等角写像に関する Wegmann の方法の不安定性の解析とその安定化†

宋 殷 志†† 杉 浦 洋†† 櫻 井 鉄 也††

等角写像を求める Wegmann の方法は，我々の数値実験によって，収束の得られる問題の族はあまり広くないことがわかった．本稿では，その原因を理論的に解析して，収束性と問題領域の形状との関係を明らかにした．さらに，この解析に基づいて Wegmann の方法を低周波フィルタを用いて改良した新しい方法を提案する．数値実験を行った結果，Wegmann の方法では収束が遅い問題，または発散する問題においても，速い収束と良い精度を得た．

1. はじめに

数値等角写像では，標準領域（単位円）から問題領域 (Jordan 領域) への写像と逆方向の写像，すなわち，問題領域から標準領域への写像がある．いずれの場合も，写像の決定は境界関数に関する積分方程式に基づく方法に帰着される．現在，両者はそれぞれ独立した問題として研究されているが，標準領域から問題領域への場合の積分方程式は非線形であり，問題領域から標準領域への等角写像の場合には，積分方程式は線形である．前者の計算法としては Theodorsen の積分方程式に基づく方法[1),2)]が代表的である．後者に関しては，Symm の積分方程式が代表的であるが，最近，代用電荷法[3)]が新しい数値計算法として注目を集めている．ここでは，標準領域（単位円）の内部から問題領域 (Jordan 領域) への写像を求める問題を扱う．境界対応関数に関する非線形積分方程式である Theodorsen 方程式に関しては多くの数値解法が提案されているが今回は，Newton 法的反復法である Wegmann の方法を分析する．

この方法は反復計算を Riemann-Hilbert 問題に帰着させて，FFT を使って計算量と記憶容量を大幅に節約する方法であり収束が速い[2),4)]．しかし，実際この方法を計算機上に実現して数値実験を行うと，収束しない不安定現象が起こる．Wegmann の反復法を簡単に

$$\boldsymbol{s}_{m+1}=\boldsymbol{W}(\boldsymbol{s}_m),\quad \boldsymbol{s}\in\boldsymbol{R}^N,\quad m=0,1,\cdots$$

と書くとする．この反復法が収束しない原因はWの解 $\boldsymbol{s}^*$ におけるヤコビ行列 $W_{\boldsymbol{s}^*}$ のスペクトル半径が1以上であるためであることが数値実験により示された[5)]．その後，Wegmann の従来の方法は $W_{\boldsymbol{s}^*}$ のスペクトル半径が1以上であることが Wegmann 自身によって理論的に分析されて Wegmann は新たな反復法を提案した[6)]．しかし，修正された Wegmann の方法も収束する問題の族が広くないことが数値実験によりわかった．本稿では，Wegmann の分析に基づいて，$W_{\boldsymbol{s}^*}$ のスペクトル半径を分析し，低周波フィルタにより Wegmann の方法の安定化，および収束性の改善ができることを理論的に示す．最後に，我々の理論を数値実験により確認した結果を報告する．この方法は Wegmann の方法だけではなく他の方法（例：Hübner の方法[7)]）や外部問題にも適用可能である．

2. Wegmann の方法

2.1 問題設定

簡単のため，以下，次のような記号を使うことにする．

- $C(T)$ ：周期 2π の複素数値連続関数の族．
- $C_R(T)$ ：周期 2π の実連続関数の族．
- $C^2(T)$ ：2回微分可能な周期 2π の複素数値連続関数の族．
- $C_R^2(T)$ ：2回微分可能な周期 2π の実連続関数の族．
- $A(\bar{D})$ ：Dで解析的で，$\bar{D}$ で連続な複素関数の空間．
- $A(\bar{D})|_T$：$A(\bar{D})$ の要素 h の境界関数 $f(t)=h(e^{it})$, $f(t)\in C(T)$ の集合．

γを単位円，Dをその内部，Γ を Jordan 閉曲線，

† Analysis of Instability and Stabilization on Wegmann's Method for Conformal Mapping by ENJEE SONG, HIROSHI SUGIURA and TETSUYA SAKURAI (Department of Information Engineering, Faculty of Engineering, Nagoya University).

†† 名古屋大学工学部情報工学科

$\varDelta$ をその内部とする．$\varPhi$ は次の正規化条件，

$$\varPhi(0)=0,\quad \varPhi'(0)>0. \qquad (1)$$

を満たす D から $\varDelta$ への等角写像とする．等角写像に関して次の定理が成り立つ．

［定理 1］

$\varPhi$: D 上で等角写像$\Leftrightarrow\varPhi$: D 上で解析的で，$\varPhi'(\xi)\neq 0$，$(\xi\in D)$. ■

Jordan 閉曲線 Γ は，関数 $\eta\in C(T)$ によるパラメータ表現として，

$$\Gamma := \{\eta(s)\,|\,s\in[0, 2\pi)\},$$

のように与えられているとする．円周上のある点 e^{it} は $\varPhi$ により Γ 上の点 $\eta(s)$ に写像される．この s は t の関数である．また，定理 1 により $\varPhi$ は D 上で解析的であるから円周上で計算できれば，内部でも計算できる．したがって，

$$\varPhi(e^{it})=\eta(s(t)), \qquad (2)$$

を満たす関数 $s(t)$ を求めれば，問題は解ける．この $s(t)$ を求めるための Theodorsen 方程式を次に説明する．

2.2 Theodorsen 方程式

［定義 1］ $u(t)\in C_R(T)$ である関数が

$$u(t)=a_0/2+\sum_{l=1}^{\infty}(a_l\cos lt+b_l\sin lt)$$

のように Fourier 展開されているとき

$$Ku(t)=\sum_{l=1}^{\infty}(a_l\sin lt-b_l\cos lt)$$

で定義されるKを共役作用素という． ■

解 $s\ (=s(t))$ は次の条件を満たさなければならない．

i) $\eta(s)\in A(\bar{D})|_T$.

ii) （1）式の正規化条件：$[\mathrm{Im}\,\eta(s)]_0^\wedge=0$.

