猫にもわかる球面幾何学

2016 年 2 月 9 日

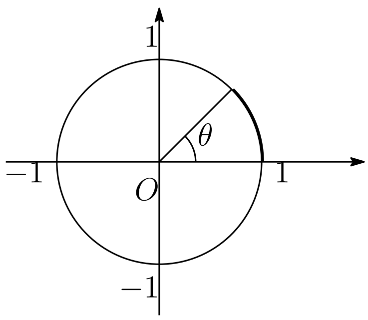
今回は, 球面上の三角形の面積の公式を与えるのを目標とする.

1

まず, 角度は弧度法を用いるので, その説明をする.

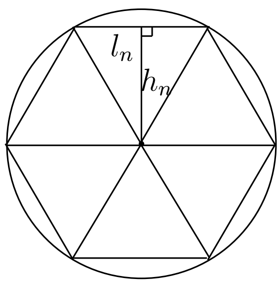
小中学校では円を 1 周まわると 360 度である, とする度数法が使われる. しかし 360 という数字には数学的な特別な理由があるのではなく, 1 週間が 7 日などのように文化的な背景があったと思われる.

弧度法で角度を表すには, 単位円 (半径 1 の円) を考える. 角度と対応する弧の長さは比例関係だから, 角度を測るには弧の長さを測ればよいということになる. そこで, 角の大きさを単位円の弧の長さで表すことにする. これがラジアンである. 1 周まわると 2π (ラジアン) となるように π を決めてある.



アルキメデス (前 3 世紀) は円の面積を次のように求めた.

単位円に正 n 角形を内接させる (下図では正六角形). 正 n 角形の各頂点と円の中心を結ぶと, n 個の三角形ができる. 正 n 角形の一辺を l_n, 円の中心から辺までの距離を h_n とする.



図のような三角形ひとつ分の面積は $\dfrac{h_n l_n}{2}$ だから, 正 n 角形の面積は

$$n\frac{h_n l_n}{2} = \frac{1}{2}h_n(nl_n) \leq (\text{円の面積})$$

ここで, n をどんどん大きくする.

$n \longrightarrow \infty$ とすると $h_n \longrightarrow 1$ (円の半径), $nl_n \longrightarrow 2\pi$ (円周の長さ). 正 n 角形は円に近づいていき, 面積が π に近づく. 確かに, 半径 1 の円の面積は π である. 半径が R のときには円の面積は πR^2 となる.

ただ, 極限の考え方が確立されたのは 19 世紀になってからのことである. アルキメデスはもっと慎重なやり方をしている. 円に内接する正多角形だけでなく, 外接する正多角形も考え, 円を挟みこむ形にして面積がその値より大きいとしても小さいとしても矛盾が生じる, という手法である.

さらに少し遡りピタゴラスの頃 (前 6 世紀) ともなると, 実数の存在もきちんと認められていなかった. 当時はピタゴラス教団があってそこで数学が行われていた. 整数や, その比で表される有理数は知られていた. ピタゴラス教団は「世界は整数とその比によって, 秩序をもって成り立っている」と説いた. すなわち $\sqrt{2}$ のような整数比では表せない無理数は認めていなかったのである.

ところがピタゴラスの定理によると, 直角三角形において, 直角を挟む二辺が 1, 1 の場合の斜辺は $\sqrt{2}$ (無理数) となる. これは教義に反することとして秘中の秘とされていた. うっかりしゃべってしまった若者が, 後日水死体で見つかったというなんとも恐ろしい話が残っている.

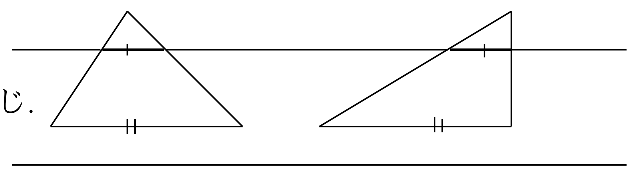
2

積分を使わないで面積や体積を求めるには Cavalieri (カヴァリエリ) の原理が役に立つ.

Cavalieri (カヴァリエリ) の原理

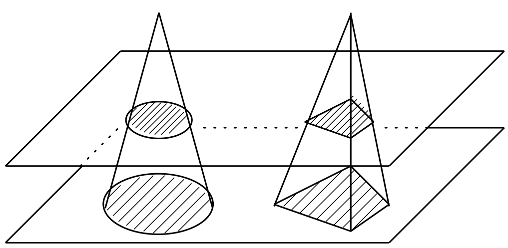
○平面図形の場合

底辺, 高さが同じ三角形を 2 つ並べる.
底辺に平行な直線を引く.
三角形に切り取られる線分の長さは同じ.
$\Longrightarrow$ 2 つの三角形の面積は等しい.



