角要素となる.

$n$  次の多項式  $f(z)$  の  $z_0$  における Taylor 展開を

$$f(z) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(z_0)}{i!} (z-z_0)^i = \sum_{i=0}^n a_i w^i$$

とする. ここで  $w = z - z_0$ . この展開を  $m$  次で打ち切った多項式を  $f_m(w)$  とすると

$$f(z) = f_m(w) + w^{m+1}(a_{m+1} + \dots + a_n w^{n-m-1})$$

と表せるので

$$f(z) = f_m(w) + O(w^{m+1}),$$

$$f'(z) = f'_m(w) + O(w^m)$$

である. また

$$\frac{f(z)}{f'(z)} = \frac{f_m(w)}{f'_m(w)} + O(w^m) \tag{2.1}$$

である. このことから, もし  $f_m(w)/f'_m(w)$  の  $m-1$  次 Padé 近似式を得たならば, それはまた,  $f(z)/f'(z)$  に対しても  $m-1$  次 Padé 近似式となることがわかる. 級数展開からそれに対応する連分数展開を得る算法は, 数多く提案されている<sup>7)-12)</sup>. そのなかで Viscovatov の算法<sup>10)-12)</sup>は, 2つの級数の比によって表された関数に対して直接用いることができるため, この算法を用いれば  $(f(z)/f'(z))$  の級数展開を計算する必要がない.  $f_m(w)/f'_m(w)$  に対する Viscovatov の算法は以下のようなものである.

$$h_0 = \frac{f_m(w)}{f'_m(w)} = \frac{a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + \dots + a_m w^m}{b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + \dots + b_{m-1} w^{m-1}}$$

とする. この右辺を次のように変形する.

$$h_0 = \frac{a_0}{b_0} + \frac{a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + \dots - a_0}{b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + \dots - b_0} = \frac{a_0}{b_0} + \frac{(a_0 + a_1 w + \dots) - \frac{a_0}{b_0}(b_0 + b_1 w + \dots)}{b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + \dots}$$

ここで  $c_0 = a_0/b_0$  とおくと上式は

$$h_0 = c_0 + \frac{w \{(a_1 - c_0 b_1) + (a_2 - c_0 b_2)w + \dots\}}{b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + \dots} = c_0 + \frac{w}{\frac{b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + \dots}{(a_1 - c_0 b_1) + (a_2 - c_0 b_2)w + \dots}} \tag{2.2}$$

式(2.2)を

$$h_0 = c_0 + \frac{w}{h_1}$$

とおく. つぎに  $h_1$  に対して同様の操作を行い

$$h_0 = c_0 + \frac{w}{c_1 + \frac{w}{h_2}}$$

を得る. この計算を繰り返すと,  $h_0$  の次のような連分

数展開を得る.

$$h_0 = c_0 + \frac{w}{c_1} + \frac{w}{c_2} + \frac{w}{c_3} + \dots$$

この展開を  $c_{m-1}$  で打ち切ると

$$\frac{f_m(w)}{f'_m(w)} = c_0 + \frac{w}{c_1} + \frac{w}{c_2} + \dots + \frac{w}{c_{m-1}} + O(w^m)$$

となる. この連分数は式(2.1)より,  $f(z)/f'(z)$  に対しても  $m-1$  次の Padé 近似式となる. この連分数展開の有理式表現  $P_{m-1}/Q_{m-1}$  は, 次のような漸化式によって求められる.

$$\begin{aligned} P_{-1} &= 1, P_0 = c_0, Q_{-1} = 0, Q_0 = 1, \\ \begin{cases} P_i = c_i P_{i-1} + w P_{i-2}, \\ Q_i = c_i Q_{i-1} + w Q_{i-2}, \end{cases} & i = 1, 2, \dots, m-1. \end{aligned} \tag{2.3}$$

分子  $P_{m-1}$  と分母  $Q_{m-1}$  の次数は

$$\deg(P_{m-1}) = \left[ \frac{m}{2} \right], \deg(Q_{m-1}) = \left[ \frac{m-1}{2} \right] \tag{2.4}$$

である. この算法によって, Padé 表中の図1のような位置の要素が求められる.