ここで，$[\mathrm{Im}\,\eta(s)]_0^\wedge$ は $\mathrm{Im}\,\eta(s)$ の 0 次 Fourier 係数である．まず，条件 i) については次の定理がある[2]．

［定理 2］

$$\eta(s)\in A(\bar{D})|_T\Leftrightarrow \mathrm{Im}\,\eta(s)-[\mathrm{Im}\,\eta(s)]_0^\wedge=K\,\mathrm{Re}\,\eta(s).$$

■

定理 2 の条件に ii)の条件を加えると，

$$\eta(s)\in A(\bar{D})|_T,$$

$$[\mathrm{Im}\,\eta(s)]_0^\wedge=0\Leftrightarrow \mathrm{Im}\,\eta(s)=K\,\mathrm{Re}\,\eta(s), \qquad (3)$$

が成立する．したがって，解 s の満たすべき条件は，

$$\varPsi(s) := \mathrm{Im}\,\eta(s)-K\,\mathrm{Re}\,\eta(s)=0, \qquad (4)$$

となる．（4）式が Theodorsen 方程式である．Theodorsen 方程式に関しては多くの数値解法が提案されているが特に Niethammer[8]，Hübner，および，

表 1 数値解法の比較 (FFT 利用)

Table 1 The comparison of the methods based on Theodorsen equation for computing conformal maps.

	1 回反復の計算量	収束	方　法
Niethammer	$N\log_2 N$	1 次	SOR 法
Hübner	$3N\log_2 N$	2 次	Newton 法
Wegmann	$2N\log_2 N$	2 次	Newton 法

N：標本点数．

Wegmann による 3 つの方法を簡単に比較したのが**表 1** である．この 3 つの方法を計算機上に実現して数値実験を行い，その有効性を比較すると，問題が難しく，かつ要求精度が高いときには Newton 法が有効である．同じ Newton 法の中でも Wegmann の方法は計算量が少ない点で優れているが不安定性が明らかになった[5]．それに対して，Wegmann は新たな反復法を提案した[6]．

2.3 修正された Wegmann の方法

前述した Theodorsen 方程式（4）を Newton 法で解く方法が Wegmann の方法である．Theodorsen 方程式に対する Newton 反復法を，

s_0：初期値

$$\varPsi(s_m)+\varPsi_{s_m}\delta_m=0, \qquad (5)$$

$$s_{m+1}=s_m+\delta_m,\quad m\geq 0,$$

のように書く．ここで，$\varPsi_{s_m}$ は $\varPsi$ の s_m での微分である．この方法では直接ヤコビ行列を作り，Newton 法を適用して（5）式を解く代わりに次のように Riemann-Hilbert 問題に帰着させて解く．これによって計算量と記憶容量を大幅に減らすことができる．（4）式から

$$\varPsi(s_m)=\mathrm{Im}\,\eta(s_m)-K\,\mathrm{Re}\,\eta(s_m),$$

$$\varPsi_{s_m}\delta_m=\mathrm{Im}\,\dot{\eta}(s_m)\delta_m-K\,\mathrm{Re}\,\dot{\eta}(s_m)\delta_m.$$

これらを（5）式に代入して整理すると

$$\mathrm{Im}\,(\eta(s_m)+\dot{\eta}(s_m)\delta_m)=K\,\mathrm{Re}\,(\eta(s_m)+\dot{\eta}(s_m)\delta_m), \qquad (6)$$

となる．ただし，$\dot{\eta}$ は η の s に関する微分である．関数 $\varPhi_{m+1}$ を

$$\varPhi_{m+1}(e^{it}) := \eta(s_m)+\dot{\eta}(s_m)\delta_m(t), \qquad (7)$$

と定義すると（6）式と定理 2 より円周上で $\varPhi_{m+1}(e^{it})\in A(\bar{D})|_T$ になる．$\delta_m(t)$ が実数値であることから（7）式を変形すると

$$\mathrm{Re}\,(i\overline{\dot{\eta}(s_m)}\varPhi_{m+1}(e^{it}))=-\mathrm{Im}\,(\overline{\dot{\eta}(s_m)}\eta(s_m)), \qquad (8)$$

となる．上式を $\varPhi_{m+1}(e^{it})\in A(\bar{D})|_T$ に関する Riemann-Hilbert 問題として解き，解を（7）式に代入し

て修正量

$$\delta_m(t)=\frac{\Phi_{m+1}(e^{it})-\eta(s_m)}{\dot{\eta}(s_m)}$$
$$=-\mathrm{Re}\frac{\eta(s_m)}{\dot{\eta}(s_m)}-\frac{\lambda_m+Kq_m}{|\dot{\eta}(s_m)|\exp(w_m(t))}, \qquad (9)$$

