

〈研究論文〉

文化的視座による数学的価値を捉える枠組みの開発

山 崎 美 穂

文化的視座による数学的価値を捉える枠組みの開発

山崎美穂

1. 問題の所在と研究の目的

数学教育学研究では、数学における生徒の好成績に影響を及ぼしているものとして、教師や生徒によって抱かれている価値 (values) への着目がされている。教師は生徒に効果的な数学学習を提供する主体として認識され、効果的な教授・学習において教師はどのような価値を支持しているのか、どのような価値が効果的な教授・学習の背後にあるものとして国や文化で共有されているのが明らかにされている (Lim and Kor, 2012; Law, Wong and Lee, 2012; Baba, Iwasaki, Ueda and Date, 2012)。また、生徒は効果的な数学学習をする主体として認識され、好成績を修める生徒は、どのような価値を抱いているかが明らかにされている (Seah and Peng, 2012; Seah and Wong, 2012)。

このように価値が着目されるようになった背景には、A. J. Bishop (1937-) の研究がある。Bishop (1988) は、西洋の数学教育上の問題点として生徒の限定的な理解や良好でない態度を取り上げ、その実態を引き起こす原因として数学教育で強調されている数学的価値 (Mathematical values) を指摘する。数学的価値を共有する社会文化を「数学的文化 (Mathematical culture)」と捉え、この数学的文化に生徒を引き入れるような数学教育を「数学的文化化 (Mathematical enculturation)」としている。

この研究を受けて、数学的価値は、数学教育に関わる実態や目標の特徴を捉える中心的概念

として位置付けられ、Bishop (1988, 1999) によって示された数学的価値の枠組みは、教科書や授業、指導法などを特徴づけるために用いられている (Cao, Seah and Bishop, 2006; Bishop, Clarke, Corrigan and Gunstone, 2006; 馬場, 2007, 2009)。しかし、Bishop の数学的価値は、包括的で理念的な概念であるが故に、数学教育における目標の特徴を示すには適しているが、教師や生徒がどのように数学的価値を選択し、教授・学習という行為に反映させているかを捉えるには適していない。

授業場面における教師や生徒の行為の背景にある数学的価値を特徴づけるためには、その行為者の判断の視点を加えることが考えられる。すなわち、教師や生徒が数学的価値を抱くには、行為者としてその価値を選択している理由が存在しており、この判断基準とともに数学的価値を捉える必要がある。こうした問題意識から、本研究では、Bishop の数学的価値に判断基準となる行為者の視点を加えることで、行為の背景となる数学的価値を捉える枠組みを開発することを目的とする。

上記の目的を達成するために、まず Bishop の数学的価値を捉える枠組みとそこで挙げられている数学的価値を明らかにする (第2章)。次に、人の行為における判断基準として、価値を選択する行為者の視点を取り入れる必要性を述べる。その上で、数学的価値を選択する行為者の視点として見田 (1966) の選択の基準の類型を参照し、数学的価値を捉える枠組みを新たに開発する (第3章)。そして、九九表の隣り合う2数の和を求める活動を事例に、行為の背景に

ある数学的価値や数学的価値を選択する行為者の視点との関わりを具体的に示し(第4章)、この分析を通して、開発した数学的価値を捉える枠組みの特徴を述べる(第5章)。

2. 文化を構成する要素としての数学的価値

2.1 Bishop の数学的価値を捉える枠組み

数学教育は、数学という文化において用いられている記号体系や概念、また、そこに込められた価値観に子どもたちを導くものである。Bishop(1988, 1999)はこのような数学を文化的な現象として捉えている。文化的な現象としての数学は、客観的で抽象的なものであり人の営みとは独立したものではない。数学は、人と環境及び人と人との関連づける役割を果たし、人の価値観が込められたものとなる。

Bishop は、数学によって人と環境及び人と人との関連づけられている文化を4つの要素からなる構成物として捉えた White(1959)の理論に着目し、数学的価値を明らかにしている。White の文化を構成する要素は次の4つである。

- ・イデオロギー的な要素
(ideological component)
- ・心情的な要素
(sentimental component)
- ・社会学的な要素
(sociological component)
- ・技術的な要素
(technological component)