### 2.2 非対角要素

Viscovatov の算法で得られた要素から, Padé 表の要素間の関係を使って, それ以外の要素を求める. このために次の定理に示されるような, Padé 近似式どうしの関係を用いる.

**定理 1**  $p_1/q_1, p_2/q_2$  を  $F$  のそれぞれ  $m_1, m_2$  次の互いに異なる Padé 近似式とし,  $m_1 \geq m_2, \deg(p_1) \geq \deg(p_2)$  とする. また Padé 表は正規であるとする. 有理式  $p_{i+2}/q_{i+2}$  を

$$\begin{aligned} p_{i+2} &= p_i - \alpha_i p_{i+1}, \quad i \geq 1 \\ q_{i+2} &= q_i - \alpha_i q_{i+1}, \quad i \geq 1 \end{aligned} \tag{2.5}$$

とする. ここで  $\alpha_i$  は  $w$  についての多項式で

$$\deg(p_{i+2}) = \deg(p_{i+1}) - 1 \tag{2.6}$$

となるように選ぶ. もし

$$\max(\deg(p_2) + \deg(q_1), \deg(p_1) + \deg(q_2)) = m_2 + 1 \tag{2.7}$$

ならば,  $p_{i+2}/q_{i+2}$  は  $F$  の  $m_2$  次 Padé 近似式である.

Padé table

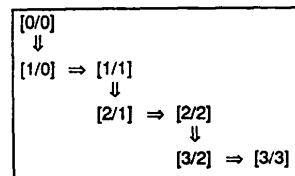


図1 Viscovatov の算法により得られる要素  
Fig. 1 Elements obtained by the Viscovatov's algorithm.

証明

$i$  に関する帰納法で証明する.  $i=1$  のとき,  $p_1/q_1$ ,  $p_2/p_2$  はそれぞれ  $m_1$ ,  $m_2$  次の Padé 近似式であるから

$$Fq_1 - p_1 = O(w^{m_1+1}),$$

$$Fq_2 - p_2 = O(w^{m_2+1})$$

が成り立つ. よって  $p_3/q_3$  は

$$Fq_3 - p_3 = F(q_1 - \alpha_1 q_2) - (p_1 - \alpha_1 p_2)$$

$$= (Fq_1 - p_1) - \alpha_1 (Fq_2 - p_2)$$

$$= O(w^{m_2+1}).$$

$i \geq 2$  のときは, 帰納法の仮定より

$$Fq_{i+2} - p_{i+2} = F(q_i - \alpha_i q_{i+1}) - (p_i - \alpha_i p_{i+1})$$

$$= (Fq_i - p_i) - \alpha_i (Fq_{i+1} - p_{i+1})$$

$$= O(w^{m_2+1}).$$

よって  $p_{i+2}/q_{i+2}$ ,  $i \geq 1$  は  $F$  の  $m_2$  次の有理近似である.