○空間図形の場合

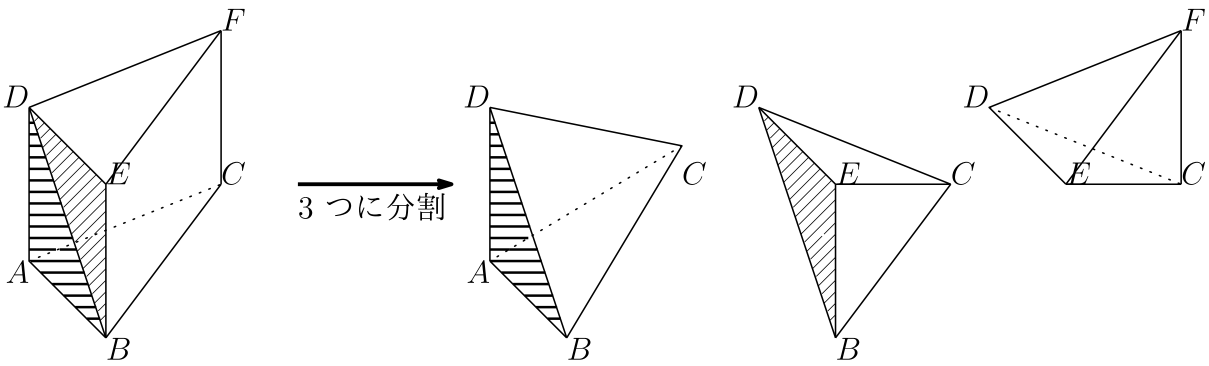
底面積, 高さが同じ錐体を 2 つ並べる.
底面に平行な平面を作る.
錐体の切り取られた部分の面積は同じ.
$\Longrightarrow$ 2 つの錐体の体積は等しい.



Cavalieri の原理を用いて錐体の体積を調べよう.

図のような三角柱を考える. (三角柱の体積) = (底面積) × (高さ) である.

三角柱を 3 つの三角錐に分ける.



三角錐 $C-DBA$ と三角錐 $C-DBE$ を見比べる.

$\triangle DAB$ と $\triangle DBE$ の面積は等しい. 頂点 C までの高さも同じである. したがって, Cavalieri の原理からこの 2 つの三角錐の体積は等しい.

同様にして残りもう 1 つの三角錐もまた同じ体積だといえる.

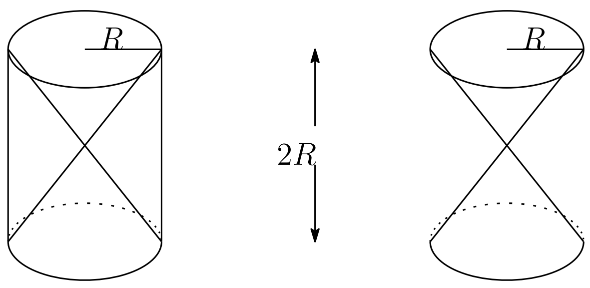
よって

$$(\text{三角錐の体積}) = (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) \times \frac{1}{3}$$

となる.

Cavalieri の原理を用いて球の体積も調べられる.

底面の半径 R, 高さ $2R$ の円柱を考える. 図のように, 円柱の中に, 底面は共通で円柱の中心を頂点とする 2 つの円錐を考える.



円柱の体積は

$$\pi R^2 \times 2R = 2\pi R^3$$

円柱の中の 2 つの円錐の体積は

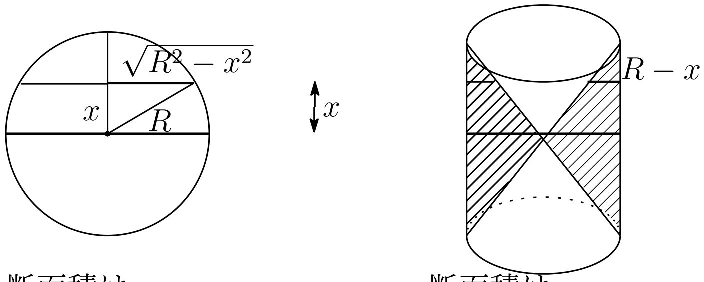
$$\pi R^2 \times R \times \frac{1}{3} \times 2 = \frac{2\pi R^3}{3}$$

円柱から 2 つの円錐を除いた部分の体積は

$$2\pi R^3 - \frac{2\pi R^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{3}$$

この除かれた部分の体積が半径 R の球の体積に等しい.

球と並べて置いて, 中心から x 離れた平面での断面積を考えてみると, 球のほうも, 円柱から 2 つの円錐を除いた図形のほうも同じく $\pi(R^2 - x^2)$ となる.