イデオロギー的な要素には、思想や哲学など、人の考えが該当する。イデオロギー的な要素は行為を生じさせる技術の違いによって変化するため、技術はイデオロギー的な要素を規定する。心情的な要素には、態度や感情など、人の心情が該当する。心情的な要素は行為を可能にする技術の違いによって変化するため、技術は心情的な要素を規定する。社会学的な要素には、社会的なまきまりや慣習の関係など、人と人との関わりの中で構成されるものが該当する。社会学

的な要素は、技術を用いて促進される社会的な過程によってなされるため、技術は社会学的な要素を規定する。技術的な要素には、文化で創造されてきた道具や記号が該当する。技術は人間の推論能力の拡大を可能にするものであり、数学の知識や技能はこれに該当する。

このように、イデオロギー的な要素、心情的な要素、社会学的な要素は、数学の知識や技能によって規定されるため、数学の知識や技能は文化の構成要素として独立して捉えられるのではなく、イデオロギー的な要素、心情的な要素、社会学的な要素の中で捉えられる。よって、文化を構成する要素としての数学的価値の次元は、イデオロギー、心情、社会学の次元で考えると Bishop は述べている。

2.2 Bishop の数学的価値

Bishop は、社会において発生・形成されている数学を「知っていくことの方法」として捉えることで、数学を用いて知っていく際の考え方の根底にある数学的価値を明らかにしている。上記の3つの次元それぞれに2つの相補的な組を位置付け、以下の6種類の数学的価値を挙げている。

- イデオロギーの次元
 - ・合理主義(rationalism)
 - ・物化主義(objectism)
- 心情の次元
 - ・支配感(control)
 - ・進歩感(progress)
- 社会学の次元
 - ・開放性(openness)
 - ・神秘性(mystery)

合理主義は、数学では説得力ある理由・根拠に基づいて論理的な結びつきを作ることで事象を説明するという哲学である。例えば、交換法則、結合法則、分配法則に基づき、式変形をすることによって問題を解決している際に重視される価値である。物化主義は、数学では対象を分析的に捉えた構成物を用いることで事象を説明するという哲学である。例えば、式の表す意

味を捉えることによって問題を解決している際に重視される価値である。支配感は、数学では自然環境または人工的環境における全ての事象を説明することができるという感情である。例えば、規則性のある数列であれば第何項であっても求めることができると感じて問題を解決している際に重視される価値である。進歩感は、数学では既になされた事象の説明を基にすることで新たな事象の説明をすることができるという感情である。例えば、規則性のある数列の第 n 項を求めれば第 $n + 1$ 項を求めることができると感じて問題を解決している際に重視される価値である。開放性は、数学では記号の意味や論理形式を認めれば説明を理解し正しさを確認することができるということを認めるという社会的なきまりの関係である。例えば、等号の意味を理解し、左辺と右辺の等しさを確認しながら式変形をすることによって問題を解決している際に重視される価値である。神秘性は、数学では説明の意味が分からなくとも事象を説明することができるということを認めるという社会的なきまりの関係である。例えば、正しいことの理由は分からなくとも特定の操作をすることによって問題を解決している際に重視される価値である。

Bishop はこれら 6 つの数学的価値のうちで物化主義よりも合理主義を、支配感よりも進歩感を、神秘性よりも開放性を強調する数学教育をすることを目指すべきだと主張している。

3. 選択の基準としての数学的価値を捉える枠組み

3.1 選択の基準としての価値

「価値」の概念に対する多様な用語法や矛盾した考えの存在を指摘し整理を試みた社会学者として、見田宗介 (1937-) がいる。見田 (1966) は、人生の目的の追究や人間の行為の動機の解明に関わる問題に対して価値を取り入れた。ここでは、価値を「主体の欲求をみたま、客体の性能 (p. 17)」と定義している。

この定義にはいくつかの補足が加えてあり、「主体」とは「個人または社会集団である (同

上)」こと、「欲求」とは「あるものを『のぞましい』とする傾向のすべてである (同上)」こと、「みたま」とは「直接的に欲求の対象であればあいのみならず、欲求をみたま手段ないし条件として間接的に『のぞまれる』ばあいをふくむ (同上)」こと、「客体」とは「価値判断の対象となりうる一切のものであって、実在的・非実在的な物体・状態・事件、行為・人間・社会集団、衝動・観念・思想体系などでありうる (pp. 17-18)」ことが説明されている。そして、「性能」は「意識的行為における選択の基準 (p. 17)」として機能することである。よって、価値は、主体の意識的行為における選択の際に、主体が望ましいと判断する客体側に属する基準として機能するものであり、主体が意識することによって客体が有していると認められるものである。

