

特別論説



情報処理最前線

広がるカオスの応用可能性†

徳 永 隆 治†

1. カオスとその諸相

1.1 カオスと応用可能性

カオスとは決定論的規則の反復によって生成される乱雑な振舞いである。ここで言及する規則とは、常微分、差分および偏微分方程式系などの力学系に限らず、実数を対象とした再帰的な数値計算アルゴリズムとも考えてよい。すなわち、カオスは、天体、気象、生態、生体、化学、電気、機械といった実在系や工学的ハードウェアのみに固有の現象でなく、コンピュータの中に構築された情報処理系にも等しく現れる現象である。工学的な例を挙げれば、「故障あるいは調整不良による電気・機械系の不安定化」あるいは「不適切な係数の選択による数値計算法の不安定化」などはカオスの発生と密接な繋がりをもっている。しかし、厳密に安定性を要求する従来の工学的価値観は「不安定化の機構」あるいは「不規則振動の構造」の解明に意義を見いださず、これらを守る方法にのみ注意を払ってきた。

他方、自然科学一般においてカオス現象が注目され、その諸相が理解されるにつれてこの不規則な現象の重要性と意義が指摘され始めた。1960年代には気象学者 E. N. Lorenz が気象現象の長期予測不可能性¹⁾を、1970年代には物理学者 M. J. Feigenbaum が普遍定数の存在²⁾を、1980年代には実験生理学者 W. J. Freeman が兎の脳におけるカオスの存在³⁾を指摘し、1990年代には大規模プラントから経済システムに至るまでその不規則変動がカオスとの関連で検討されつつある^{4), 5)}。これら一連の流れは、カオス現象の普遍性と重要性を指摘するのみならず、その応用可能性を強く印象

づけている。たとえば、細胞から組織に至るさまざまな生体カオスの発見によって「カオスとは生体系をより安定に存続させるために不可欠な機能である」という仮説が報告され、「カオスが不安定で無用な現象である」という工学における印象を修正しつつある。また、1980年代後半から応用数学あるいは物理学を中心としたカオス現象の積極的応用が検討され始め、米国においていくつかのベンチャービジネスが誕生している。そこで、本稿はカオス現象の基礎概念に触れつつ、広がるカオスの応用可能性について解説していく。

1.2 さまざまなアトラクタ

カオスは、決定論的規則の時間発展により生じる複雑な挙動と構造である。ここでは、実平面を相空間とする差分力学系のありさまを考えてみる。差分力学系を支配する規則とは平面上の状態を別の状態に移す変換 $F: \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}^2$ で記述される。すなわち、ある状態 x_0 を初期条件として選択し、変換を施すと次の状態 $x_1 = F(x_0)$ が得られる。これを再度変換すると、新たな状態 $x_2 = F(x_1)$ が得られ、以降、再帰的に変換を繰り返すことで軌道

$$x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow \dots$$

が構成できる。このような軌道は、周期軌道、準周期軌道そしてカオスと三つの種類に大別できる。

A. 周期アトラクタ 最も簡単な振舞いとは、確定した時間経過の後に同一の状態が再び現れる周期的挙動である。仮に、相空間において m 個の異なる点が現れたなら、軌道は m 周期的であり、

$$\begin{aligned} x_n &\rightarrow x_{n+1} \rightarrow x_{n+2} \rightarrow \dots \rightarrow x_{n+m} \\ &= x_n \rightarrow x_{n+m+1} = x_{n+1} \rightarrow \dots \end{aligned}$$

のように振動する。たとえば、 x 上の変換として遅延ロジスティック写像⁶⁾

$$F_p(x, y) = (y, \beta y(1-x) + \alpha x) \quad (1)$$

† Applicable Chaos by Ryuji TOKUNAGA (Institute of Information Science and Electronics, University of Tsukuba).

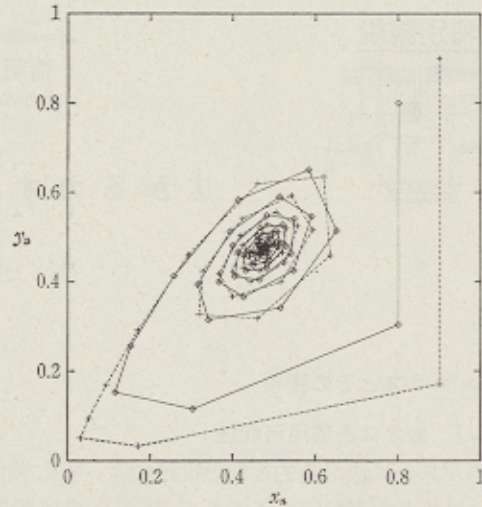
†† 筑波大学電子・情報工学系

(ただし, $p=(\alpha, \beta)=(0, 1.9)$) を考える. 図-1 (a) は二つの異なる初期条件から得られる軌道であり, 図-1 (b) はこれらに対応する時間波形 (x 成分) である. 二つの軌道ともにある 1 周期軌道へと収束している. ここで, 初期条件に依存した系の振舞いを余すところなく検討してみたいが, すべての初期条件を吟味するのは大変である. そこで, 図-1(c) のように変換(1)で正方形 $R=[0, 1] \times [0, 1]$ 上の像 (SIDBA 標準画像データ/レナ) 全体を何度も変換し, 時間発展に従って R 上のどこに軌道が現れるのかを観察してみる. 像は変換のたびに回転しつつ縮小されて徐々に局在化していき, 最終的に一点へと潰れてしまう. 言い換えるなら, R 上の軌道は初期値に依存することなくただ一つの点に収束することになる. このような変換の縮小性は系の安定性を意味し, その像の極限はアトラクタと呼ばれる. すなわち, 変換(1)は 1 周期アトラクタを生成したわけである.