が得られる．

解 Φ_{m+1} は次のように陽的に求める[9]．

$$\Phi_{m+1}(e^{it})$$
$$=(iq_m(t)-\lambda_m-Kq_m(t))\exp(i\theta(s_m)-w_m(t)).$$

ここで，

$$\theta(s_m)\ :=\arg\dot{\eta}(s_m),$$
$$v_m(t)\ :=\theta(s_m)-t,$$
$$w_m(t):=Kv_m(t),$$
$$q_m(t)\ :=\mathrm{Im}(\eta(s_m)\exp(w_m(t)-i\theta(s_m))),$$
$$\lambda_m\ :=\hat{q}_m\cot\hat{v}_m,$$

$\hat{q}_m$：q_m の 0 次 Fourier 係数，

$\hat{v}_m$：v_m の 0 次 Fourier 係数．

次に離散化した問題を考えてみよう．後の都合のため標本点数を偶数 $N=2n$ とする．

$$t_k=2\pi k/N,\quad \boldsymbol{t}=(t_0,t_1,\cdots,t_{N-1})^{\mathrm{T}},$$

とおく．f を t_k 上で標本化して，

$$f_k:=f(t_k),\quad \boldsymbol{f}=(f_0,f_1,\cdots,f_{N-1})^{\mathrm{T}}.$$

一般に，あるスカラ関数 $\sigma(y)$ とベクトル $\boldsymbol{y}=(y_0,\cdots,y_{N-1})^{\mathrm{T}}$ に対して

$$\sigma(\boldsymbol{y})=(\sigma(y_0),\cdots,\sigma(y_{N-1}))^{\mathrm{T}},$$

と定義する．離散化した問題では基本的に $\{t_k\}_{0\le k\le N-1}$ 上で離散化した $s(t)$ を各点ごとに計算する．離散化された共役作用素 K_N を次に定義する．

［定義 2］ 関数 $f\in C_R(T)$ に対する標本点 $\{t_k\}_{0\le k\le N-1}$ 上での三角補間多項式を

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{l=1}^{n-1}(a_l\cos lt+b_l\sin lt)+\frac{a_n}{2}\cos nt, \qquad (10)$$

とする．離散型共役作用素は上式に対して共役作用素 K を作用させて，$\{t_k\}$ 上で離散化したもの

$$K_N\boldsymbol{f}:=\sum_{l=1}^{n-1}(a_l\sin l\boldsymbol{t}-b_l\cos l\boldsymbol{t}),$$

とする． ■

さらに，

$$J_0(\boldsymbol{f}):=\frac{1}{N}\sum_{\mu=0}^{N-1}f_\mu$$
$$J_n(\boldsymbol{f}):=\frac{1}{N}\sum_{\mu=0}^{N-1}(-1)^\mu f_\mu,$$

を定義する．

$K_N\boldsymbol{f}$ は FFT を使って $O(N\log_2 N)$ の計算量で効率よく計算できる[10]．

従来の Wegmann の方法の離散版では (9) 式を離散化して修正量 $\boldsymbol{\delta}_m$ を

$$\boldsymbol{\delta}_m=-\mathrm{Re}\frac{\eta(\boldsymbol{s}_m)}{\dot{\eta}(\boldsymbol{s}_m)}-\frac{\lambda_m\mathbf{1}+K_N\boldsymbol{q}_m}{|\dot{\eta}(\boldsymbol{s}_m)|\exp(\boldsymbol{w}_m)}, \qquad (11)$$

として計算する．しかし，修正された Wegmann の方法では離散版での収束性を保証するために (11) 式に特別な項 $\beta\cos n\boldsymbol{t}$ を入れて修正量 $\boldsymbol{\delta}_m$ を

$$\boldsymbol{\delta}_m=-\mathrm{Re}\frac{\eta(\boldsymbol{s}_m)}{\dot{\eta}(\boldsymbol{s}_m)}-\frac{\lambda_m\mathbf{1}+K_N\boldsymbol{q}_m+\beta\cos n\boldsymbol{t}}{|\dot{\eta}(\boldsymbol{s}_m)|\exp(\boldsymbol{w}_m)}, \qquad (12)$$

β：v_m の n 次 Fourier 係数，

として計算する．そして，反復法を

$$\boldsymbol{s}_{m+1}=\boldsymbol{s}_m+\boldsymbol{\delta}_m, \qquad (13)$$

とする．(12) 式の $\beta\cos n\boldsymbol{t}$ を入れることによって (13) 式の反復法の収束性に関する Wegmann の分析[6] の概要を次に示す．

3. Wegmann の方法の収束性

(12)，(13) 式の反復法を簡単に

$$\boldsymbol{s}_{m+1}=W(\boldsymbol{s}_m),\quad m\ge 0, \qquad (14)$$

と書いて分析する．(13)，(14) 式から

$$\boldsymbol{\delta}_{m+1}=\boldsymbol{s}_{m+2}-\boldsymbol{s}_{m+1}=W(\boldsymbol{s}_{m+1})-\boldsymbol{s}_{m+1}$$
$$=W(\boldsymbol{s}_m+\boldsymbol{\delta}_m)-\boldsymbol{s}_{m+1}\approx W(\boldsymbol{s}_m)+W_{\boldsymbol{s}_m}\boldsymbol{\delta}_m-\boldsymbol{s}_{m+1}$$
$$=W_{\boldsymbol{s}_m}\boldsymbol{\delta}_m\approx W_{\boldsymbol{s}^*}\boldsymbol{\delta}_m$$