仮定から

$$\deg(p_{i+2}) = \deg(p_{i+1}) - 1 = \dots = \deg(p_2) - i$$

であり,  $\alpha_i$  の次数は

$$\deg(\alpha_1) = \deg(p_1) - \deg(p_2),$$

$$\deg(\alpha_i) = 1, \quad i \geq 2$$

である. よって

$$\deg(q_3) = \max(\deg(q_1), \deg(q_2) + \deg(\alpha_1))$$

$$= \max(\deg(q_1), \deg(q_2) + \deg(p_1) - \deg(p_2))$$

であり, また

$$\deg(q_{i+2}) = \deg(q_{i+1}) + 1 = \dots = \deg(q_3) + i - 1$$

$$= \max(\deg(q_1), \deg(q_2) + \deg(p_1) - \deg(p_2)) + i - 1$$

となる. ゆえに

$$\deg(p_{i+2}) + \deg(q_{i+2})$$

$$= \deg(p_2) - i + \max(\deg(q_1), \deg(q_2) + \deg(p_1) - \deg(p_2)) + i - 1$$

$$= \max(\deg(q_1) + \deg(p_2), \deg(q_2) + \deg(p_1)) - 1$$

$$= m_2.$$

よって  $p_{i+2}/q_{i+2}$  は  $F$  の  $m_2$  次 Padé 近似式であり, Padé 表が正規であることから, このような  $p_{i+2}/q_{i+2}$  は一意に定まる ■

式(2.5)と(2.6)をみると,  $p_{i+2}$  の計算には  $p_{i+1}$  と  $p_i$  のみが必要である. いま分子の零点が必要なのであるから, 分子だけを求めればよい. この計算は Euclid の互除法にはかならない. したがって, 条件(2.7)をみたく2つの Padé 近似式の分子の剰余列を求めていることになる.

**定理 2**  $p_1/q_1, p_2/q_2$  を, Viscovatov の算法で得られた  $F$  のそれぞれ  $m, m-1$  次 Padé 近似式とし, Padé 表は正規であるとする. このとき式(2.5), (2.6)で得られる  $p_{i+2}/q_{i+2}$ ,  $i \geq 1$  は,  $F$  の  $m-1$  次 Padé 近似式である.

証明

定理1において,  $m_1 = m, m_2 = m-1$  である. 式(2.4)より

$$\deg(p_1) + \deg(q_2) = \deg(P_m) + \deg(Q_{m-1})$$

$$= \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor,$$

$$\deg(p_2) + \deg(q_1) = \deg(P_{m-1}) + \deg(Q_m)$$

$$= \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor.$$

よって

$$\max(\deg(p_2) + \deg(q_1), \deg(p_1) + \deg(q_2)) = m = m_2 + 1$$

となり, 定理1の条件(2.7)を満たす. ■

このことから, Viscovatov の算法によって  $P_m$  までを求めると, 繰り返し式(2.5)を用いることができ, Padé 近似式の分子の次数を下げていくことが可能であることがわかる.

Viscovatov の算法によって  $P_m$  まで求めて式(2.5)を用いると,  $m_1 = m, m_2 = m-1$  となるので, 得られる近似式の次数は  $m-1$  となってしまう. しかし次のような関係を用いることで,  $m-1$  次の Padé 近似式を得るのに  $P_m$  を求める必要はないことがわかる.

**定理 3**  $P_m, P_{m-1}, P_{m-2}$  をそれぞれ Viscovatov の算法で得られる  $m, m-1, m-2$  次の Padé 近似式の分子とする. このとき,  $P_m$  を  $P_{m-1}$  で割った剰余と  $wP_{m-2}$  を  $P_{m-1}$  で割った剰余は等しい.

証明

3項漸化式(2.3)より

$$P_m = c_m P_{m-1} + w P_{m-2} \tag{2.8}$$

である. いま  $wP_{m-2}$  を  $P_{m-1}$  で割った商を  $Q$ , 剰余を  $R$  とすると

$$wP_{m-2} = QP_{m-1} + R \tag{2.9}$$

と表せる. 式(2.9)を式(2.8)に代入すると

$$P_m = (Q + c_m)P_{m-1} + R$$

となる. よって  $P_m$  を  $P_{m-1}$  で割った剰余もまた  $R$  である. ■

このことから Viscovatov の算法で  $P_m$  まで求めて,  $P_m$  と  $P_{m-1}$  について Euclid の互除法を行う代わりに,  $P_{m-1}$  まで求めて,  $wP_{m-2}$  と  $P_{m-1}$  について互

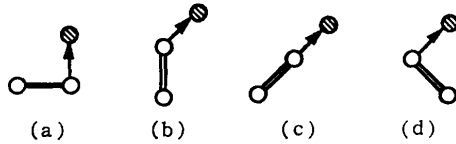


図 2 定理1の条件を満たす要素  
Fig. 2 Elements which satisfy the condition of the theorem 1.