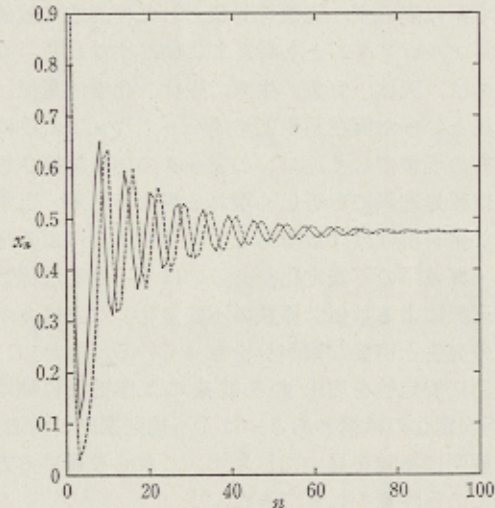
B. 準周期アトラクタ 変換(1)において $(\alpha, \beta)=(0, 2.1)$ と設定すると, より複雑な挙動が観察できる. 図-2 に示されるように対応する軌道の時間波形は周期的にも見えるが, 相空間中では閉ループを描き出している. 周期軌道よりも少し複雑なこの振舞いは準周期軌道と呼ばれ, この場合もやはりアトラクタ (準周期アトラクタ) が存在している. 図-2(c) を観察すると R 上の周辺に位置する部分は変換で縮小されるが, 内部は拡大されることが分かる. よって, 像全体は時間経過に従って回転しつつ内部および外部から徐々に閉曲線へと漸近し, 最終的にこれに収束する.

C. ストレンジアトラクタ 変換(1)には, 像を回転, 縮小, そして拡大する機能が備わっていたが, 不規則な現象であるカオスを発生するには像を折り曲げるための強い非線形性が必要になる. そこで, 次の例

$$F_p(x, y) = \begin{cases} (\delta x, 3\eta y) & \text{for } 0 \leq y < \frac{1}{3} \\ \left(\left(\delta x - \frac{1}{2} \right) \cos \pi(3y-1) + \frac{1}{2}, \right. \\ \quad \left. -\eta(1-2\delta x) \sin \pi(3y-1) \right) & \text{for } \frac{1}{3} \leq y \leq \frac{2}{3} \\ (1-\delta x, 3\eta(1-y)) & \text{for } \frac{2}{3} < y < 1 \end{cases} \quad (2)$$



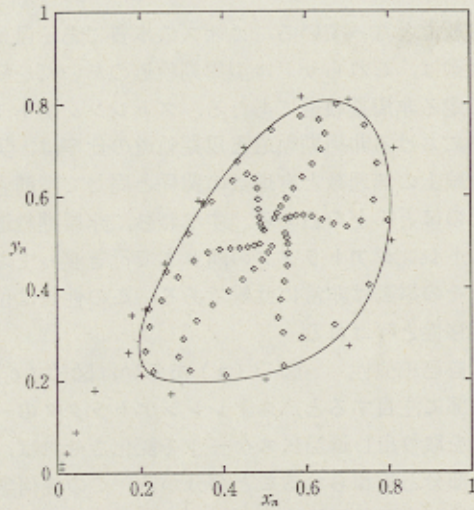
(a) (x, y) 空間における軌道
実線 $(x_0, y_0)=(0.8, 0.8)$ 破線 $(x_0, y_0)=(0.9, 0.9)$



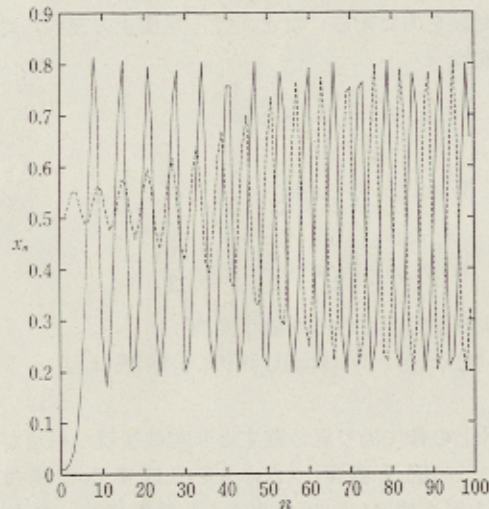
(b) 時間波形 (n, x_n)
実線 $(x_0, y_0)=(0.8, 0.8)$ 破線 $(x_0, y_0)=(0.9, 0.9)$



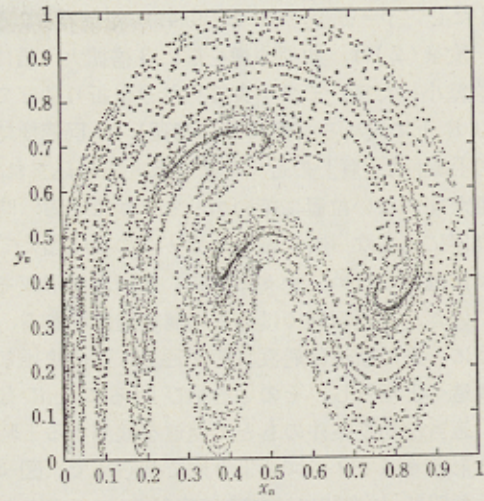
(c) 正方形上の像の反復変換
左上から 0, 1, 2, 3, 4, 6, 10, 30 回反復
SIDBA 標準画像データ "lena" 使用
図-1 変換(1)の生成する 1 周期アトラクタ
 $((\alpha, \beta)=(0, 1.9))$



