

テクニカルノート

Padé 近似を用いた数値等角写像の計算法

櫻井 鉄也[†] 杉浦 洋^{††}

本論文では Padé 近似を用いた数値等角写像の計算法を示す．この方法では天野らの提案した代用電荷法を用いた数値等角写像の計算結果を利用し，Padé 近似を用いて新たな電荷点を計算する．問題領域の形状によっては電荷点数を削減できる例があることを数値例によって示す．

A Method for Numerical Conformal Mapping by Using Padé Approximations

TETSUYA SAKURAI[†] and HIROSHI SUGIURA^{††}

In this paper a method to compute numerical conformal mappings by using Padé approximations is considered. This method computes new charge points using the results obtained by the charge simulation method proposed by Amano, et al. Some numerical examples illustrate the aspects of the method.

1. はじめに

z 平面上の任意の Jordan 曲線を C ， C に囲まれた外部領域を D として， D から w 平面上の単位円の外部 $|w| > 1$ への等角写像 $w = f(z)$ を考える． $z = 0$ は C の内部にあると仮定する． $f(z)$ は正規化条件 $f(\infty) = \infty$ ， $f'(\infty) > 0$ のもとで

$$f(z) = \frac{z}{\gamma} \exp(g(z) + ih(z)) \quad (1)$$

と表すことができる²⁾．ここで γ は正の実数である． $g(z)$ は外部 Dirichlet 問題

$$\begin{cases} \nabla^2 g(z) = 0, & z \in D \\ g(z) = \log \gamma - \log |z|, & z \in C \\ g(\infty) = 0 \end{cases}$$

の解であり， $h(z)$ はその共役調和関数である．

$u(z) := g(z) + ih(z)$ とおく．代用電荷法に基づく等角写像の計算法²⁾では， C の内部の異なる N 点， ζ_j ， $j = 1, \dots, N$ を与えたうえで，

$$U(z) := \sum_{j=1}^N q_j \log(z - \zeta_j)$$

によって u を近似する．

係数 q_j ， $j = 1, \dots, N$ および γ の近似値 Γ は， C 上の拘束点を z_l ， $j = 1, \dots, N$ として，条件

$$\sum_{j=1}^N q_j \log |z_l - \zeta_j| = \log \Gamma - \log |z_l|, l = 1, \dots, N$$

および $\sum_{j=1}^N q_j = 0$ より求められる．

内部領域や多重連結領域についても代用電荷法を用いて統一的に計算する方法が天野らによって提案されている^{1),3),4)}．代用電荷法の計算では，電荷点と拘束点の配置が精度に大きな影響を与え，問題形状に応じて適切に配置する必要がある．本論文では，代用電荷法によって得られた結果を利用して，Padé 近似を用いて電荷点配置を新たに求める方法を提案する．問題領域の形状によっては少ない電荷点数で精度の良い写像関数が得られる場合があることを示す．

2. Padé 近似による外部領域の数値等角写像

$E(z) := u'(z)$ とする． $E(z)$ が

$$E(z) = \sum_{j=1}^n \frac{\beta_j}{z - \alpha_j} = \mu_0 z^{-1} + \mu_1 z^{-2} + \dots$$

[†] 筑波大学電子・情報工学系

Institute of Information Sciences and Electronics, University of Tsukuba

^{††} 名古屋大学大学院工学研究科

Graduate School of Engineering, Nagoya University

と表される場合を考える．ここで， $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ は C の内部の相異なる点で， $\beta_j \neq 0, 1 \leq j \leq n$ とする．このとき $k = 0, 1, \dots$ について

$$\mu_k = \frac{1}{2\pi i} \int_C z^k E dz = \sum_{j=1}^n \beta_j \alpha_j^k \quad (2)$$

となる．

モニツクな n 次の多項式 $\varphi_n(z)$ が E の無限遠点での Padé 近似の分母であるとき，

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C z^k \varphi_n E dz = 0, \quad k = 0, \dots, n-1 \quad (3)$$

を満たす⁵⁾． $n \times n$ の Hankel 行列 $H_n, H_n^<$ を

$$H_n := [\mu_{j+k}]_{j,k=0}^{n-1}, \quad H_n^< := [\mu_{j+k+1}]_{j,k=0}^{n-1}$$

とおいたとき，分母 φ_n の零点は一般化固有値問題

$$H_n^< x = \lambda H_n x$$

を解くことで得られる^{5), 6)}．このとき

$$\varphi_n(\alpha_j) = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

である．

代用電荷法によって得られた値を用いて

$$\tilde{E}(z) := U'(z) = \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{z - \zeta_j} \quad (4)$$