除法を行えばよいことがわかる。

Padé 表の隣り合う要素どうしの関係を使って、非対角要素を求める算法はいくつか提案されており<sup>13)-21)</sup>、これらの算法間関係も調べられている<sup>16)-19)</sup>。図 2 (a), (b) の場合は Baker の算法<sup>20)</sup> と Gragg の算法<sup>16)</sup> に関係し、図 2 (c) の場合は Kronecker の算法<sup>21)</sup> と一致する。したがって式 (2.5), (2.6) を用いた算法は、これらの算法を含んでいることになる。

### 3. 任意次数の反復法

ここで、代数方程式  $f(z)=0$  の 1 つの根を求めるために、近似根  $z_0$  で  $f(z)$  の  $m$  次 Taylor 多項式を用いた反復公式を求めるアルゴリズムを示す。

- 1) 近似根  $z_0$  での  $f(z)$  の  $m$  次 Taylor 多項式を求める。
- 2) これより Viscovatov の算法によって  $c_0, \dots, c_{m-1}$  を求める。
- 3)  $c_0, \dots, c_{m-1}$  から 3 項漸化式 (2.3) によって  $P_{m-2}, P_{m-1}$  を求める。
- 4)  $wP_{m-2}$  を  $P_{m-1}$  で割った剰余列を、Euclid の互除法により求める。剰余多項式の次数が、2 または 1 となったところで互除法をやめる。このとき得られた剰余は、 $f(z)$  の  $[2/m-3]$  または  $[1/m-2]$ -Padé 近似式の分子となる。
- 5) 分子の零点  $d$  を求める。次数が 2 のときは、新しい近似根  $z'_0$  が近似根  $z_0$  に近くなるほうを選び  $d$  とする。新しい近似根を  $z'_0 = z_0 + d$  とする。

$[1/m-2]$ -Padé 近似式を用いたときには、Pomentale<sup>6)</sup> の公式とみなせる。とくに  $m=4$  のとき  $[2/m-3]$ -Padé 近似式は、静電場モデルによる方法<sup>22)</sup> と一致する。

ここで多項式  $f(z)$  が重根を持っているときの、本方法の近似根のふるまいについて考える。 $f(z)$  の相異なる根を  $\zeta_1, \dots, \zeta_k$  とし、

$$g_1(z) = \prod_{i=1}^k (z - \zeta_i)$$

とすると

$$f(z) = g_1(z)h(z),$$

$$f'(z) = g_2(z)h(z)$$

と表せる。このとき

$$\left(\frac{f(z)}{f'(z)}\right)^{(i)} = \left(\frac{g_1(z)h(z)}{g_2(z)h(z)}\right)^{(i)}$$

$$= \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \left(\frac{g_1(z)}{g_2(z)}\right)^{(j)} \left(\frac{h(z)}{h(z)}\right)^{(i-j)}$$

$$= \left(\frac{g_1(z)}{g_2(z)}\right)^{(i)}$$

であることから、 $f(z)/f'(z)$  と  $g_1(z)/g_2(z)$  は同じ Padé 近似式を持つ。 $g_1(z)$  は単根のみを持つ多項式であったから、結局本方法は、重根に対しても単根のときと同じふるまいをすることがわかる。

### 4. 数値例

本方法を用いたいくつかの数値例を示す。計算は FORTRAN 4 倍精度で行った。計算機は名古屋大学大型計算機センターの FACOM M-780 を使用した。

- 1)  $f(z)$  の Taylor 多項式の次数  $m$  と収束次数の関係。多項式は

$$f(z) = (z-1)^3(z-2)(z-3)(z-4)(z-5)$$

とし、初期値  $z_0$  が 1.01 と 2.01 の場合の、1 回反復後の近似根  $z'_0$  の誤差を示す (表 1)。

以下の数値例では、問題とする多項式は根を領域  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  に乱数で配置し、初期値は常に  $z_0 = 1+i$  とした。