と近似できる．ここで，$W_{\boldsymbol{s}_m}$ と $W_{\boldsymbol{s}^*}$ は W の $\boldsymbol{s}_m$ と解 $\boldsymbol{s}^*$ での微分である．したがって，反復法は $W_{\boldsymbol{s}^*}$ のスペクトル半径に応じて解に収束，または発散する．問題領域が単位円に近い場合に $W_{\boldsymbol{s}^*}$ のスペクトル半径を実際に評価してみる．問題領域の境界が

$$\eta(t)=(1+\xi(t))e^{it},\quad \xi(t)\in C_R^2(T), \qquad (15)$$

と表現できる領域とする．ノルムとしては

$$\|\xi\|:=\|\xi\|_\infty+\|\dot{\xi}\|_\infty+\|\ddot{\xi}\|_\infty,$$

を採用する．(15) 式で $\|\xi(t)\|$ は十分小さいと仮定する．$W_{\boldsymbol{s}^*}$ を計算すると[6]

$$W_{\boldsymbol{s}^*}(\boldsymbol{u})=-Y(\xi,\boldsymbol{u})+O(\xi^2)\approx -Y(\xi,\boldsymbol{u}), \qquad (16)$$
$$Y(\xi,\boldsymbol{u}):=\dot{\xi}(\boldsymbol{t})\cdot K_N\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\cdot K_N\dot{\xi}(\boldsymbol{t})$$
$$+K_N((K_N\dot{\xi}(\boldsymbol{t}))\cdot K_N\boldsymbol{u}-\dot{\xi}(\boldsymbol{t})\cdot\boldsymbol{u})$$
$$+J_0(\xi(\boldsymbol{t}))J_0(\boldsymbol{u})\mathbf{1}-((I+K_N{}^2)\xi(\boldsymbol{t}))\cdot\boldsymbol{u}$$
$$-K_N(((I+K_N{}^2)\xi(\boldsymbol{t}))\cdot K_N\boldsymbol{u}),$$

となる．ここで，記号・はベクトル間の要素ごとの積を表し，$\mathbf{1}=(1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ である．Y は ξ, $\boldsymbol{u}$ に対して双線形である．$\|\xi\|$ が十分小さければ (16) 式の $\|Y(\boldsymbol{u})\|$ は 1 より小さくなり収束性が保証できる[6]．

4. W_{s^*} のスペクトル半径

作用素 $Y: C^2_R(T)\times\boldsymbol{R}^N\mapsto\boldsymbol{R}^N$ の双線形性を利用して

$$Y(\xi,\boldsymbol{u})=(Y(\xi_R,\boldsymbol{u}_R)-Y(\xi_I,\boldsymbol{u}_I))+i(Y(\xi_R,\boldsymbol{u}_I)+Y(\xi_I,\boldsymbol{u}_R)),$$

として Y の定義域を $C^2(T)\times\boldsymbol{C}^N$ に拡張する．ここで，$\xi=\xi_R+i\xi_I$, $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_R+i\boldsymbol{u}_I$, ξ_R, $\xi_I\in C^2_R(T)$, $\boldsymbol{u}_R$, $\boldsymbol{u}_I\in\boldsymbol{R}^N$ である．$\boldsymbol{C}^N$ に基底として $\{e^{ilt}\}^n_{l=1-n}$ を導入する．$\boldsymbol{u}=\sum_{l=1-n}^{n}u_le^{ilt}$ から $Y(\xi,\boldsymbol{u})=\sum_{l=1-n}^{n}v_le^{ilt}$ への係数の変換行列を写像と同じ記号を使って $Y=(y_{l,\nu})_{1-n\le l,\nu\le n}$ と書く．すなわち，

$$(v_{1-n},\cdots,v_n)^{\mathrm{T}}=Y(u_{1-n},\cdots,u_n)^{\mathrm{T}}.$$

写像Yのスペクトル半径は，行列Yのスペクトル半径 $\rho(Y)$ である．したがって，

$$\rho(Y)\le\|Y\|_1=\max_{1-n\le\nu\le n}r_\nu,$$

$$r_\nu:=\sum_{l=1-n}^{n}|y_{l,\nu}|,\quad 1-n\le\nu\le n,\qquad(17)$$

となる．行列Yの要素 $y_{l,\nu}$ $(1-n\le l,\nu\le n)$ は写像Yの周波数応答

$$Y(\xi,e^{i\nu t})=\sum_{l=1-n}^{n}y_{l,\nu}e^{ilt},\quad 1-n\le\nu\le n,$$

により決定される．写像 Y は双線形で $Y(C^2_R(T),R^N)\subset R^N$ だから

$$\overline{Y(\xi(t),\boldsymbol{u})}=Y(\overline{\xi(t)},\overline{\boldsymbol{u}}).$$

本問題では，ξ は実関数であるから

$$\sum_{l=1-n}^{n}y_{l,-\nu}e^{ilt}=Y(\xi,e^{-i\nu t})=\overline{Y(\overline{\xi},\overline{e^{i\nu t}})}$$
$$=\overline{Y(\xi,e^{i\nu t})}=\sum_{l=1-n}^{n}\overline{y_{l,\nu}}e^{-ilt}.$$