とおく．代用電荷法によって十分に良い結果が得られているときには \tilde{E} は E の良い近似になっていると見なせる．ここで

$$\tilde{E}(z) = \tilde{\mu}_0 z^{-1} + \tilde{\mu}_1 z^{-2} + \dots$$

としたとき $\tilde{\mu}_k = \sum_{j=1}^N q_j \zeta_j^k$ となる．この $\tilde{\mu}_k$ を用いて

$$\tilde{H}_n := [\tilde{\mu}_{j+k}]_{j,k=0}^{n-1}, \quad \tilde{H}_n^< := [\tilde{\mu}_{j+k+1}]_{j,k=0}^{n-1}$$

とする． \tilde{E} に対する無限遠点での Padé 近似の n 次の分母を $\psi_n(z)$ とする．このとき以下の定理を得る．

定理 2.1 十分に小さな $\delta > 0$ に対して

$$\tilde{\mu}_k = \mu_k + O(\delta), \quad k = 0, \dots, 2n-1$$

とする．このとき

$$\psi_n(\alpha_j) = O(\delta), \quad j = 1, \dots, n.$$

証明 $\psi_n(z)$ を

$$\psi_n(z) := \rho_0 + \rho_1 z + \dots + \rho_n z^n \quad (5)$$

とする．ここで $\rho_n = 1$ とする．留数定理より

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C z^k \psi_n E dz = \sum_{j=1}^n \beta_j \psi_n(\alpha_j) \alpha_j^k$$

である．一方，式 (2)，(5)，および定理の仮定から， $k = 0, \dots, n-1$ について

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_C z^k \psi_n E dz &= \sum_{j=1}^n \rho_j \mu_{k+j} \\ &= \sum_{j=1}^n \rho_j \tilde{\mu}_{k+j} + O(\delta) \end{aligned}$$

となる． ψ_n は \tilde{E} の Padé 近似なので $\sum_{j=1}^n \rho_j \tilde{\mu}_{k+j} = 0$ であることから

$$\sum_{j=1}^n \beta_j \psi_n(\alpha_j) \alpha_j^k = O(\delta), \quad 0 \leq k \leq n-1 \quad (6)$$

を得る．ここで Vandermonde 行列を $V_n := [\alpha_j^{l-1}]_{j,l=1}^n$ とし， $D_n := \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_n)$ とおくと，式 (6) より

$$V_n D_n \begin{pmatrix} \psi_n(\alpha_1) \\ \vdots \\ \psi_n(\alpha_n) \end{pmatrix} = O(\delta)$$

となる． $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ は互いに異なり， β_1, \dots, β_n は 0 でないので V_n, D_n はともに正則であり，よって定理の結論を得る． \square

この定理より， \tilde{E} が E の十分に良い近似となっていてるとき， ψ_n の零点も φ_n の零点に十分に近いものと見なせる．代用電荷法で求めた値から得られる関数 \tilde{E} に対する Padé 近似によって E の極を推定することにより，新たな電荷点を求める．以下にそのアルゴリズムを示す．

Algorithm

- 1) $N, \zeta_1, \dots, \zeta_N, z_1, \dots, z_N, n$ を与える．
- 2) 代用電荷法により q_1, \dots, q_N を求める．
- 3) $\tilde{\mu}_0, \dots, \tilde{\mu}_{2n-1}$ を求める．
- 4) 一般化固有値問題 $\tilde{H}_n^< x = \lambda \tilde{H}_n x$ を解いて， $\psi_n(z) = 0$ の零点 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ を求める．
- 5) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ を電荷点として改めて代用電荷法を適用する．

3. 内部領域の数値等角写像

次に，Jordan 曲線 C で囲まれた内部領域を D とし， D から w 平面上の単位円内部への等角写像の場合について述べる．原点 $z = 0$ は D に含まれるとし，

$$E(z) = \sum_{j=1}^n \frac{\beta_j}{z - \alpha_j} = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

と表されるものとする．ここで $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ はすべて C の外部にあるとする．

内部領域に対しても代用電荷法を用いて数値等角写像を求めることができる¹⁾．代用電荷法で求めた値を

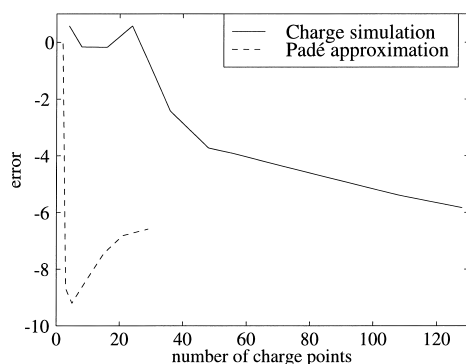


図 1 数値等角写像の誤差 (例 1)

Fig. 1 Error of numerical conformal mappings.

