

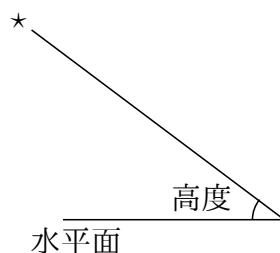
# ニュートンからケプラーへ

2015 年 7 月 9 日

## 1

古代ギリシアの話から始めよう。

地球は球体である。今は誰でも知っているが、紀元前 5 世紀の初頭の古代ギリシアでも、それは知られていた。紀元前 8 紀半ば ~ 紀元前 6 世紀半ば、彼らはニース、マルセイユ、ナポリ、イスタンブール、ヤルタ<sup>1</sup> など地中海世界のあちこちに植民市を築いた。移動する中で、当時は方角の目印として北極星が重要であった。行動範囲が広がると自然に北極星の高度が場所によって異なることに気が付いた。



詳しく言うと、

- 東西方向の移動では高度に変化はない
- 南北方向の移動では北に行くほど高度が大きくなっている
- 北方向の移動距離に比例して高度が大きくなっている

ということがわかった。

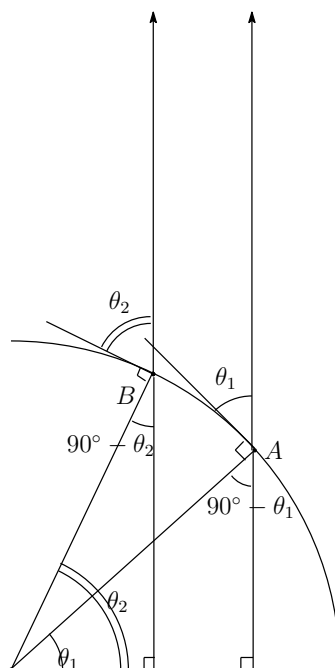
紀元前 3 世紀、エラトステネス（アルキメデスの友人として有名）は次のようにして地球の半径を求めた。

図のように、点  $A$ ,  $B$  での北極星の高度をそれぞれ  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  とする。水平面とはその点での接平面である。異なる地点での北極星を見あげた視線は北極星で交わるのであるが、北極星は大変遠方にあるので、これらの視線は平行であるとしてよい。高度の差  $\theta_2 - \theta_1$  が中心角の差に現れる。北方向の移動距離（円弧の長さ） $d_{BA}$  は  $\theta_2 - \theta_1$  に比例するので、

$$\frac{d_{BA}}{\theta_2 - \theta_1} = \frac{2\pi R}{360^\circ}$$

<sup>1</sup>クリミア半島に位置し戦後のヨーロッパ秩序についてチャーチルやスターリンらが話し合ったヤルタ会談で有名。

により, 実際に地球の半径  $R$  が求められる.



エラトステネスによる測定結果は, かなり正確な値となっている.

中世になり, 再び地球球体説が提唱された. トスカネリは西廻り航路で東洋に到達できると主張した. そして, コロンブスが大海へ旅立った. ただ, 罪作りなことに, トスカネリの考えた地球の大きさは, 実際よりだいぶ小さかったようである.

## 2

近代の話に移ろう.

古代では静的なものを相手にしていたのに対し, 近代になると動的なものを扱うようになる. 物理学で力学や電磁気学の研究がされ, そのために必要な微積分学が大きく発展した. ニュートンは力学の法則や万有引力の発見でよく知られているが, 微積分学の発展にも大きく貢献した人物である. ニュートンのように, 力学で微分方程式を考えていこう.

物体の位置を  $x$  とする. 時間  $t$  での微分は  $\frac{dx}{dt}$ ,  $x'$ ,  $\dot{x}$  などと書かれる.

- 自由落下について

加速度の式から, 次のように  $x$  が求まる.

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -g && \text{(加速度)} \\ \dot{x} &= -gt + C_2 && \text{(速度)} \\ x(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + C_2t + C_1\end{aligned}$$

ここで,  $x(0) = C_1$ ,  $\dot{x}(0) = C_2$ .

● 単振動について

フックの法則によると働く力は  $F = -kx$  である.

加速度の式

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

を満たす  $x(t)$  を求める.