これと，$e^{int}=e^{-int}$ に注意して

$$y_{l,-\nu}=\overline{y_{-l,\nu}},\ y_{n,-\nu}=\overline{y_{n,\nu}},\quad |l|\le n-1,$$

を得る．したがって，$r_{-\nu}=r_\nu$ $(1\le\nu\le n-1)$ となり

$$\rho(Y)\le\max_{0\le\nu\le n}r_\nu.\qquad(18)$$

$\xi\in C^2_R(T)$ であるから，ξ と $\dot{\xi}$ の Fourier 展開

$$\xi(t):=\sum_{l=-\infty}^{\infty}c_le^{ilt}$$

$$\dot{\xi}(t):=\sum_{l=-\infty}^{\infty}d_le^{ilt}=\sum_{l=-\infty}^{\infty}lc_le^{ilt},$$

は共に絶対収束する．Yのξに関する線形性から

$$Y(\xi(t),e^{i\nu t})=\sum_{l=-\infty}^{\infty}c_lY(e^{ilt},e^{i\nu t}),\qquad(19)$$

である．

$$\sigma_k:=\begin{cases}0 &: k\equiv 0 \mod n\\ 1 &: k\equiv m \mod N\quad 1\le m\le n-1\\ -1 &: k\equiv -m \mod N\quad 1\le m\le n-1,\end{cases}$$

$$\tau_k:=\begin{cases}0 &: k\not\equiv 0 \mod N\\ 1 &: k\equiv 0 \mod N.\end{cases}$$

とすると，$K_Ne^{ikt}=-i\sigma_ke^{ikt}$, $J_0(e^{ikt})=\tau_k$, $J_n(e^{ikt})=\tau_{k-n}$, $k\in\boldsymbol{Z}$, となるので，これをYの定義式(16)に用いて次の補題を得る．

［補題］

$$Y(e^{ilt},e^{i\nu t})=(A_{\nu,l}+lB_{\nu,l})e^{i(l+\nu)t},\qquad(20)$$

ここで，

$$A_{\nu,l}:=\tau_l(\tau_\nu-1+\sigma_{l+\nu}\sigma_\nu)+\tau_{l-n}(\sigma_{l+\nu}\sigma_\nu-1),$$
$$B_{\nu,l}:=\sigma_\nu+\sigma_l-(1+\sigma_l\sigma_\nu)\sigma_{l+\nu}.\qquad\blacksquare$$

この補題を使って行列Yの要素 $y_{l,\nu}$ を求める．

$$e^{i(l+\alpha N)t}=e^{ilt},\quad l,\alpha\in\boldsymbol{Z},$$

であるから，式(19)の右辺に式(20)を代入し，l の変域を１つの周期 $[1-n-\nu,n-\nu]$ に集約して，

$$Y(\xi,e^{i\nu t})=\sum_{l=-\infty}^{\infty}(A_{\nu,l}+lB_{\nu,l})c_le^{i(l+\nu)t}$$
$$=\sum_{l=1-n-\nu}^{n-\nu}\left\{\sum_{\alpha=-\infty}^{\infty}(A_{\nu,l+\alpha N}+(l+\alpha N)B_{\nu,l+\alpha N})\cdot c_{l+\alpha N}\right\}e^{i(l+\nu)t}.$$

したがって，求める行列Yの要素は

$$y_{l+\nu,\nu}=\sum_{\alpha=-\infty}^{\infty}(A_{\nu,l+\alpha N}+(l+\alpha N)B_{\nu,l+\alpha N})c_{l+\alpha N},$$
$$1-n-\nu\le l\le n-\nu,$$

となる．

これと(17)式より

$$r_\nu=\sum_{l=1-n-\nu}^{n-\nu}\left|\sum_{\alpha=-\infty}^{\infty}\{A_{\nu,l+\alpha N}+(l+\alpha N)B_{\nu,l+\alpha N}\}c_{l+\alpha N}\right|$$
$$\le R_\nu:=\sum_{l=-\infty}^{\infty}|(A_{\nu,l}+lB_{\nu,l})c_l|.\qquad(21)$$

ここで，ξ, $\dot{\xi}$ の Fourier 係数より，次の量

$$D_0:=|c_0|+4\sum_{k=1}^{\infty}|d_k|,$$

$$D_\mu:=2|d_\mu|+4\sum_{k=\mu+1}^{\infty}|d_k|,\quad 1\le\mu\le\infty,\qquad(22)$$

を定義する．$\dot{\xi}$ の Fourier 級数の絶対収束性より D_μ は存在し，$\lim_{\mu\to\infty}D_\mu=0$ である．また，D_μ が μ に関して単調減少であることは容易にわかる．(21)式の中の $A_{\nu,l}$, $B_{\nu,l}$ $(0\le\nu\le n, l\in\boldsymbol{Z})$ を具体的に計算

することにより次の定理を得る．

［定理3］ $\xi\in C_R^2$ とすると，

$$\rho(Y)\le D_0. \tag{23}$$

［証明］ ξ が実関数であるから Fourier 係数は共役対称である．すなわち $c_{-l}=\overline{c_l}$, $(-\infty<l<\infty)$ が成立する．したがって，

$$R_\nu=\sum_{l=-\infty}^{\infty}|(A_{\nu,l}+lB_{\nu,l})c_l|$$
$$=\sum_{l=0}^{\infty}{}'(|A_{\nu,l}+lB_{\nu,l}|+|A_{\nu,-l}-lB_{\nu,-l}|)|c_l|. \tag{24}$$