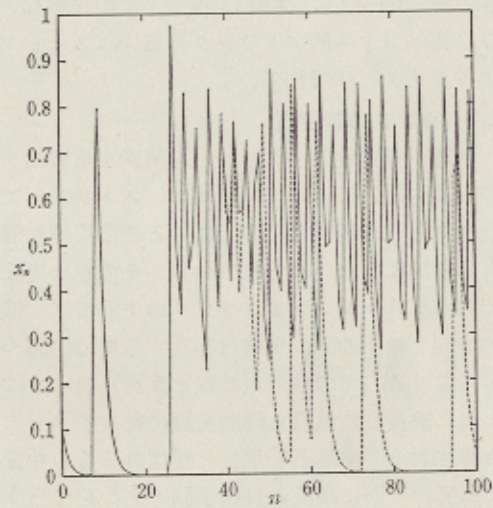
(a) (x, y) 空間における軌道
 + $(x_0, y_0)=(0.01, 0.01)$ □ $(x_0, y_0)=(0.5, 0.5)$



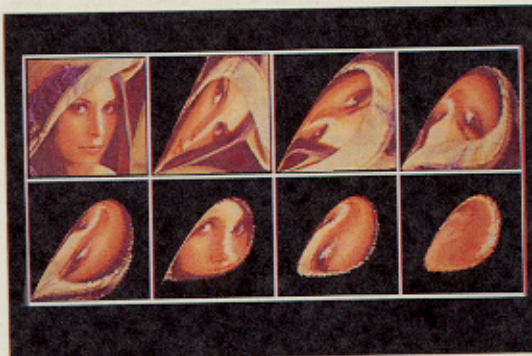
(b) 時間波形 (n, x_n)
 実線 $(x_0, y_0)=(0.01, 0.01)$ 破線 $(x_0, y_0)=(0.5, 0.5)$



(a) (x, y) 空間における軌道 $(x_0, y_0)=(0.1, 0.1)$



(b) 時間波形 (n, x_n)
 実線 $(x_0, y_0)=(0.1, 0.1)$ 破線 $(x_0, y_0)=(0.1001, 0.1)$



(c) 正方形上の像の反復変換
 左上から 0, 1, 2, 3, 4, 6, 10, 30 回反復
 SIDBA 標準画像データ "rena" 使用

図-2 変換(1)の生成する準周期アトラクタ
 $((\alpha, \beta)=(0, 2.1))$



(c) 正方形上の像の反復変換
 左上から 0, 1, 2, 3, 4, 6, 10, 30 回反復
 SIDBA 標準画像データ "rena" 使用

図-3 変換(2)の生成するストレンジアトラクタ
 $((\alpha, \beta)=(0, 1.9))$

(ただし, $p=(\delta, \eta)=(0.49, 0.41)$) を考えてみる. 変換(2)は, 初期の像を縦に3倍拡大, 横に δ 倍縮小した後, その中央で弓なりに折り曲げて再びR上に収める(図-3(c)参照). 1回変換で像の「頭」は「肩」の近くにまで深く折り込まれ, 軌道が届かない位置に細いスリットができる. 時間発展にともなって, 細いスリットの数が増えて個々に延びるため, 徐々に細長い層構造が形成されていき, その極限では無限の層構造が現れる. ゆえに, 系の軌道は過渡状態を通じてこの複雑な層構造へと漸近し, その中を飛び回ることになる. 適当な初期条件のもとで軌道を観測すると時間波形はまるでノイズのようにでたらめで(図-3(b)参照), 相空間には非常に複雑なアトラクタが現れる(図-3(a)参照). 現在, この複雑なアトラクタはカオスのアトラクタあるいはストレンジアトラクタと呼ばれている.

1.3 カオスの諸性質

A. 軌道不安定性 エネルギーを消費する要素をもつ散逸力学系において, カオスはストレンジアトラクタとして現れる. ゆえに, その非周期軌道は有界領域に閉じ込められており, その意味で安定である. ストレンジアトラクタの内部には, 拡大的方向と縮小的方向が常に存在するため, 図-3(b)における二つの軌道(波線と実線)のようにどんなに隣接した軌道も時間発展に従って徐々に引き離される. 軌道不安定性と呼ばれるこの性質によって, いかに精度の良い予測モデルを作ろうともカオスの挙動を長期に予測することは不可能と考えられる.

B. 位相推移性 ストレンジアトラクタは有限周期をもつ可算個(整数と同数)の周期軌道を含んでおり, そのすべてが縮小的方向と拡大的方向を合わせもつサドル型周期軌道となっている. 一般に, 周期軌道は次の3種類に大別される. 第一に, 周期アトラクタであり, その周囲で線形化された変換は縮小的方向しかもたない. このため, 近傍の軌道は時間の経過に従ってこれへと収束する. 第二に, 周期リペラと呼ばれる周期軌道であり, これには拡大的方向しか存在しない. ゆえに, 時間を反転することで周期アトラクタとして扱うことができる. ところが, 第三のサドル型周期軌道は, 縮小的な方向と拡大的方向が混在するために, 順と逆のいずれの時間においても不安

定な軌道となっている. カオスの本質である乱雑な挙動は, これらサドル型周期軌道のあいだを縫って走る非周期軌道にあたる. ストレンジアトラクタにおける非周期軌道と周期軌道の比率は, 実数直線上の無理数と有理数の関係と同じで, 前者がそのほとんどを占める. すなわち, 非周期軌道はストレンジアトラクタの隅々まで行き渡っており, その挙動は非常に乱雑である. この性質は位相推移性と呼ばれる.

C. 自己相似性 図-3(a)あるいは図-3(c)の細部に注目すると, ストレンジアトラクタの一部分を取り出し適当にスケールを変化させれば, 別の部分と重ねられることが分かる. この幾何学的特徴は自己相似構造と呼ばれ, 1970年代に B. Mandelbrot が指摘したフラクタル幾何学の一つの定義をあたえる. たとえば, 平面上の三つの縮小変換

$$W_1(x, y) = \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y \right),$$

$$W_2(x, y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}y \right),$$

$$W_3(x, y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \right)$$

によって定義される弱縮小変換³⁾

$$\Omega(x, y) = W_1(x, y) \cup W_2(x, y) \cup W_3(x, y)$$

(3)

をR上の像に繰り返し施すと非常に複雑な構造が現れる(図-4参照). カオスを生成する機構は「像を引き伸ばし, 折り曲げる」効果によって複雑さを生みだすが, この場合は「像の数を増やす」ことで複雑さを生みだす. 特に, 変換(3)によって生みだされる像は, 至る所に完全な自分自身の縮小像をもつことから大域自己相似構造と呼ばれる. これに比してストレンジアトラクタは, 位置およびスケールに依存するさまざまな自己相似構造をもつことからマルチフラクタルと呼ばれる.