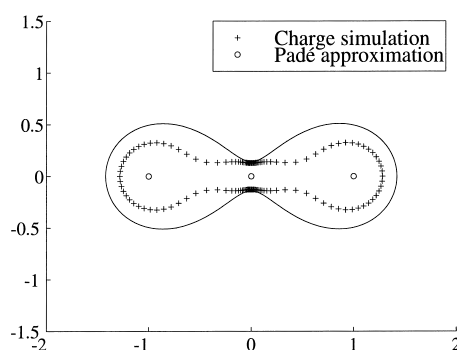


図 2 電荷点の配置 (例 1)

Fig. 2 Location of charge points.

用いて,

$$\tilde{E}(z) = \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{z - \zeta_j} = \tilde{c}_0 + \tilde{c}_1 z + \tilde{c}_2 z^2 + \cdots$$

とする. このとき $k = 0, 1, \dots$ について

$$\tilde{c}_k = \frac{1}{2\pi i} \int_C z^{-k-1} \tilde{E} dz = - \sum_{j=1}^N q_j \zeta_j^{-k-1}$$

となる.

この場合には原点での \tilde{E} に対する Padé 近似を用いて E の極を推定する. Hankel 行列を

$$\tilde{H}_n = [\tilde{c}_{j+k}]_{j,k=0}^{n-1}, \quad \tilde{H}_n^< = [\tilde{c}_{j+k+1}]_{j,k=0}^{n-1}$$

とおくと, 原点での \tilde{E} の Padé 近似の極は一般化固有値問題 $\tilde{H}_n^< x = \lambda \tilde{H}_n x$ の解の逆数で求められる.

4. 数 値 例

いくつかの数値例を示す. プログラムは MATLAB Ver. 5.2 で作成し, 倍精度で計算を行った. Padé 近似の計算では $N = 120$ の代用電荷法の結果を利用した. 誤差は境界 C 上の点を写像した点と単位円の円周との半径方向の距離の最大値を用いた. 一般化固有値問題は MATLAB の関数 `eig (QZ アルゴリズム)` を用いて解いた.

例 1. Cassini の燈形の外部領域. 境界は

$$\{(x+1)^2 + y^2\}\{(x-1)^2 + y^2\} = a^4 \quad (a = 1.01)$$

で与えた. 代用電荷法で用いる電荷点と拘束点の配置は文献 3) を参考にした. 図 1 に電荷点数を変化させたときの代用電荷法, および本方法の誤差を示す. 本方法では $n = 3$ で誤差はほぼ $N = 120$ と同等の精度になった. 図 2 にそれぞれの電荷点の配置を示す. 図中で $+$ は代用電荷法の電荷点の位置を示し, o は本方法で求めた電荷点の位置を表している. この例は

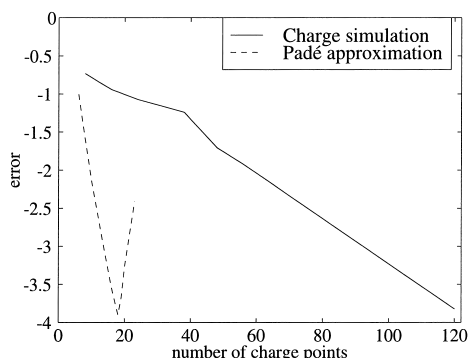


図 3 数値等角写像の誤差 (例 2)

Fig. 3 Error of numerical conformal mappings.

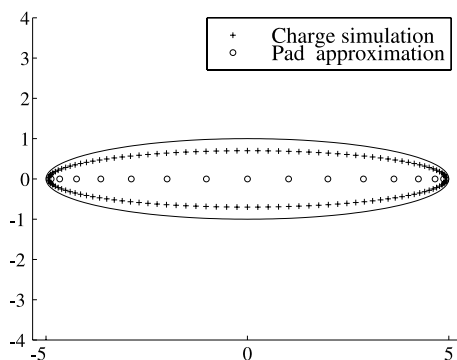


図 4 電荷点の配置 (例 2)

Fig. 4 Location of charge points.

原点に $-1, z = \pm 1$ に $1/2$ の電荷を配置すれば厳密解が得られる問題である.