ここで，Σ' は初項を 1/2 して総和することを意味する．$1\le\nu\le n-1$ について，R_ν を評価してみよう．補題により，$A_{\nu,l}$, $B_{\nu,l}$ は l について周期 N で

$$A_{\nu,l}=\begin{cases}0 & : l\not\equiv n \quad \bmod N\\ -2 & : l\equiv n \quad \bmod N,\end{cases}$$

$$B_{\nu,l}=\begin{cases}0 & : l\equiv m \quad \bmod N \quad 0\le m<n-\nu\\ 2 & : l\equiv n-\nu \quad \bmod N\\ 4 & : l\equiv m \quad \bmod N \quad n-\nu<m<n\\ 2 & : l\equiv n \quad \bmod N\\ 0 & : l\equiv m \quad \bmod N \quad n<m\le 2n-1.\end{cases}$$

このことから，(24)式の $|c_l|$ の係数

$$Z_{\nu,l}:=|A_{\nu,l}+lB_{\nu,l}|+|A_{\nu,-l}-lB_{\nu,-l}|,$$
$$1\le\nu\le n-1,\ 0\le l,$$

も l について周期 N で，$1\le\nu\le n-1$ のときは

$$Z_{\nu,l}=\begin{cases}0 : l\equiv m & \bmod N,\quad 0\le m<n-\nu\\ 2l : l\equiv n\pm\nu & \bmod N\\ 4l : l\equiv m & \bmod N,\\ & \quad n-\nu+1\le m\le n+\nu-1\\ 0 : l\equiv m & \bmod N,\\ & \quad n+\nu+1\le m\le 2n-1,\end{cases}$$

となる．したがって，$Z_{\nu,l}=0$, $(0\le l\le n-\nu-1)$, $Z_{\nu,n-\nu}=2(n-\nu)$, $Z_{\nu,l}\le 4l$, $(n-\nu+1\le l<\infty)$, である．ゆえに，

$$R_\nu=\sum_{l=0}^{\infty}{}'Z_{\nu,l}|c_l|$$
$$\le 2(n-\nu)|c_{n-\nu}|+4\sum_{l=n-\nu+1}^{\infty}l|c_l|=D_{n-\nu}.$$

$\nu=0,n$ のときも同様に $R_\nu\le D_{n-\nu}$ が成立することが証明できる．したがって，式(18)，(21)より，

$$\rho(Y)\le\max_{0\le\nu\le n}r_\nu\le\max_{0\le\nu\le n}R_\nu\le\max_{0\le\nu\le n}D_{n-\nu}.$$

D_μ は μ について単調減少であるので(23)の不等式が成り立つ． ■

$O(\xi^2)$ の項を無視すれば，定理3の(23)式から D_0 が1未満になれば反復法は収束する．逆に，収束性の悪化，または非収束の現象が現れるときには，D_0 が1以上になる．D_0 は，もっぱら $\dot{\xi}(t)$ の Fourier 係数と関係しているので問題領域の形を表す $\dot{\xi}(t)$ が問題の難易度を決定する．

5. 低周波フィルタによる安定化

第4章の式(22)で定義した D_μ は μ について単調減少であるので，低周波フィルタによって $\boldsymbol{s}$ の動く空間を制限すれば収束が改善される．

低周波フィルタ L_k を

$$L_k(e^{imt})\begin{cases}e^{imt} & : 0\le|m|\le n-k\\ 0 & : n-k<|m|\le n\end{cases} \tag{25}$$

と定義する．ここで，k はうしろからいくつの高周波成分を削るかを示すパラメータである．(25)式の低周波フィルタ L_k を利用して新しい反復法を

$$\hat{W}(\boldsymbol{s}_m)=L_k(W(\boldsymbol{s}_m)-\boldsymbol{t})+\boldsymbol{t},\quad m=0,1,\cdots, \tag{26}$$

と定義する．$\boldsymbol{s}_m,(m\ge1)$ は $\boldsymbol{C}^N$ の $\{e^{ilt}\}_{l=k-n}^{n-k}$ で張られる部分空間 P_k 内を動く．

L_k の線形性と(16)式より

$$\hat{W}_{\boldsymbol{s}^*}=(L_kW)_{\boldsymbol{s}^*}=L_kW_{\boldsymbol{s}^*}=-L_kY+O(\xi^2), \tag{27}$$

である．

空間 P_k のベクトル $\boldsymbol{v}=\sum_{l=k-n}^{n-k}u_le^{ilt}$ から $L_kY(\xi,\boldsymbol{u})=\sum_{l=k-n}^{n-k}v_le^{ilt}$ への係数の変換行列を

$$Y'=(y'_{l,\nu})_{k-n\le l,\nu\le n-k},$$

と書くと，明らかに

$$y'_{l,\nu}=y_{l,\nu},\quad k-n\le l,\ \nu\le n-k,$$

であるから，$r'_\nu:=\sum_{l=k-n}^{n-k}|y'_{l,\nu}|$ とすれば(17)式より，

$$r'_\nu\le r_\nu.$$

再び，L_kY のスペクトル半径 $\rho(L_kY)$ について

$$\rho(L_kY)=\rho(Y')\le\|Y'\|_1=\max_{k-n\le\nu\le n-k}r'_\nu$$
$$\le\max_{0\le\nu\le n-k}r_\nu\le\max_{0\le\nu\le n-k}D_{n-\nu}=D_k.$$