- 2) 100 個の多項式に対して、1 つの根を求めるまでの平均的反復回数と Taylor 多項式の次数  $m$  の関係。ここで多項式の次数は  $n=50$  (図 3)。
- 3) 2) の場合の平均の計算時間と Taylor 多項式の次数の関係 (図 4)。
- 4)  $[1/m-2]$ -Padé 近似を用いて、 $f(z)$  と  $f(z)/f'(z)$  を近似したときの、多項式の次数  $n$  による平均

表 1 1 回反復後の近似根の誤差 ( $\epsilon = 1.0 \times 10^{-3}$ )  
Table 1 Errors of approximations after one iteration ( $\epsilon = 1.0 \times 10^{-3}$ ).

m	$z_0 = 1.01$	$z_0 = 2.01$
	$ z'_0 - 1.0 $	$ z'_0 - 2.0 $
4	$4.07 \times 10^{-9}$	$1.68 \times 10^{-9}$
5	$3.77 \times 10^{-11}$	$3.98 \times 10^{-10}$
6	$3.67 \times 10^{-13}$	$1.72 \times 10^{-12}$
7	$3.64 \times 10^{-15}$	$3.89 \times 10^{-14}$

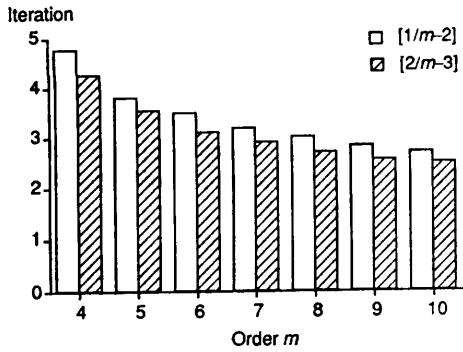


図 3 100 個の多項式に対する平均の反復回数  
Fig. 3 Mean number of iteration for 100 polynomials.

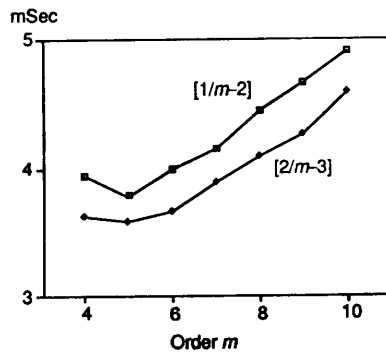


図 4 100 個の多項式に対する平均の計算時間  
Fig. 4 Mean solution time for 100 polynomials.

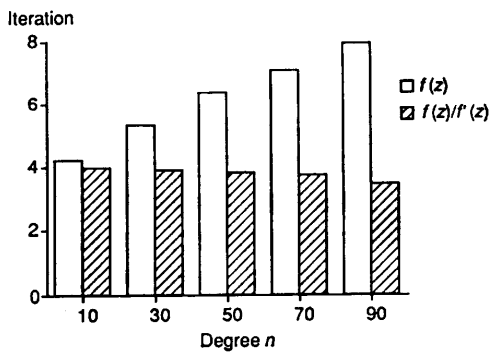


図 5  $f(z)$  と  $f(z)/f'(z)$  に対する  $[1/m-2]$ -Padé 近似式を用いたときの平均の反復回数  
Fig. 5 Mean number of iteration by  $[1/m-2]$ -Padé approximants for  $f(z)$  and  $f(z)/f'(z)$ .

の反復回数の変化.  $m=5$  とした (図 5).

これらの実験結果から,  $m$  次の Taylor 展開を用いると,  $m$  次収束していることがわかる. また  $m$  が大きいほうが反復回数が少なく, そのばらつきも小さくなる傾向がある.