このように、価値は人の行為における選択の基準として働くことから、価値を捉える際には、主体の意識的な選択行為に着目する必要がある。これは数学的価値についても同様であり、数学的価値は数学教育に関わる行為として何を行うかの選択をする際に基準として働くため、行為の直接的な背景としての数学的価値は行為者の選択の基準という視点によって性質が異なる。このため、数学的価値に対しても、行為者の選択の基準を考慮する必要性が生じる。Bishop の枠組みやそれによって示された数学的価値に対して、行為者の視点を取り入れることによって、具体的で実際的に授業場面における教師や子どもの行為の背景を特徴づけることができる。このことは、Bishop が示した 6 つの数学的価値が文化の包括的で理念的な見方を取っていることに対して、より個人的で実際的な見方との関係づけを行うという補完的な役割を果たす。

3.2 選択の基準を決める尺度

選択の基準は、個々の具体的状況によって異なる尺度を用いて決められる。例えば、選択の基準が快楽か苦難かという点にある場合には、「快-苦」の尺度が用いられている。

選択の基準の決定は、単なる「好み」とは異なる。「好み」による行為は欲求へと向かう衝動であるため、意図的な選択行為とはならないた

表 1：選択の基準の類型

時間的な視点

		〈現在〉中心	〈未来〉中心	
社会的な視点	〈自己〉本位	快—苦	利—害	幸福—不幸
	〈社会〉本位	愛—憎	正—邪	善—悪
		美—醜 感情的・観賞的	真—偽 理性的・認識的	

見田 (1966), p. 32より作成

めである。つまり、価値の原点にある直接的な欲求が一度客観化され、行為者の視点によって選択の基準を決める尺度が用いられ、決定される基準によって意図的に価値判断がなされている。このため、何を尺度とするかという行為者の視点によって選択の基準自体の性格が異なる。

このような価値判断における行為者の視点を定めるにあたっては、次の2つの事が前提となる。それは、本来的に人が何か行為をする際には目的に対する手段として行為をすること、その目的は行為者の状況によって異なるということである。行為者の目的と状況は、行為者の〈現在〉の欲求の直接的な充足と〈自己〉の利益の直接的な追求とを相対化させ、〈未来〉または〈社会〉に及ぼす諸結果を顧慮し、その上での行為の選択に影響を与える。したがって、この前提をふまえると、行為者の視点には2つの次元が設定される。

1つ目の次元は、「現在の感情のほとばしるままに身をまかせべきか (p. 27)」または「未来の諸結果にたいする顧慮からそれを抑制すべきか (同上)」という時間的な視点である。この視点は、人間が他の動物と異なり道具をつくる動物であり、〈現在〉の欲求の直接的な充足を相対化することができるために可能となっている。〈現在〉中心の視点の特徴は即時的関心への志向であり、美しいか醜いかという「美—醜」を尺度として「美」を重視する選択行為を導く。〈未来〉中心の視点の特徴は長期的関心への志向で

あり、真実であるか偽りがあるかという「真—偽」を尺度として「真」を重視する選択行為を導く¹⁾。〈現在〉中心の視点は感情的・鑑賞的なものであるのに対し、〈未来〉中心の視点は理性的・認識的なものである。

2つ目の次元は、「自己の利害のおもむくままに行動すべきか (p. 27)」または「他者への諸結果にたいする顧慮からそれを抑制すべきか (同上)」という社会的な視点である。この視点は、人間が他の動物と異なり社会的システムに属する社会的動物であり、〈自己〉の利益の直接的な欲求を相対化することができるために可能となっている。〈自己〉本位の視点の特徴は他者を一定の機能の成就またはその可能性に即してのみ評価し、幸福になるか不幸になるかという「幸福—不幸」を尺度として「幸福」を重視する選択行為を導く。〈社会〉本位の視点の特徴は他者をその本性に対する尊重によって評価し、善いことであるか悪いことであるかという「善—悪」を尺度として「善」を重視する選択行為を導く。