最後の等式は D_μ, $(\mu\ge0)$ の単調性からくる．$\dot{\xi}(t)$ の Fourier 展開は絶対収束するので，$\lim_{k\to\infty}D_k=0$ である．

以上のことから次の定理が得られる．

［定理4］ $\xi\in C_R^2(T)$ とする．低周波フィルタ L_k のパラメータ k を適当に大きくとれば，不等式

$$\rho(L_kY)\le D_k<1,$$

が常に成立する． ■

したがって，(27)式において $O(\xi^2)$ を無視すれば反復法(26)式は収束する．

パラメータ k は問題を記述する関数 $\dot{\xi}(t)$ のみに依

存し，標本点数Nに依存しないことは注目すべき点である．このことはあらかじめ小さな標本点数Nでパラメータ k の決定が可能であることを意味する，

次章で，低周波フィルタを用いた反復法(26)式による数値実験結果を示す．

6. 数値実験

問題領域が偏心円，逆楕円[11]のとき，写像の計算例を示す．

初期値を $\mathbf{s}_0=\mathbf{t}$ とし計算結果の提示に用いた記号は次のとおりである．

R：形状パラメータ，N：標本点数，

m：反復回数，　　$\mathbf{s}^*$：真値を離散化したもの，

$\|\boldsymbol{\delta}\|_2=\|\mathbf{s}_{m+1}-\mathbf{s}_m\|_2$：修正量，

$\|\varepsilon\|_2=\|\mathbf{s}^*-\mathbf{s}_{m+1}\|_2$：誤差，

k：低周波フィルタのパラメータ．

修正された Wegmann の反復法(14)と低周波フィルタを用いた反復法(26)で実験を行った結果を**表2，3**に示す．実験には名古屋大学大型計算機センターの FACOM M-780 を用い FORTRAN 77 の倍精度で計算した．

表 2 Wegmann の方法 (WG) と低周波フィルタによる方法 (LF) の修正量の比較（偏心円）

Table 2 Convergence behaviors for the mapping onto the eccentric circles calculated by Wegmann method (WG) and our method with low pass filter (LF).

	$R=0.6$　$N=64$			$R=0.9$　$N=256$	
m	WG	LF ($k=2$)	m	WG	LF ($k=6$)
	$\|\boldsymbol{\delta}\|_2$	$\|\boldsymbol{\delta}\|_2$		$\|\boldsymbol{\delta}\|_2$	$\|\boldsymbol{\delta}\|_2$
1	.32E+1	.32E+1	1	.92E+1	.92E+1
2	.61	.61	2	.38E+1	.38E+1
3	.33E−1	.33E−1	3	.94	.94
4	.14E−3	.14E−3	4	.11	.11
5	.31E−8	.31E−8	5	.18E−2	.18E−2
6	.40E−13	.20E−14	6	.68E−6	.68E−6
7	.12E−12	.21E−14	7	.34E−9	.97E−12
8	.38E−12	.22E−14	8	.42E−8	.94E−14
9	.12E−11	.17E−14	9	.52E−7	.81E−14
10	.36E−11	.20E−14	10	.63E−6	.78E−14
11	.11E−10	.33E−14	11	.78E−5	.86E−14
12	.35E−10	.35E−14	12	.96E−4	.58E−14
13	.11E−9	.34E−14	13	.11E−2	.72E−14
14	.33E−9	.38E−14	14	.14E−1	.10E−13
15	.10E−8	.21E−14	15	.17	.15E−13
16	.32E−8	.20E−14	16	.21E+1	.57E−14
17	.99E−8	.21E−14	17	.34E+2	.81E−14
18	.30E−7	.25E−14	18	.27E+7	.26E−13
19	.94E−7	.23E−14	19	…	.96E−14
20	.29E−6	.21E−14	20	…	.13E−13
$\|\varepsilon\|_2$	…	.16E−7	$\|\varepsilon\|_2$	…	.21E−6

（例1）　偏心円

境界：$\eta(s)=\rho(s)e^{is}$，

$$\rho(s)=\frac{R\cos s+\sqrt{1-R^2\sin^2 s}}{R+1},\quad 0\leq R<1.$$

求める解：$s(t)=\arctan\dfrac{R\sin t}{1-R\cos t}+t.$

（例2）　逆楕円

逆楕円の領域は長軸1短軸 $1/R$ の楕円の外部を単位円に関して反転して得られる．

境界：$\eta(s)=\rho(s)e^{is}$，

$$\rho(s)=\sqrt{1-(1-R^2)\cos^2 s},\quad 0<R\leq 1.$$

求める解：$s(t)=\arctan(R\tan t)$.

実験結果の表2，3を見ると Wegmann の方法によれば収束する問題の族は非常に限られていることがわかる．それに比べ低周波フィルタを用いた本反復法は，収束性が改善されていることがわかる．しかも，良い精度を得ることができた．

7. むすび

Wegmann の方法において，収束性が悪化する原

表 3 Wegmann の方法 (WG) と低周波フィルタによる方法 (LF) の修正量の比較（逆楕円）

Table 3 Results as in Table 2 but the mapping onto the inverted ellipses.