D. 分岐現象 変換における係数値が変化するとそれに応じて生成されるアトラクタの質も変化する. ゆえに, 係数空間では, 周期, 準周期およびカオスなどのさまざまなアトラクタが係数値の変化にともなって相互に移り合う分岐現象³⁾が発生する. 図-5は, 変換(1)の (α, β) 係数空間上で周期アトラクタが観察できる領域だけを塗り分

けた地図 (分岐図) であるが、非常に複雑な位置関係で幾種類ものアトラクタが存在する。この係数空間における複雑さは、カオスの力学系における挙動の豊かさを意味すると同時に、一般的な設計理論が困難であることを暗示している。

2. 応用の実際

ここでは、カオスがいかに応用されつつあるのか、いくつかの実例を従来法と対比しつつみていく。また、一見しては相互独立に見えるカオス応用技術が本質的な数論的基盤に深く根ざしていることを指摘し、基礎研究の重要性を強調してみたい。

2.1 摂動によるカオス制御

制御理論は、制御対象となる動力学系に制御器を結合することで本来の力学系に備わった特性を矯正して相空間の目標値にアトラクタを実現する方法を与える。また、系の状態を「より短い過渡時間で目標値に収束させる」ことを目的とする。しかし、制御理論を与える手法は人為的に設計・構成された工学系に対して有効であるものの、生体振動系あるいは化学反応系のような実在系に対しては「系に固有の構造や機能を変質あるいは破損させる危険性」をとまなっていることは否めない。これに対し、Otto, Grebogi および York によって提案されたカオス制御理論 (OGY 法) は、カオスの力学系に適当な微小摂動を加えることで周期軌道のチューブ状近傍に状態を捕捉する方法を与える¹⁰⁾。

この手法の大きな特徴は、系の本来の構造を矯正するのではなく、これを巧みに利用することにある。ストレンジアトラクタの内部には多種多様なサドル型周期軌道が存在するため、非周期軌道はあるサドル型周期軌道の安定方向に沿って漸近し、不安定方向に沿って離れていく過程を継続する。また、非周期軌道はアトラクタの隅々まで行き渡っているために、時間さえかければいかなる周期軌道の近傍にも到達しえる。そこで、非周期軌道が与えられた評価を適度に満足する周期軌道の近傍に到達した時点でその位置をターゲットとして記録する。次に、非周期軌道が再びそこへ巡ってくるまで待ち、近傍に再来した時点で制御を開始する。具体的には、軌道がターゲットの不安定方向に沿って逃げられないように定期的に摂動を

加えて状態を安定方向へ跳躍させてターゲットへ引き戻すわけである。

OGY 法は制御の開始から完了までかなり長い過渡時間を要求する。このために不規則な振動でただちに破損をきたす工学系には適用ができない。また、既存の工学系は設計段階でカオスを避けて設計されておりカオスの制御が必要となる系は、その解析および制御が困難な大規模 (高次元) 系である場合がほとんどである。OGY 法はほどほどの精度でターゲットを記録し、その安定方向を算定して摂動を加えねばならない制約上、現時点では大規模システムへの適用には多くの困難をとまなっている。しかしながら、これが小自由度の力学系に対する巧みな制御原理であることは確かであり、カオス素子、あるいはカオスを利用した情報処理機構の設計に大きく寄与するものと思われる。

2.2 弱縮小変換とフラクタル画像符号化法

従来法の代表であるベクトル量子化法あるいは直交変換 (KL, DCT, アダマール変換) による濃淡画像符号化法は、一枚の画像データを小ブロック (画像ブロック) に分割し、ブロック上の輝度分布を高次元線形空間における位置ベクトルとみなす。画像を構成するこれら位置ベクトルの集合は、この空間の中でさまざまに分布するが、純粋に乱雑ではない画像データでは必ず片寄りが存在する。この片寄りの存在は無変換な元画像データの冗長性を意味し、これを巧みに取り出すことで画像データを効率的に圧縮することができる。まず、ベクトル量子化法はほぼ同方向で等長な位置ベクトルをいくつかのグループに分類し、各グループに属すベクトルをその代表で置き換えてデータを削減する。また、直交変換による符号化法では、位置ベクトルを拘束する部分空間を探し、部分空間への射影を用いてデータを削減する。

他方、M. Barnsley らが提案したフラクタル画像符号化法^{11)~13)}は、画像曲面を一つのフラクタル曲面と仮定し、部分自己相似構造に基づいてこれを記述しデータ量を削減する手法である。部分自己相似構造とは、大域自己相似構造を拡張した概念であり自分自身の一部分を縮小して得られる像を複数張り合わせることで、自分自身が定義できるパターンを意味する。たとえば、ある画像