これら2つの次元の組み合わせによって行為者の視点は次のような4類型に区別される (表 1)。第1に、〈自己〉本位・〈現在〉中心の視点から定められるのは、「快—苦」を尺度として「快」を重視する〈快〉価値である。これは「自己の欲求を即時的に充足させる性能 (p. 32)」と言え、快くて現在の自分のためになるか否かという行為者の視点に基づく価値である。第2に、〈自己〉本位・〈未来〉中心の視点から定められ

表 2：数学的価値を捉える枠組み

		時間的な視点		
		〈現在〉中心	〈未来〉中心	
社会的な視点	〈自己〉本位	〈快〉価値	〈利〉価値	〈幸福〉価値
	〈社会〉本位	〈合〉価値	〈正〉価値	〈善〉価値
		〈美〉価値 感情的・観賞的	〈真〉価値 理性的・認識的	

るのは、「利一害」を尺度として「利」を重視する〈利〉価値である。これは「自己の欲求を長期的に充足させる性能 (p. 32)」と言え、打算的に未来の自分のためになるか否かという行為者の視点に基づく価値である。第 3 に、〈社会〉本位・〈現在〉中心の視点から定められるのは、「愛一憎」を尺度として「愛」を重視する〈愛〉価値である。これは「他者ないし社会の欲求を即時的に充足させる性能 (p. 32)」と言え、現在の社会のためになり愛情があるか否かという行為者の視点に基づく価値である。第 4 に、〈社会〉本位・〈未来〉中心の視点から定められるのは、「正一邪」を尺度として「正」を重視する〈正〉価値である。これは「他者ないし社会の欲求を長期的に充足させる性能 (p. 32)」¹⁰と言え、未来の社会のためになり正義であるか否かという行為者の視点に基づく価値である。

3.3 数学的価値を捉える枠組み

このような行為者の視点は、数学的価値を選択する際にも同様に用いることができる。例えば、与えられた問題に対して子どもが解答を考える際、「数学における考え方のきまりに従うことで解答を受け入れられる」と未来の自分のためという視点から筋道だった論理的な説明を用いる行為をなす場合、〈自己〉本位・〈未来〉中心の視点が用いられることが考えられる。これに対し、「問題に対する説明の仕方として適切である」と子どもが感じ、現在の社会のためという視点から筋道だった論理的な説明を用いる行為をなす場合、〈社会〉本位・〈現在〉中心の視

点が用いられることが考えられる。このように、同じ行為の背景であっても、主体である行為者の視点が異なっている。したがって、論理的な説明が有する同じ「合理主義」という数学的価値であっても、行為者の視点によって違いが生じる。行為に影響を及ぼす背景として数学的価値を捉えるためには、行為者の視点の違いを見る必要がある。

次に、数学的価値を捉える際には、見田による行為者の視点は、必ずしも選択の基準として合致するものではない。〈自己〉本位・〈未来〉中心の視点で筋道だった論理的な説明を用いる行為をなす場合には、その視点は打算的であり、「合理主義」という数学的価値は、行為者にとっての〈利〉価値と言える。しかし、〈社会〉本位・〈現在〉中心の視点で筋道だった論理的な説明を用いる行為をなす場合には、その視点は「愛一憎」という尺度ではなく、数学として適切である、または、合っているという感情的・観賞的なものと考えられる。すなわち、「問題に対する説明の仕方として適切である」というように、適切であり現在の社会のためという視点から筋道だった論理的な説明を用いる行為をなすと考えられる。そこで、数学的価値を捉えるための行為者の〈社会〉本位・〈現在〉中心の尺度として「合一反」を採用する。これを「合」を重視する〈合〉価値とする。

以上のことより、表 1 の〈社会〉本位・〈現在〉中心の視点を修正し、4 類型の数学的価値の選択の基準を設定する。数学的価値を捉える

枠組みは、表2のようにまとめる。

4. 行為の背景となる数学的価値

表2で示した数学的価値を捉える枠組みを用いると、Bishopの挙げた数学的価値は行為の背景で影響を及ぼしているものとして特徴づけることができる。以下では、九九表の隣り合う2数の和を求める活動を事例⁽³⁾に、行為の背景にある数学的価値や数学的価値を選択する行為者の視点との関わりを具体的に示す。