	$R=0.4$　$N=128$			$R=0.3$　$N=128$	
m	WG	LF ($k=3$)	m	WG	LF ($k=7$)
	$\|\boldsymbol{\delta}\|_2$	$\|\boldsymbol{\delta}\|_2$		$\|\boldsymbol{\delta}\|_2$	$\|\boldsymbol{\delta}\|_2$
1	.32E+1	.32E+1	1	.39E+1	.39E+1
2	.57	.57	2	.10E+1	.10E+1
3	.27E−1	.27E−1	3	.92E−1	.92E−1
4	.56E−4	.56E−4	4	.22E−2	.75E−3
5	.53E−6	.14E−6	5	.12E−2	.14E−4
6	.28E−7	.15E−7	6	.15E−2	.11E−5
7	.15E−8	.16E−8	7	.15E−2	.89E−7
8	.82E−10	.16E−9	8	.16E−2	.69E−8
9	.44E−11	.17E−10	9	.17E−2	.54E−9
10	.51E−12	.18E−11	10	.17E−2	.42E−10
11	.10E−11	.19E−12	11	.17E−2	.33E−11
12	.24E−11	.20E−13	12	.17E−2	.26E−12
13	.56E−11	.59E−14	13	.17E−2	.21E−13
14	.13E−10	.64E−14	14	.16E−2	.76E−14
15	.30E−10	.51E−14	15	.16E−2	.59E−14
16	.71E−10	.58E−14	16	.16E−2	.63E−14
17	.17E−9	.67E−14	17	.39E−2	.69E−14
18	.39E−9	.54E−14	18	.22E−2	.66E−14
19	.90E−9	.60E−14	19	.14	.60E−14
20	.21E−8	.60E−14	20	.81	.61E−14
$\|\varepsilon\|_2$	…	.32E−11	$\|\varepsilon\|_2$	…	.54E−8

因を Fourier 解析の手法によって明らかにし，収束性と問題領域の形状との関係を理論的に示した．この理論に基づき，低周波フィルタを用いて Wegmann の方法の欠点を克服できることを示した．また，数値実験により，低周波フィルタを用いた Wegmann の方法改良の有効性を実証した．

与えられた領域と所要の精度に応じて，標本数と低周波フィルタのパラメータを自動的に決定する数値等角写像のソフトウェアの作成は今後の課題である．

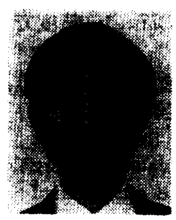
謝辞 本論文に関する助言をいただいた名古屋大学工学部情報工学科の鳥居達生教授と三井斌友助教授に感謝する．

参 考 文 献

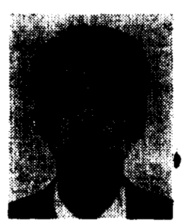
1) Theodorsen, T.: Theory of Wing Section of Arbitrary Shape, NACA Report 411 (1931).
2) Gutknecht, M.H.: Numerical Conformal Mapping Methods Based on Function Conjugation, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 14, No. 1, 2, pp. 31-77 (1986).
3) 天野　要：代用電荷法に基づく等角写像の数値計算法，情報処理学会論文誌，Vol. 28, No. 7, pp. 697-704 (1987).
4) Muskhelishvili, N.I.: *Singular Integral Equations*, Noordhoff, Leiden (1953).
5) 宋　殷志，杉浦　洋，櫻井鉄也：数値等角写像における Theodorsen 方程式の解法，情報処理学会論文誌，Vol. 30, No. 4, pp. 393-401 (1989).
6) Wegmann, R.: Discretized Versions of Newton Type Iterative Methods for Conformal Mapping, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 29, No. 2, pp. 207-224 (1990).
7) Hübner, O.: The Newton Method for Solving the Theodorsen Integral Equation, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 14, No. 1, 2, pp. 19-29 (1986).
8) Niethammer, W.: Iterationsverfahren bei der konformen Abbildung, *Computing*, Vol. 1, No. 2, pp. 146-153 (1966).
9) Wegmann, R.: Convergence Proofs and Error Estimates for an Iterative Method for Conformal Mapping, *Numer. Math.*, Vol. 44, pp. 435-461 (1984).
10) Gutknecht, M.H.: Fast Algorithms for the Conjugate Periodic Function, *Computing*, Vol. 22, No. 1, pp. 79-91 (1979).
11) Wegmann, R.: An Iterative Method for Conformal Mapping, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 14, No. 1, 2, pp. 7-18 (1986).

（平成2年5月14日受付）
（平成2年11月13日採録）

宋　殷志（正会員）
1961年生．1984年韓国淑明女子大学数学科卒業．1988年名古屋大学大学院工学研究科修士課程修了し，博士課程に進学，現在に至る．等角写像に関する数値解析に興味を持つ．



杉浦　洋（正会員）
昭和27年生．昭和57年名古屋大学理学部数学科卒業．昭和53年同大学大学院理学研究科数学専攻修士課程修了．昭和56年同大学大学院工学研究科情報工学専攻博士課程満了．昭和57年より同大学工学部助手．数値積分と積分方程式に興味をもつ．



櫻井　鉄也（正会員）
昭和36年生．昭和59年名古屋大学工学部応用物理学科卒業．昭和61年同大学院工学研究科情報工学専攻博士課程前期課程修了．同年同大学工学部情報工学科助手．代数方程式の数値解法と有理関数による近似に興味を持つ．