データが部分自己相似構造であると仮定すると、ある画像ブロック(値域ブロック)を拡大したブロックが元画像のどこかに隠れていることになる。そこで、値域ブロックをうまく近似する大ブロック(変域ブロック)を探索し、変域ブロックを用いて値域ブロックを生成するための縮小変換を符号とする(図-6参照)。元画像を近似するフラクタル曲面は、これらの縮小写像で構成される弱縮小変換のアトラクタとして蓄えられているため、任意の画像データに対して弱縮小変換を反復することでこれを復元できる(図-7参照)。これと Huffman 符号化法および予測符号化法を併用した方式のパフォーマンス(圧縮率および歪率)は JPEG と同等程度であるが、ブロック歪みが低いという特徴のため主観評価においてまさることが報告されている。フラクタル画像符号化法のパフォーマンスは符号化過程における変域ブロックの探索数に強く依存し、探索時間(計算量)が画質を決定するという画質と符号化時間のジレンマ¹³⁾が発生する。これに関して符号化器を高度に並列化して計算速度を向上させる以外に解決策が見いだされていない。また、たった一つの変換を記述する符号にエラーが発生した場合でも、変換の反復時に画像全体に歪みが拡散する危険性がある。以上の意味で、実時間の処理を要求し、送信時に符号のエラーが発生する通信技術への適用には多くの問題が残されている。しかし、復元過程に要する計算時間は符号過程に対して十二分に少なく、既存の PC 程度の計算能力で支障はない。また、従来法は画像が復元されるまでは拡大、縮小、変形などの画像データの加工を施すことができず、復元と加工の過程を独立に処理する必要があるが、フラクタル符号化法は、復号(縮小変換)と加工のための変換を合成し反復することで加工された画像を単一の処理で得られる。加えて、反復回数を増すだけで解像度をいくらかでも上げることができるという利点をもつ。以上から、フラクタル画像符号化法は、高圧縮した画像データを実時間でさまざまに加工して高度利用をする必要がある、ゲームソフトあるいはインタラクティブムービーなどのマルチメディア出版の開発支援技術として十分に期待できる。

2.3 非周期的同期現象とカオス通信

工学において利用される非線形現象の好例に同

期現象(共鳴、共振現象)がある。少々、古い事例になるが、レコードプレーヤの回転数調整機構に利用されたストロボが直観的に分かりやすい。プレーヤに据え付けられたストロボが一定間隔で発光しターンテーブル側面における等間隔のマークを照らすようになっている。ここでターンテーブルの回転数を変化させていくとマークの流れが静止してみえる値が繰り返して現れる。これが回転数とストロボの振動数が有理比となった同期状態である。この同期状態からほんの少し回転数をずらせば、再びマークは滑り出し非同期状態(準周期状態)となる。さて、ターンテーブルとストロボの間には結合がないことに注意する。他方、結合された発振機構においてはお互いが同期状態に推移しようとする性質が強くなる。たとえば、二つの柱時計の振動数を無理比に調整しておいても、同じ壁面に固定すると容易に同期状態に推移する。この同期状態は非常に安定であり、外乱によって制御変数が変化しても簡単に準周期状態に推移することはない。この安定な現象を工学的に利用したのが、各種同期機や FM 復調である。

このような同期現象の発生は周期的振動系にしか確認されていなかったが、1990年に L. M. Pecora¹⁴⁾らは、ある力学系が発生した非周期的信号を類似した力学系に注入すると同期現象が発生することを報告した。この性質を利用することでビット列を非周期的信号に変換し送信できる。

たとえば、変換(2)によって構成された差分力学系

$$(x_n, y_n) = F(p; x_{n-1}, y_{n-1})$$

に対してカオスを発生させるための二つの異なる係数値

$$p_0 = (\delta_0, \eta_0) = (0.49, 0.41),$$

$$p_1 = (\delta_1, \eta_1) = (0.41, 0.41)$$

を用意する。次に、伝送したいビット列が「001010...」ならば、差分力学系の制御係数を単位時間で「 $p_0 p_0 p_1 p_0 p_1 p_0 \dots$ 」と切り替えつつ $\{y_n\}$ を送信する。受信側は、制御係数 p_0 の時間波形にのみ同期する差分力学系

$$(z_n, w_n) = F(p_0; z_{n-1}, w_{n-1})$$

を用意し、これに伝送されてきた信号 $\{y_n\}$ を対応する変数へ注入することで、非自律差分力学系

$$(z_n, w_n) = F(p_0; z_{n-1}, y_{n-1})$$

を得る。これを動作させて差分 $|y_n - w_n|$ を計算

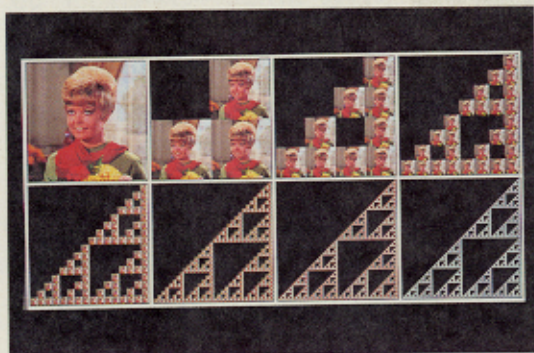


図-4 シェルピンスキーギヤスケット
SIDBA 標準画像データ "girl" 使用
左上から 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 回反復

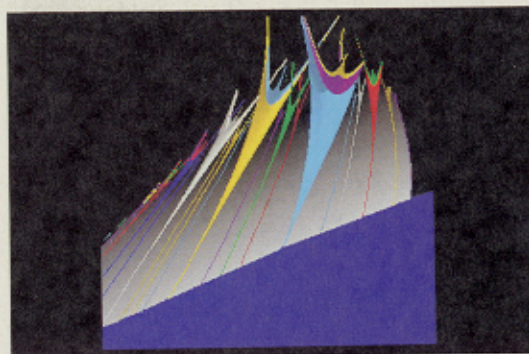
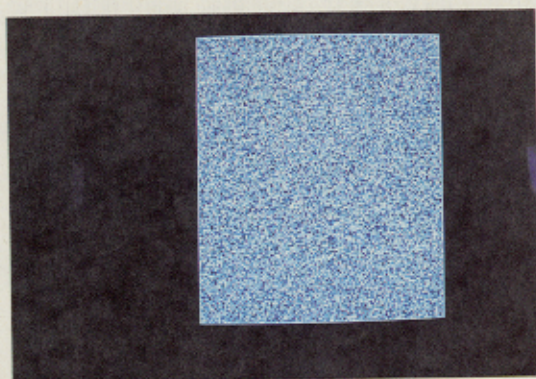