4.1 九九表の隣り合う2数の和を求める活動

図1の問題に対して想定される活動について示す。

問題 九九表において、隠された隣り合う2つの数の和(ア)、(イ)、(ウ)を求めましょう。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	(ア)	10	12	14	16	18	
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	(ウ)	
6	6	12	18	(イ)	30	36	42	48	54
7	7	14	21		35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

図1：九九表の隣り合う2数の和を求める問題

【問題の解決場面①】

(ア)を求める際には、隠された部分が2の段の行にある 2×3 と 2×4 であることから、隠された2数の和を $2 \times (3 + 4) = 14$ から14と求める。

【問題の解決場面②】

問題の解決場面①の方法よりも簡単に求める方法として、隠された2数の両側の数を足すことで隠された2数の和を求める。(ア)を求める際には、 $4 + 10 = 14$ から隠された2数の和を14と求める。

【問題の解決場面③】

(イ)を求める際にも、問題の解決場面②の方法を応用する。隠された部分が4の段の列にある 6×4 と 7×4 であることから隠された2数の上下の数に着目して、 $20 + 32 = 52$ から2数の和を52と求める。

【問題の解決場面④】

(ウ)を求める際にも、問題の解決場面②の方法を用いるために、九九表の枠外の部分を補う。隠された部分が5の段の行にある 5×8 と 5×9 であることから、 5×10 を補い、 $35 + 50$ で隠された2数の和は85と求める。

4.2 問題の解決場面①における数学的価値

問題の解決場面①における隠された2数の和を求めるための行為は、2数を個別に求める方法を受けて、2数が隣り合うことに着目した分配法則を使った方法にまとめることである。この行為の背景としては、進歩感という数学的価値が考えられる。

この場合の進歩感は、既に説明された九九表の性質や分配法則を基にすることで、隠された2数の和を求めるという事象について説明することができるという感情である。特に、分配法則でまとめることが教師や子どもの間で認められており授業において正しい行為であると判断した上で、隠された2数の和を求める方法として説明されている場合、〈社会〉本位・〈未来〉中心の視点から進歩感という数学的価値が行為に影響を与えていると捉えられる。なぜなら、隠された2数の和を分配法則で求めるという進歩感を有する行為が、長期的に教師と子どもによって構成される授業進行のためになり正義であるという視点からなされているからである。この場合、進歩感という数学的価値は行為者にとっての〈正〉価値である。

4.3 問題の解決場面②における数学的価値

問題の解決場面②における隠された2数の和を簡単に求めるための行為は、隠された2数を求めることなしに、その両側の2数の和によって求めるため、隠されていない数を使うという簡単な方法を探ろうとするということである。この行為の背景としては、神秘性と開放性という

数学的価値が考えられる。

この場合の神秘性は、隠された2数の両端の数を足すことで隠された数の和を求めることができるという意味が分からなくとも、その方法を用いて隠された2数の和を求めるという事象の説明はできることを認めるといふ社会的なきまりの関係である。特に、必ず正解を求めることができる方法として教師や子ども間で認められることから、この問題の解法として適した方法になっていると認める場合、〈社会〉本位・〈現在〉中心の視点から神秘性という数学的価値が行為に影響を与えていると捉えられる。なぜなら、隠された2数の和を両端の数を足すことで求めるという神秘性を有する行為が、適切であり正解を求めようとする現時点での授業において教師と子どもとの同意を得るためになるという視点からなされているからである。この場合、神秘性という数学的価値は行為者にとっての〈合〉価値である。

また、この場合の開放性は、既習の九九表の性質や計算法則を認めると、両端の数を基にすることによって隠された2数の和を求めるという事象の説明を誰でも理解し正しさを確認することができるという社会的なきまりの関係である。つまり、 $2 \times 2 + 2 \times 5 = (2 \times 2 + 2) + (2 \times 5 - 2) = 2 \times 3 + 2 \times 4$ を理解することによって、誰でも両端の数を基にして隠された2数の和を求めることを理解し、その正しさを確認することができるのである。特に、既習の内容を認めた上に新たな説明を理解することは自分にとって将来においても役に立つと考えている場合、〈自己〉本位・〈未来〉中心の視点から、開放性という数学的価値が行為に影響を与えていると捉えられる。なぜなら、隠された2数の和を両端の数を足すことで求めるという開放性を有する行為が、打算的にこれからの自分の理解のためになるという視点からなされているからである。この場合、開放性という数学的価値は行為者にとっての〈利〉価値である。