$f(z)$  を近似したときと  $f(z)/f'(z)$  を近似したときを

比べると, 多項式の次数が高いときには,  $f(z)/f'(z)$  の Padé 近似式を用いたほうが反復回数はかなり減少する.

### 5. おわりに

代数方程式  $f(z)=0$  の解を求めるために, 有理式  $f(z)/f'(z)$  を連分数展開し, これより得られる Padé 近似式の分子に対して Euclid の互除法を適用することにより, 分子の次数の低い Padé 近似式の分子を得る算法を示した. この分子の零点を用いることによって, 任意の収束次数を持つ反復公式を得た.

数値実験から, 収束次数の高い方法は, 問題による反復回数のばらつきが小さく, 安定していることがわかった. また本方法は, 重根に対しても収束次数が落ちることはなく, 多項式の次数が高くても反復回数が増えることはない.

$m$  次収束する方法は,  $f(z)$  の  $m$  次 Taylor 多項式の係数を必要とするので,  $m$  を大きくするとそれだけ 1 回反復あたりの計算量が増える. FORTRAN の倍精度程度の要求精度であれば, 計算時間の点で  $m=4$  あるいは 5 ぐらいが実用的であると思われる. しかし, 多倍長演算等を用いて高い要求精度で計算する場合には, それに応じて  $m$  は大きくしたほうがよい. 本論文で示したアルゴリズムは, 収束次数を変えることが容易であるため, 要求精度に応じて次数を変えることが可能である.

Taylor 多項式の係数は Horner 法によって求められる. この計算は, 直前に求めた値を使うため逐次的にしか行えず,  $m$  が大きくなるとそれに比例して計算時間も大きくなる. しかし計算の順序を変えると, 並列に計算することが可能である. もし  $m+1$  個のプロセッサを持つ並列計算機を用いたならば, Taylor 多項式の係数を求める時間は  $m$  に無関係になり, 大きな  $m$  が計算時間と安定性の両面で有利になると考えられる.

本論文で示した有理式に対する Padé 近似式の算法は, 実係数代数方程式の, 共役な根を求めるための 2 次因子を求める算法や, 重根に対して高い収束次数を持つ全根同時反復公式に応用できる.

謝辞 本論文をまとめるにあたり, 多くのご助言をいただいた名古屋大学工学部三井助教授に感謝します.