例 2. 楕円の外部領域の写像 (図 3, 図 4). 境界は

$$x^2/a^2 + y^2 = 1 \quad (a = 5).$$

本方法では $n = 18$ で $N = 120$ と同程度の誤差となった. 図 4 より, Padé 近似で求めた電荷点は実軸上に分布していることが分かる.

例 3. 正方形の内部領域 (図 5, 図 6). 誤差は $n = 18$

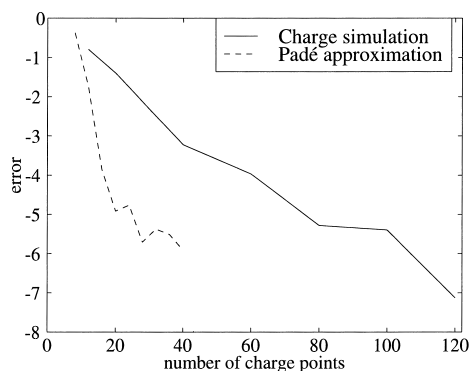


図5 数値等角写像の誤差 (例3)

Fig. 5 Error of numerical conformal mappings.

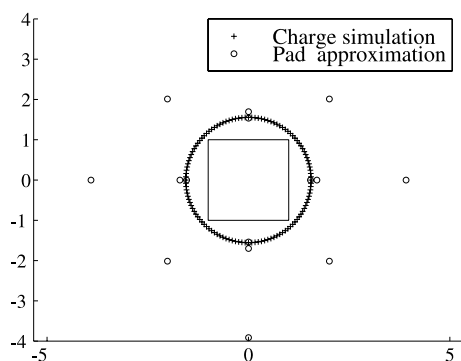


図6 電荷点の配置 (例3)

Fig. 6 Location of charge points.

で $N = 60$ のときの代用電荷法の結果と同程度になっている。 n の増加にともなって Hankel 行列 \tilde{H}_n の条件数が悪くなり、 n を 18 より大きくすると逆に誤差は増大した。得られた電荷点配置を見ると、正方形領域では必ずしも領域の角の近傍に配置する必要がないことが分かる。

5. おわりに

本論文では、代用電荷法によって得られた結果を利用して、Padé 近似を用いて電荷点配置を求める方法を提案した。この方法によって電荷点数を大幅に削減できる場合があることを数値例で示した。写像の計算の手間は電荷点数に比例するため、多数の点での写像を求める必要があるときには、計算時間の削減につながるものと期待される。

本方法は写像関数の導関数に対する Padé 近似を用いており、Schwartz-Christoffel 変換などによって写像関数を求めた場合にも適用可能である。

電荷点数 n の増加とともに Padé 近似の零点を求める計算が不安定になる。より安定性が高く、精度良く求めることができる計算法の開発が今後の課題である。

参考文献

- 1) 天野 要：代用電荷法に基づく等角写像の数値計算法，情報処理学会論文誌，Vol.28, No.7, pp. 697-704 (1987).
- 2) 天野 要：代用電荷法に基づく外部等角写像の数値計算法，情報処理学会論文誌，Vol.29, No.1, pp. 62-72 (1988).
- 3) Amano, K.: A charge simulation method for the numerical conformal mapping of interior, exterior and doubly-connected domains, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol.53, pp. 357-370 (1994).
- 4) 天野 要：代用電荷法による非有界な多重連結領域の統一的な計算法，情報処理学会論文誌，Vol.42, No.3, pp. 385-395 (2000).
- 5) Kravanja, P., Sakurai, T. and Van Barel, M.: On locating clusters of zeros of analytic functions, *BIT*, Vol.39, No.4, pp.646-682 (1999).
- 6) Sakurai, T., Kravanja, P., Sugiura, H. and Van Barel, M.: An error analysis of two related quadrature methods for computing zeros of analytic functions, *J. Comput. Appl. Math.* (accepted).

(平成 14 年 1 月 23 日受付)

(平成 14 年 7 月 2 日採録)



櫻井 鉄也 (正会員)

1986 年名古屋大学大学院工学研究科博士課程前期課程情報工学専攻修了。同年名古屋大学工学部助手。1993 年筑波大学電子・情報工学系講師，1995 年同助教授，現在に至る。博士 (工学)。方程式の反復解法と精度保証，数値ソフトウェアの研究に従事。1996 年日本応用数理学会論文賞受賞。日本応用数理学会会員。



杉浦 洋 (正会員)

1981 年名古屋大学大学院工学研究科博士課程後期課程情報工学専攻満了。1982 年名古屋大学工学部助手。1992 年同講師。1992 年同助教授，現在に至る。工学博士。関数近似，関数方程式の数値解法に興味を持つ。