4.4 問題の解決場面③における数学的価値

問題の解決場面③における隠された2数の和を求めるための行為は、同一列と同一行にある

数の並びは共に同数累加であることに着目して、隠された2数が同一行である場合の方法を隠された2数が同一列である場合に適応するということである。この行為の背景としては、合理主義という数学的価値が考えられる。

この場合の合理主義は、説得力ある理由・根拠となる乗法の交換法則に基づき、 $2 \times 2 + 2 \times 5 = (2 \times 2 + 2) + (2 \times 5 - 2) = 2 \times 3 + 2 \times 4$ と同様に $5 \times 4 + 8 \times 4 = (5 \times 4 + 4) + (8 \times 4 - 4) = 6 \times 4 + 7 \times 4$ という論理的な結びつきを作ることで、上下に並んだ2数の和を求めるという事象を説明するという考え方である。特に、交換法則に基づくことによって求める方法が教師や子ども間で認められており授業において正しい行為であると判断した上で、上下に並んだ2数の和を求めている場合、〈社会〉本位・〈未来〉中心の視点から合理主義という数学的価値が行為に影響を与えていると捉えられる。なぜなら、隠された2数の和をその両端の数を基にすることによって求めるという合理主義を有する行為が、長期的に教師と子どもによって構成される授業進行や未来の社会のためになり正義であるという視点からなされているからである。この場合、合理主義という数学的価値は行為者にとっての〈正〉価値である。

4.5 問題の解決場面④における数学的価値

問題の解決場面④における隠された2数の和を求めるための行為は、隠された部分が九九表の端にあるときには枠外の部分の数を補うために、10の段まで九九を拡張するということである。この行為の背景としては、神秘性と開放性という数学的価値が考えられる。

この場合の神秘性は、10の段まで九九表を拡張することの意味は分からなくとも、10の段の数を補い両端の数を足すことで隠された2数の和を求めるという事象の説明はできることを認めるといふ社会的なきまりの関係である。特に、隠された2数の和を10の段の数を補い両端の数を足すことで求めることに楽しさを感じて満足感を得ようとしている場合、〈自己〉本位・〈現在〉中心の視点から神秘性という数学的価値が

行為に影響を与えていると捉えられる。なぜなら、隠された2数の和を10の段の数を補い両端の数を足すことで求めるという神秘性を有する行為が、快くて現在の自分のためになるという視点からなされているからである。この場合、神秘性という数学的価値は行為者にとっての〈快〉価値である。

また、この場合の開放性は、既習の九九表の性質の意味や計算法則の論理形式を認めると、九九表の枠外の数を補い両端の数を足すことで隠された2数の和を求めるという事象の説明を誰でも理解し正しさを確認することができるという社会的なきまりの関係である。つまり、 $5 \times 7 + 5 \times 10 = (5 \times 7 + 5) + (5 \times 10 - 5) = 5 \times 8 + 5 \times 9$ を理解することによって、誰でも隠された2数の和をその両端の数を基にして求めることを理解し、その正しさを確認することができるのである。特に、既習の内容を認めた上に新たな説明を理解することは自分にとって将来においても役に立つと考えている場合、〈自己〉本位・〈未来〉中心の視点から、開放性という数学的価値が行為に影響を与えていると捉えられる。なぜなら、隠された2数の和を10の段の数を補い両端の数を足すことで求めるという開放性を有する行為が、打算的に未来の自分のためになるという視点からなされているからである。この場合、開放性という数学的価値は行為者にとっての〈利〉価値である。

5. 数学的価値を捉える枠組みの特徴

5.1 行為の背景としての数学的価値の特徴

九九表の隣り合う2数の和を求める活動における数学的価値の分析では、同じ行為の背景として異なる数学的価値が考えられた。例えば、問題の解決場面②では、神秘性と開放性という数学的価値が考えられた。ただし、行為の背景としての数学的価値はここで挙げた2種類に限らず、6種類のどれでも考えることができる。Bishopによれば、この6種類の数学的価値は、イデオロギーの次元、心情の次元、社会学の次元の3つからなる相補的な2組の価値として特徴づけられているが、行為の背景となる際には、