## 参 考 文 献

- 1) Tornheim, L. : Convergence of Multipoint Iterative Methods, *J. Assoc. Comput. Mach.*, Vol. 11, pp. 210-220 (1964).
- 2) Merz, G. : Padéche Närungsbrühe und Iterationsverfahren Höerer Ordnung, *Computing*, Vol. 3, pp. 165-183 (1968).
- 3) Chisholm, J. : Approximation by Sequences of Padé Approximants in Region of Meromorphy, *J. Math. Phys.*, Vol. 7, No. 1, pp. 39-44 (1966).
- 4) Nourein, M. : Root Determination by Use of Padé Approximants, *BIT*, Vol. 16, pp. 291-297 (1976).
- 5) Claessens, G., Loizou, G. and Wuytack, L. : Comments on a Root finding Method Using Padé Approximation, *BIT*, Vol. 17, pp. 360-361 (1977).
- 6) Pomentale, T. : A Class of Iterative Method for Holomorphic Functions, *Numer. Math.*, Vol. 18, pp. 193-203 (1971).
- 7) Mills, W. H. : Continued Fractions and Linear Recurrences, *Math. Comp.*, Vol. 29, No. 129, pp. 173-180 (1975).
- 8) Murphy, J. A. : A Class of Algorithms for Obtaining Rational Approximants to Functions Which Are Defined by Power Series, *J. Appl. Math. Phys.*, Vol. 28, pp. 1121-1131 (1977).
- 9) Magnus, A. : Certain Continued Fractions Associated with the Padé Table, *Math. Zeitschr.*, Vol. 78, pp. 361-374 (1962).
- 10) Baker, G. and Graves-Morris, P. : *Padé Approximants I*, Addison-Wesley (1981).
- 11) Cuyt, A. and Wuytack, L. : *Nonlinear Methods in Numerical Analysis*, North-Holland (1987).
- 12) Bultheel, A. : Recursive Algorithms for the Padé Table: Two Approaches, pp. 211-230 in 24).
- 13) Householder, A. : The Padé Table, the Frobenius Identities, and the qd Algorithm, *Linear Algebra and Its Appl.*, Vol. 4, pp. 161-174 (1971).
- 14) Baker, G. : Recursive Calculation of Padé Approximants, pp. 83-91 in 23).
- 15) Pindor, M. : A Simplified Algorithm for Calculating the Padé Table Derived from Baker and Longman Schemes, *J. Comp. Appl. Math.*, Vol. 2, No. 4, pp. 255-257 (1976).
- 16) Gragg, W. G. : The Padé Table and Its Relation to Certain Algorithms of Numerical Analysis, *SIAM Rev.*, Vol. 14, No. 1, pp. 1-62 (1972).
- 17) Claessens, G. : A New Look at the Padé Table and the Different Methods for Computing Its Elements, *J. Comp. Appl. Math.*, Vol. 1, No. 3, pp. 141-152 (1975).
- 18) Brezinski, C. : Computation of Padé Approximants and Continued Fractions, *J. Comp. Appl. Math.*, Vol. 2, No. 2, pp. 113-123 (1976).
- 19) Graves-Morris, P. : The Numerical Calculation of Padé Approximants, pp. 231-235 in 24).
- 20) Baker, G. : *Essentials of Padé Approximants*, Academic Press (1975).
- 21) McElice, R. and Shearer, J. : A Property of Euclid's Algorithm and an Application to Padé Approximation, *SIAM J. Appl. Math.*, Vol. 34, No. 4, pp. 611-615 (1978).
- 22) 櫻井鉄也, 鳥居達生, 杉浦 洋 : 静電場の解釈による代数方程式の反復解法, 情報処理学会論文誌, Vol. 29, No. 5, pp. 447-455 (1988).
- 23) Graves-Morris, P. (ed.) : *Padé Approximants and Their Applications*, Proc. Univ. Kent (1972).
- 24) Wuytack, L. (ed.) : *Padé Approximation and Its Applications*, Proc. Antwerp (1979).

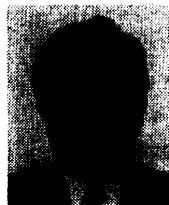
(平成元年9月1日受付)

(平成2年1月16日採録)



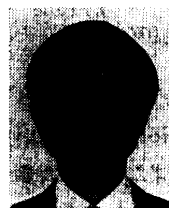
櫻井 鉄也 (正会員)

昭和36年生。昭和59年名古屋大学工学部応用物理学卒業。昭和61年同大学院工学研究科情報工学専攻博士課程前期課程修了。同年同大学工学部情報工学科助手。代数方程式の数値解法と有理関数による近似に興味を持つ。



鳥居 達生 (正会員)

昭和9年熊本県生。昭和32年九州工業大学電気工学科卒業。同年新日本窒素肥料(株)就職。昭和39年同社退職。同年大阪大学工学部助手(応用物理学科)。昭和50年名古屋大学工学部情報工学科講師, 助教授を経て昭和60年教授。数値解析, 数学ソフトウェアの研究に従事。とくにFFTを基礎に関数近似, 数値積分について研究している。



杉浦 洋 (正会員)

昭和27年生。昭和50年名古屋大学理学部数学科卒業。昭和53年同大学大学院理学研究科数学専攻修士課程修了。昭和56年同大学大学院工学研究科情報工学専攻博士課程満了。昭和57年より同大学工学部助手。数値積分と積分方程式に興味をもつ。