ここで,  $x(t) = \cos \omega t$  とすると

$$\begin{aligned}x(t) &= \cos \omega t \\x'(t) &= -\omega \sin \omega t \\x''(t) &= -\omega^2 \cos \omega t\end{aligned}$$

である. また,  $x(t) = \sin \omega t$  とすると

$$\begin{aligned}x(t) &= \sin \omega t \\x'(t) &= \omega \cos \omega t \\x''(t) &= -\omega^2 \sin \omega t\end{aligned}$$

である. よって

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$$

は微分方程式を満たす. ここで,  $x(0) = C_1$ ,  $\dot{x}(0) = C_2 \omega$ .

初期の位置と速度で運動が決まる.

単振動の元の微分方程式に  $\dot{x}$  をかけると

$$\ddot{x} \dot{x} = -\omega^2 x \dot{x}$$

0 から  $t$  まで積分すれば

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{\omega^2}{2} x^2 = E \quad (\text{定数})$$

$\dot{x}$  について解くと

$$\dot{x}(t) = \pm \sqrt{2E - \omega^2 x(t)^2}$$

ここで  $x(t) = \sqrt{2E\omega^{-2}} Z(t)$  とする.

$$\dot{Z} = \pm \omega \sqrt{1 - Z^2}$$

$\dot{Z}(0) = Z_0 > 0$  ならば

$$\begin{aligned}\int_0^t \omega dt &= \int_{Z_0}^Z \frac{dZ}{\sqrt{1 - Z^2}} \\ &= \sin^{-1} Z - \sin^{-1} Z_0\end{aligned}$$

よって

$$Z(t) = \sin(\omega t + \alpha)$$

ただし  $\alpha = \sin^{-1} Z_0$ .

したがって

$$x(t) = \sqrt{2E\omega^{-2}} \sin(\omega t + \alpha)$$

は元の方程式を満たす. ここで,  $x(0) = \sqrt{2E\omega^{-2}} \sin \alpha$ ,  $\dot{x}(0) = \sqrt{2E} \cos \alpha$ .

初期条件が一意的に決まるかどうか, よく研究されていた.

### 3

ケプラーの話に移る. ケプラーが惑星の運動をどう考えたか見ていく.

太陽のようにとにかく重い, 不動の物体を 3 次元空間  $\mathbb{R}^3$  の原点に置いたとする. 点

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  では万有引力の法則による力が働く.

成り立つ微分方程式は

$$\ddot{x} = -\frac{k}{\|x\|^3} x$$

と表される.  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ ,  $k = GM$  (万有引力定数  $G$  と太陽の質量  $M$  の積) とする.

この解を求める問題を Kepler 問題という. 初期条件  $x(0)$ ,  $\dot{x}(0)$  は一意的に決まると仮定しておく.

座標軸の回転 (直交変換)  $R$  とする. 変換で長さは変わらないので

$$\|Rx\| = \|x\|$$

$x = R\hat{x}$  とすると方程式は

$$\begin{aligned} R\hat{x} &= -\frac{k}{\|\hat{x}\|^3} R\hat{x} \\ \hat{x} &= -\frac{k}{\|\hat{x}\|^3} \hat{x} \end{aligned}$$

運動は回転によって不変であることがわかる.  $x(0)$ ,  $\dot{x}(0)$  が張る平面,  $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ -平面をとっておくと, 運動は平面の運動ということになる.

方程式

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} = -\frac{k}{\|x\|^3} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

を 2 次元に落として構わない. つまり,

$$\ddot{x}_i = -\frac{k}{\|x\|^3} x_i$$

と表される. ここで,  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ .

単振動のときと同様に  $\dot{x}_i$  をかけて積分して

$$\frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{k}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = E \quad (\text{定数})$$

を得る.