図-5 (α, β) 空間における分岐図

- 青 : 1, 8, 15 周期アトラクタ
- 赤 : 2, 9, 16 周期アトラクタ
- 紫 : 3, 10, 17 周期アトラクタ
- 緑 : 4, 11, 18 周期アトラクタ
- 空色 : 5, 12, 19 周期アトラクタ
- 黄 : 6, 13, 20 周期アトラクタ
- 白 : 7, 14 周期アトラクタ, 21 周期以上の高期アトラクタおよび準周期アトラクタ
- 黒 : ストレンジアトラクタ, 発散, 21 周期以上の高期アトラクタ



(a) 初期画像



(b) 一回変換



(c) 収束した画像

図-7 フラクタル画像符号化法の実例
(SIDBA 標準画像データ "girl")

し同期か非同期かを判定することで、送信側のビット列を復元できる。図-8は、以上二つの力学系を用いた数値実験結果を示している。図-8の上から第3列は、用意されたビット列を表示しており、一つのシンボルに対して50反復だけ同じ力学系を動作させている。第1列は、この規則によって生成された信号 $\{y_n\}$ を、第2列は、信号の差分 $\{-|y_n - w_n|\}$ をそれぞれ示している。信号の差分は、同期状態で0となり、これがビット列の0の位置と対応していることが分かる。第4列は、得られた差分に対して適当なしきい値関数をかけた結果であり、50反復の遅れで表示されている。現在、ハードウェアおよびアルゴリズムの観点からこの原理に基づく通信技術の研究が進行中であり、M系列などの疑似乱数生成法を用いた秘話通信・スペクトル拡散通信との細密な比較検討が待たれている。

2.4 軌道不安定性と非線形予測

1961年に気象学者 E. N. Lorenz が、カオスの軌道不安定性および長期予測不可能性を指摘して以来、カオスと予測問題との関連は興味深い問題として検討されてきた。予測問題とは過去の状態から現在の状態への写像（予測子）の推定法を検討するものである。たとえば、気象予測においては気象現象のスケールに応じた数理モデル（偏微分方程式系）を階層的に組み上げ、実測された気象データを初期条件に用いた数値計算により予測を行う。同様に、工学におけるシステム同定もさまざまな工学系に対する数理モデルを記述し、物理量の実測を通じてモデル係数を決定する。実在系の数理モデルを予測子として利用するこの種の方法は、データの生成源に関する事前知識を多く必要とし、多くの物理量が実測可能でなければならないため適用範囲が限定されている。そこで、音声認識・合成における線形フィルタモデルのように信号源が高階線形差分方程式で記述できることを仮定して、線形予測子を構成する方法が主流である。しかし、散逸をとまな

う線形力学系の不変集合は単一の平衡点だけであるため信号源が決定論的非線形力学系である場合は相空間における解の構造はまったく異なってしまう。これに対し、1980年代後半から従来は確率論の範疇で扱われてきた乱雑な信号が決定論的カオスであるか否かを調査するため決定論的非線形力学系に基づく予測法の研究が進行している。無論、従来からフィルター理論の延長線上で非線形フィルターの研究がなされてきたが、非線形予測

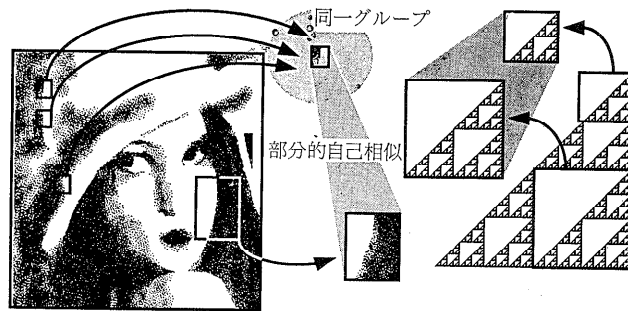


図-6 フラクタル画像符号化法の概略

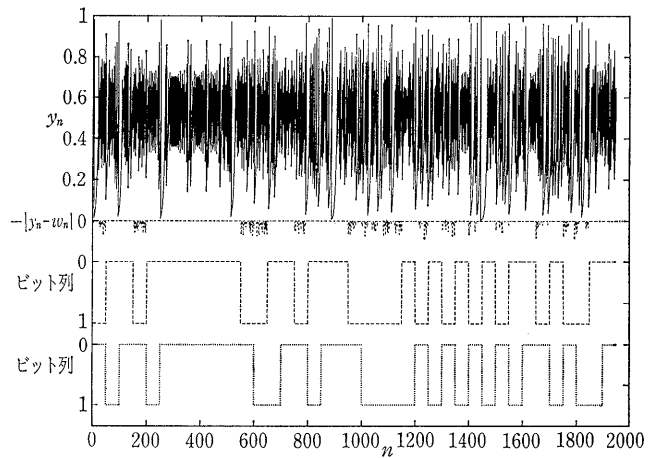


図-8 カオス通信の実例 上から、カオス波形 y_n , 差分 $-|y_n - w_n|$, ビット列, 50反復分遅れて復元されたビット列

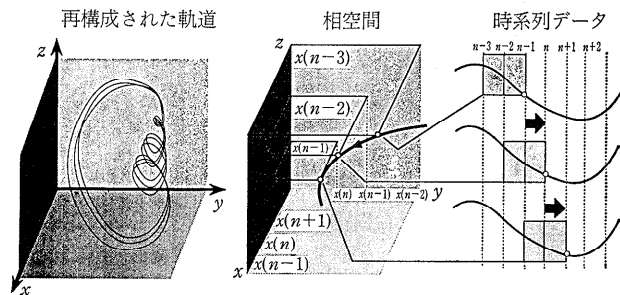


図-9 Takens 再構成の手続き

法は微分幾何学の埋め込み定理にその礎を置く点で方向性が大きく異なっている。1981年に数学者 Takens は、「未知力学系の状態変数が一つでも観測可能であるなら真の軌道と同質な軌道の再構成が可能である」ことを保証する埋め込み(再構成)定理を証明した¹⁵⁾。一般には、図-9のように単一の信号を等間隔にサンプリングし軌道の成分を決定する方法が利用される。また、相空間の次元推定には相関積分による推定法¹⁶⁾、主成分分析による推定法¹⁷⁾、あるいはモデルエントロピによる推定法¹⁸⁾が提案されている。図-10は、上述の方法で3階自律常微分方程式(Rössler方程式)の軌道を再構成した実験結果である。