独立した価値として捉えられる。これは、6種類の数学的価値はそれぞれ「主体の欲求を満たす客体の性能」であり、相補的な2組の価値はそれぞれ相反するものではないためである。6種類の数学的価値は、行為の背景としての軽重はあるものの、同時に働くことがあり得る。

5.2 数学的価値を選択する行為者の視点の特徴

九九表の隣り合う2数の和を求める活動における数学的価値の分析において見られた別の特徴としては、同じ数学的価値についても異なる行為者の視点と考えられることである。例えば、問題の解決場面②及び問題の解決場面④における神秘性という同じ数学的価値の選択基準として、〈社会〉本位・〈現在〉中心の視点と〈自己〉本位・〈現在〉中心の視点と考えられた。ただし、数学的価値を選択する行為者の視点は、ここで挙げた2類型に限らず、4類型のどれにでも考えることができる。つまり、神秘性という同じ数学的価値を選択する行為者の視点には、〈社会〉本位・〈未来〉中心の視点と〈自己〉本位・〈未来〉中心の視点も考えることができる。このことはどの数学的価値に対しても言えることであり、数学的価値を選択する行為者の視点は分析で挙げた類型に限らず、4類型のどれでも考えることができる。

逆に、行為者の視点は数学的価値を選択する際の理由づけとなるものであるが、行為者の視点によって数学的価値の種類が決まるわけではない。例えば、同じ〈社会〉本位・〈未来〉中心の視点は、問題の解決場面①においては進歩感という数学的価値を選択する際の理由づけとなっているが、問題の解決場面③においては合理主義という数学的価値を選択する際の理由づけとなっている。これは、他の行為者の視点でも同様であり、同じ視点でも異なる数学的価値を選択する際の理由づけとなり得る。つまり、6種類の数学的価値に対して、それぞれ4種類の行為者の視点理由づけとなりうると思うことができる。

5.3 行為の背景となる数学的価値を捉える枠組みの特徴

九九表の隣り合う2数の和を求める活動の背

景を数学的価値で特徴づける分析によって、同じ行為の背景にある相補的で異なる数学的価値の特徴の詳細を捉えることができた。例えば、問題の解決場面②の背景にある神秘性という数学的価値は〈社会〉本位・〈現在〉中心の視点で特徴づけることができ、開放性という数学的価値は〈自己〉本位・〈未来〉中心の視点で特徴づけることができた。このような行為の背景としての数学的価値を捉える枠組みは、同じ行為の背景にある数学的価値の違いを捉えることができるので、行為の背後にある目指すべき数学的価値を強調する際の手掛かりを得ることができる。

6. 研究の結論と今後の課題

本研究では、包括的で理念的である Bishop の数学的価値に行為者の価値判断の視点を加えることで、授業場面における教師や子どもの行為の背景を特徴づける数学的価値を捉える枠組みを開発した。これは、Bishop の6つの数学的価値に対して、行為者の視点からこれらを選択する理由づけを行うことで、行為とその選択の基準として働く数学的価値との関係を捉えることができるものである。

本研究では、この枠組みで捉えられる数学的価値について、九九表の隣り合う2数の和を求める活動を事例に即して具体的に分析したが、今後の研究の展開としては、実際の授業場面や問題解決過程に影響を及ぼす数学的価値を明らかにしていくためにこの枠組みを用いていくことが考えられる。

注

(1) 命題が論理的に成立するか否かを述べる数学的真偽のことでなく、長期的関心を志向する行為者の視点として、真理であるか偽りであるかという判断の尺度であり、命題の真偽の判断とは意味が異なる。数学的な真偽は命題が真か偽かという事であるのに対し、行為者の視点としての真偽は現在より先においても認められるか否かという事である。この視点によって、授業において観察される子どもの行為がその場限

りではなくこれから先の未来を志向しているかどうかを捉えることができる。このことは、行為の動因の解釈を可能にするので、行為を通して育成される能力や態度を特徴づけるのに役に立つ。

(2) 数学的に正しいか間違っているかという判断のことでなく、長期的関心から他者や社会の欲求を充足させることを志向する行為者の視点であり、事象自体の数学的な正しさや間違いの判断とは意味が異なる。数学的な正邪は事象が数学的に正しいか間違っているかという事であるのに対し、行為者の視点としての正邪は長期的に社会的に認められるか否かという事である。この視点によって、授業において観察される子どもの行為が現在の自身のことではなく長期的に他者や社会のことを志向しているかどうかを捉えることができる。このことは、行為の動因の解釈を可能にするので、行為を通して育成される能力や態度を特徴づけるのに役に立つ。