極座標  $(r, \varphi)$  を考える.  $\begin{cases} x_1 = r \cos \varphi \\ x_2 = r \sin \varphi \end{cases}$  を  $t$  の関数だと考えて

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} &= \dot{r} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} + r\dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} &= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで,  $\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = -\frac{k}{r^2} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$  に注意すると, 方程式は

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 &= -\frac{k}{r^2} \\ 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} \left( = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) \right) &= 0 \end{aligned}$$

となる. 第 2 式は  $r^2\dot{\varphi}$  が解に沿って変化しないことを意味する. (質点  $P$  と原点  $O$  を結んだベクトルの通過する部分の面積の変化率)

$$r^2\dot{\varphi} = C \quad (\text{定数})$$

第 1 式に代入して

$$\ddot{r} = \frac{C^2}{r^3} - \frac{k}{r^2}$$

両辺に  $r$  をかけて積分して

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + U_C = E \quad U_C = \frac{C^2}{2r^2} - \frac{k}{r}$$

単振動のときと同様に

$$\int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{2(E - U_C)}} = t$$

$r(t)$  は左辺の逆関数 ( $\dot{r}(0) > 0$ ),  $\varphi$  は  $t$  の関数として不定積分で表される.

四則演算, 逆関数, 微分, 不定積分を使って解を求めることを求積法という. 2 体問題の場合は求積法で解ける. 3 体問題の場合, 求積法では解けないことが分かっている.

$r = \frac{1}{\rho}$  とする.  $C \neq 0$  と仮定する.  $r^2\dot{\varphi} = C$ .

微分すると

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = -C \frac{d\rho}{d\varphi}$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -C \frac{d^2 \rho}{d\varphi^2} \frac{d\varphi}{dt} = -C^2 \rho^2 \frac{d^2 \rho}{d\varphi^2}$$

となる.

$$\ddot{r} = \frac{C^2}{r^3} - \frac{k}{r^2}$$

$$\frac{d^2 \rho}{d\varphi^2} + \rho = \frac{k}{C^2}$$

これを解いて

$$\rho(\varphi) = A \cos \varphi + B \sin \varphi + \frac{k}{C^2}$$

となる. ここで,  $\rho(0) = A + \frac{k}{C^2}$ ,  $\dot{\rho}(0) = B$ .  
 $r$  は次のように表される.

$$r = \frac{1}{\rho} = \frac{P}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

ただし,  $P = \frac{C^2}{k}$ ,  $e = \frac{C^2}{k} \sqrt{A^2 + B^2}$  とする.

角度  $\varphi_0$  回転するとき  $\begin{cases} x = r \cos(\varphi - \varphi_0) \\ y = r \sin(\varphi - \varphi_0) \end{cases}$ .

すると

$$(1 - e^2)x^2 + 2Pex + y^2 = P^2$$

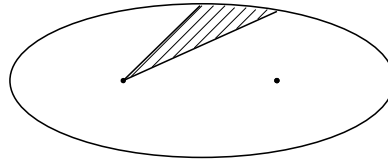
これは 2 次曲線の式である.  $0 < e < 1$  のとき楕円,  $e = 1$  のとき放物線,  $e > 1$  のとき双曲線となる.

ケプラーは以下の 3 法則を定式化した. 最後にそれを列記する.

- ケプラーの第 1 法則 …… 惑星は太陽を焦点とする楕円軌道を描く.

以前は円運動ではないかと考えられていた. ティコ・ブラーエの残した膨大な天体観測記録をもとにケプラーが数学的思考を行った結果もたらされた.

- ケプラーの第 2 法則 …… 面積速度一定の法則.



先程の式を整理すると

$$\frac{(x + ae)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \left( \begin{array}{l} a = \frac{P}{1-e^2} \\ b = \frac{P}{\sqrt{1-e^2}} \end{array} \right)$$

楕円になるのは  $0 < e < 1$  のときなので  $a(1 - e) \leq r \leq a(1 + e)$ .

$$\dot{\phi} = Cr^{-2}$$

- ケプラーの第 3 法則 …… 周期の 2 乗は楕円の長半径の 3 乗に比例する.

惑星が太陽の周りをまわる周期を  $T$  とする.  $T$  は楕円の面積  $\pi ab$  を面積速度  $\frac{C}{2}$  で割ったもの.

$$T = \frac{\pi ab}{\frac{C}{2}}$$

$$T^2 = \frac{4(\pi ab)^2}{C^2} = \frac{4\pi^2 P}{C^2} = \frac{4\pi^2}{k} a^3$$