非線形予測子を構成する第一段階は、埋め込み定理に基づく軌道の再構成であり、第二段階では、再構成された軌道を生成するベクトル場もしくは写像を補間(外挿および内挿)によって推定する。現在、区分的関数近似¹⁹⁾、多層パーセプトロン(ニューラルネットワーク)²⁰⁾、動径基底関数²¹⁾、Schmidtの直交化法²²⁾などのさまざまな非線形予測子の構成法が検討されている。特に、近年はノイズを含む信号から精度よく力学系の推定を行うために、モデルエントロピ¹⁸⁾、ベイズ統計²³⁾、あるいはカルマンフィルタ理論を基礎に検討が加えられている。

従来の線形予測法との比較において重要な点は、予測時間に対する現象の非線形性の現れ方にある。非線形予測法の試金石として差分方程式系が頻りに利用されるが、この場合はほぼ1回の時間発展で十分に非線形性が現れる。しかし、常微分方程式系の場合は少なくとも数十回の時間発展を経なければ、非線形性が強く現れてこない。このため実験条件によっては、線形予測法が有効と判断される場合も少なくない。予測対象となる現象と予測時間に応じて、「いかに線形および非線形モデルを使い分けるか」、あるいは「いかに階層的予測モデルを組み上げるか」が重要な課題となる。

2.5 分岐構造とカオス素子

従来の工学的素子の動作は、線形かあるいは周期的発振を起こすだけの非常に単純なものに限られており、複雑な機能はこれらの素子の組合せで実現されると考えられていた。しかし、単要素子にカオス的動作を許容することで、簡単な素子が

らより複雑な機能を引き出せる可能性がある。

P. Davis は、遅延レーザフィードバック系の分岐構造を巧みに利用した多機能素子を提案している²⁴⁾。この素子の形式は、一階常微分方程式と同等の簡潔さをもつが、過去の状態が遅延をともなってフィードバックされるため無限次元微分方程式系で支配される。このため、相空間における現象は非常に複雑で、多数の周期アトラクタの共存現象が発生する。これらの周期アトラクタは、

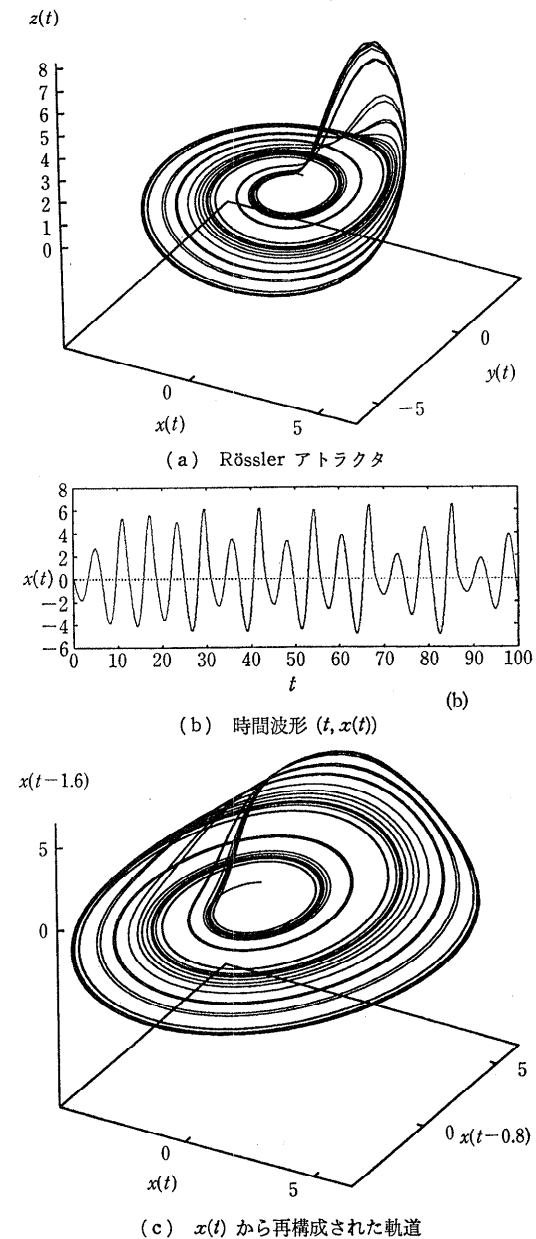


図-10 Rössler 方程式(3階常微分方程式)を用いた軌道再構成の実例

係数値の増大とともに徐々にカオス化し、近傍に位置するカオスから統合されて一つの大きなカオスとなる。言い換えるなら、カオスを上層とし周期アトラクタを下層とする木構造が形成されており、下層の周期アトラクタをメモリとして利用することで上層のカオスを使用した効率の良い記憶の検索が可能になる。P. Davis は、この機構を通信多機能スイッチへ応用している。

また、都甲は模擬生態膜を利用したカオスセンサ素子を提案している²⁵⁾。模擬生態膜は電気化学的機構によって自励発振する動力学系であり、溶液の化学的組成の変化にともなってさまざまな分岐現象を起こす。この特性を利用することで、系の発振状態によって溶液の化学的組成を分類し、従来にはない表現力をもったセンサ系を構築できる可能性がある。