(3) 事例は、2014年6月21日開催のガウスの会（於：横浜国立大学附属小学校）における細水保宏先生の授業を参考にして、筆者が問題解決場面の展開を考えたものである。

引用参考文献

- 馬場卓也 (2007). 「多様な価値観を有する社会・時代における算数教育」. 日本数学教育学会誌, 89(10), 20-27.
- 馬場卓也 (2009). 「算数・数学教育における社会的オープンエンドな問題の価値論からの考察」. 数学教育学研究, 15(2), 51-57.
- Baba, T., Iwasaki, H., Ueda, A. & Date, F. (2012). Values in Japanese mathematics education: A historical development. *ZDM — The International Journal on Mathematics Education*, 44, 21-32.
- Bishop, A. J. (1988). *Mathematical Enculturation: A Cultural Perspective on Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. (湊三郎 訳(2011). 『数学的文化化：算数・数学教育を文化の立場から眺望する』, 東京：教育出版.)

- Bishop, A. J. (1999). Mathematics teaching and values education: An intersection in need of research. *ZDM — The International Journal on Mathematics Education*, 31(1), 1–4.
- Bishop, A. J., Clarke, B., Corrigan, D. & Gunstone, D. (2006). Values in Mathematics and Science Education: Researchers' and Teachers' Views on the Similarities and Differences. *For the Learning of Mathematics*, 26(1), 7–11.
- Cao, Z., Seah, W. T. & Bishop, A. J. (2006). A comparison of mathematical values conveyed in mathematics textbooks in China and Australia. In F. K. S. Leung, K. D. Graf & F. J. Lopez-Real (Eds.), *Mathematics Education in Different Cultural Traditions: A Comparative Study of East Asia and the West* (pp. 483–493). New York: Springer.
- Law, H. Y., Wong, N. Y. & Lee, N. Y. L. (2012). A study of espoused values in Hong Kong's mathematics classrooms. *ZDM — The International Journal on Mathematics Education*, 44, 45–57.
- Lim, C. S. & Kor, L. K. (2012). Excellent primary mathematics teachers' espoused versus enacted values of effective lessons. *ZDM — The International Journal on Mathematics Education*, 44, 59–69.
- 見田宗介 (1966). 『価値意識の理論：欲望と道徳の社会学』. 東京：弘文堂.
- Seah, W. T. & Peng, A. (2012). What Students Outside Asia Value in Effective Mathematics Lessons: A Scoping Study. *ZDM — The International Journal on Mathematics Education*, 44, 71–82.
- Seah, W. T. & Wong, N. Y. (2012). What student value in effective mathematics learning: a 'Third Wave Project' research study. *ZDM — The International Journal on Mathematics Education*, 44, 33–43.
- White, L. A. (1959). *The Evolution of culture*. New York: McGraw-hill.

Development of a Research Framework for Mathematical Values from Cultural Perspectives

Miho YAMAZAKI

This paper suggests a new framework for mathematical values, which characterizes the background of teachers' and students' actions in the classroom. In the first part of the paper, a new framework for mathematical values is introduced. The framework for mathematical values proposed earlier by Bishop (1988) has been widely used as the standard in studies. However that framework only captures cultural significant components expansively and ideally. Therefore, I propose the development of a new framework for mathematical values with reference to the criteria for choice proposed by Mita (1966), which focuses and addresses the function of values in actions as criteria. This new framework divides viewpoints of actors into four dimensions, which consist of time-oriented factors, 'the present' or 'the future', and social-oriented factors, 'the self' or 'the society': 'pleasure' values, 'benefit' values, 'appropriacy' values, and 'right' values. This complements Bishop's framework by introducing an actor's reason for values, and captures the relationship between actions and mathematical values as the criteria for choice. In the latter part of the paper, the relationship of mathematical values in an action to an actor's viewpoints is explained concretely. As a result, characters of the new framework are found: each of six mathematical values indicates relationships with each of four viewpoints; a complementary pair of mathematical values in one action is characterized differently by an actor's viewpoint.