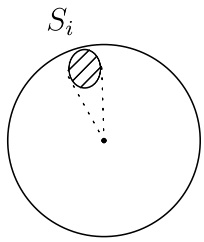


断面積は
$\pi(R^2 - x^2)$

断面積は
$\pi R^2 - x^2\pi = \pi(R^2 - x^2)$

ゆえに Cavalieri の原理からこの 2 つの体積は等しい.
よって半径 R の球の体積は $\dfrac{4\pi R^3}{3}$ となる.

半径 R の球の表面積も求めておく.
球を, 球の中心を頂点とし, 球面上に底面をもつ小さな錐体に分ける. 各錐体の底面積を S_i とする.



$$\frac{4\pi R^3}{3} = \sum \frac{RS_i}{3}$$

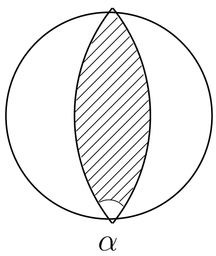
$\displaystyle\sum \frac{RS_i}{3} = \frac{R}{3}\sum S_i$ であるから, 表面積を求める公式は

$$\sum S_i = 4\pi R^2$$

となる.

3

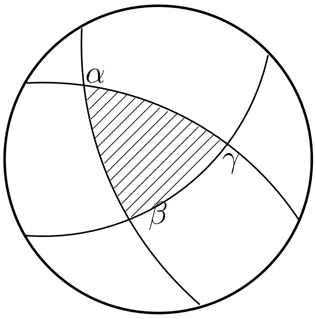
球面上で A, B を結ぶ直線とは大円のことである. A, B, 球の中心 O を通る平面で切ったとき球面上に現れる線が A, B を結ぶ最短距離となっている. 一般に飛行機は最短距離で目的地に行けるように大圏航路を通る.
球の半径は R とする.
球面上で角度が α である二角形の面積は



$$4\pi R^2 \times \frac{\alpha}{2\pi} = 2\alpha R^2$$

角度が 2π になれば, 全体の表面積 $4\pi R^2$ になる.

球面上で三角形の面積を X とする. 内角は α, β, γ とする. 後ろ側にも同じ三角形がもう一つできている.



内角 α の二角形は, 面積が $2\alpha R^2$.

球面上に 2 つあるので, 2 倍して $4\alpha R^2$.

内角 β, γ の二角形に関しても同じく $4\beta R^2$, $4\gamma R^2$.

これらを足し合わせれば球の表面が覆われる. しかし三角形が重複して計算されるので少し注意して

$$4(\alpha + \beta + \gamma)R^2 = 4\pi R^2 + 4X$$

となる.

したがって球面上で三角形の面積は

$$X = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)R^2$$

4

最後に京都大学の入試問題 (1972) を紹介する.

ベクトルの演算では

$$A + B = B + A, \qquad (A + B) + C = A + (B + C)$$

が成り立つ.

n 個のベクトル $A_1, A_2, \ldots, A_n$ を任意に並べ替えて $B_1, B_2, \ldots, B_n$ とする. このとき

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = B_1 + B_2 + \cdots + B_n$$

を上の 2 つの法則だけを用いて示せ. ただし,

$$A + B + C = (A + B) + C, \qquad A + B + C + D = ((A + B) + C) + D$$

である.

$n=2$ のときは $A_1+A_2=A_2+A_1$. これは成り立つ.
$n=3$ のときは並べ替えが複数出てくる.
例えば A_3 が動かない並べ替えについて考えると $A_1+A_2+A_3=A_2+A_1+A_3$ は成り立つ. 何故なら

$$
\begin{aligned}
A_2+A_1+A_3 &= (A_2+A_1)+A_3 \\
&= (A_1+A_2)+A_3 \\
&= A_1+A_2+A_3
\end{aligned}
$$

だから.
A_3 が動いていたらどうだろう.

$$
\begin{aligned}
A_3+A_2+A_1 &= (A_3+A_2)+A_1 \\
&= (A_2+A_3)+A_1 \\
&= A_2+(A_3+A_1) \\
&= A_2+(A_1+A_3) \\
&= (A_2+A_1)+A_3 \\
&= (A_1+A_2)+A_3 \\
&= A_1+A_2+A_3
\end{aligned}
$$

いろいろ試してみると状況が掴めてくる.

これは知識を問うのではなくて, 数学的思考力を問う問題といえる. パターン暗記ではなかなか対応できない, ロボットに解答できないようなタイプの問題である. 今後様々な分野に進出するロボットに取って代わられ駆逐されないためにも, しっかりと思考して答える力を身につけることは大切だろう.