3. 結 言

OGY 法およびフラクタル符号化法にみられるようにカオス応用の一つの特徴は、「良いものを得るには、それなりの時間を要求する」ということにある。これは、従来の工学的価値観に基づくと好ましいものではないが、視点を手工業に移せば当然のことと考えられる。この意味で、カオス応用はより人間の感性や感覚に近い部分を目指としている。無論、これらの応用原理はいまだプリミティブであり、「試行錯誤の中で経験を蓄え、これをもとに推論し、より良い状態へ推移する」といった知的機構にはまだ遠いのが現状である。これに関して、多くの研究者の興味がカオスの自己組織あるいは学習に注がれており、ニューラルネットワーク、遺伝アルゴリズムあるいは人工生命の枠組みで研究が進行している。

本記事で紹介した独創的な応用原理のすべてはここ数年に報告されたものであり、現在もなお多くの試みがなされている。しかし惜しむべきことは、そのほとんどが工学的問題意識をもつ応用数学者あるいは物理学者によって提案されたものであり、工学者のほとんどは提案された原理の改良に携わっているという事実である。カオスという非線形現象には掘り尽くせないほどの応用可能性が埋まっているが、これを掘りあてるには深い工学的問題意識が不可欠である。ゆえに、多くの工学者が個々の問題意識のもとでカオスと向かい合

う機会さえあるなら、その応用可能性は飛躍的に高まると考えられる。

参 考 文 献

- 1) Lorenz, E. N. : Deterministic Nonperiodic Flow, *J. Atmos. Sci.*, 20, 130 (1963).
- 2) Feigenbaum, M. J. : The Universal Metric Properties of Nonlinear Transformations, *J. Stat. Phys.* 21, 669 (1979).
- 3) Freeman, W. J. : Searching for Signal and Noise in the Chaos of Brain Waves, in *The Ubiquity of Chaos*, American Association for the Advancement of Science, 249 (1993).
- 4) 合原幸一, 徳永隆治編著: カオス応用戦略, オーム社 (1993).
- 5) 合原一幸編著: 応用カオス, サイエンス社 (1994).
- 6) Aronson, D. G. et al. : Bifurcations from an Invariant Circle for Two-Parameter Families of Maps of the Plane : A Computer-Assisted Study, *Communications in Mathematical Physics*, 50, 69 (1982).
- 7) Mandelbrot, B. : *The Fractal Geometry of Nature*, San Francisco, W. H. Freeman and Co. (1982).
- 8) Hata, M. : On the Structure of Self-Similar Set, *Studies in Math. and Its Applications*, 18, 30, 259 (1986).
- 9) Matsumoto, T., Komuro, M., Kokubu, H. and Tokunaga, R. : *Bifurcations*, Springer (1983).
- 10) Ott, E. et al. : Controlling Chaos, *Phys. Rev. Lett.*, 64, 11, 1196 (1990).
- 11) Barnsley, M. F. : *Fractals Everywhere*, Academic Press (1990).
- 12) Barnsley, M. F. and Hurd, L. P. : *Fractal Image Compression*, AK Peters, Ltd. (1993).
- 13) 徳永隆治: フラクタル, ジャストシステム (1994).
- 14) Pecora, L. M. et al. : Synchronization in Chaotic Systems, *Phys. Rev. Lett.* 64, 8, 821 (1990).
- 15) Takens, F. : Detecting Strange Attractors in Turbulence, in *Lecture Note in Math.*, 898, ed. by D. A. Rand and L. S. Young, 336, Springer (1981).
- 16) Broomhead, D. S. et al. : *Physica*, 2D, 217 (1986).
- 17) Grassberger, P. et al. : Measuring Strangeness of Strange Attractors, *Physica*, 9D, 189 (1983).
- 18) Crutchfield, J. P. et al. : Equation of Motion from a Data Series, *Complex Systems*, 1, 417 (1987).
- 19) Farmer, J. D. et al. : Predicting Chaotic Time Series, *Physical Review Letters*, 59/8, 845 (1987).
- 20) Lapedes, A. et al. : LA-UR-87-2662, Los Alamos National Laboratory (1987).
- 21) Casdagli, M. : Nonlinear Prediction of Chaotic Time Series, *Physica*, 35D, 335 (1989).
- 22) Jiménez, J. et al. : Forecasting on Chaotic Time Series : A Local Optimal Linear Recon-

- struction Method, Physical Review A, 45/6, 3553 (1992).
- 23) Mackay, D. J. C. : Ph. D Thesis, California Institute of Technology (1992).
- 24) Davis, P. et al. : Constraining Chaos in an Optical Ring Memory Device, Proc. of the 2nd Int. Conf. on Fuzzy Logic and Neural Networks, 2/2, 905 (1992).
- 25) Toko, K. et al. : Taste Sensing System and Chaos, Proc. the 2nd Int. Conf. on Fuzzy Logic and Neural Networks, 2/2, 943 (1992).

(平成 6 年 6 月 28 日受付)



徳永 隆治

昭和 60 年早稲田大学理工学部電気工学科卒業。昭和 62 年同大学院前期課程修了。同年米国加州大学バークレー客員研究員。平成元年早稲田大学理工学部助手。平成 2 年同大学院後期課程修了。同年米国加州大学バークレー客員研究員。平成 3 年筑波大学電子・情報工学系専任講師。工学博士。非線形動力学系におけるカオス・フラクタル・分岐現象の基礎及び応用の研究に従事。著書「フラクタル」(ジャストシステム), 「カオス応用戦略」(編著), 「Bifurcations/Sights, Sounds and Mathematics」(共著, スプリンガーフェアラーク), 「カオス」(共著, サイエンス社), 「フェジー・ニューロ・カオス」(共著, オーム社)他。電子情報通信学会, 電気学会, 日本応用数学会各会員。日本工業振興協会カオス研究委員会委員。電気学会カオス調査専門委員会幹事。Fractal 95 プログラム委員。



