

周期構造不連続面を有する 3 次元ユニットセルを
用いた CFRP 積層板の弾-粘塑性均質化解析

後 藤 圭 太

システム情報工学研究科
筑波大学

2015年 3月

目 次

第1章 緒 言	1
第2章 時間依存材料に関する均質化理論および数値解析手法	11
第3章 CFRP 積層板の微視的層間応力解析	21
第4章 CFRP 積層板のフリーエッジ解析	41
第5章 アングルプライ CFRP 積層板の負の積層方向ポアソン比	63
第6章 等価材料モデルを用いた計算コストの低減方法	77
第7章 結 言	87
付 録	89
参考文献	99
謝 辞	109

第1章

緒言

1.1 研究背景

近年のエネルギー問題や環境問題に対する関心の高まりから、世界的に低炭素社会の実現が目標とされており、我が国でも重要施策に位置づけられている。これに対する有効な手段の一つとして、輸送機器等の軽量化によるエネルギー効率の向上が挙げられる。このため、金属材料に代表される従来の構造材料と比べ軽くて強い材料が必要とされており、このような背景から、炭素繊維強化プラスチック（Carbon Fiber-Reinforced Plastic：CFRP）が大きな注目を集めている。CFRPは、強化材である炭素繊維に、母材となるエポキシ等の樹脂材料を含浸させて製造される複合材料で、軽量・高強度・高剛性・高耐食性・良成形性といった特徴を有している。その特徴を端的に示す指標の一例として、ヤング率および引張強度を比重で除した比剛性・比強度に着目すると、炭素鋼に対して比剛性は3倍以上、比強度は5倍以上と、上記の要求を満たす材料であることがわかる。したがって、従来は金属等で製造されてきた部品をCFRPへと置き換えることで、機器の大幅な軽量化が期待できる。

工業分野におけるCFRPの導入は、主として先端産業である航空宇宙分野からスタートした。当初はラダーやスポイラーといった二次構造に部分的に使用されただけであったが、その適用範囲は徐々に拡大し、米国ボーイング社の最新鋭旅客機B787では、重量比で機体の約50%がCFRPで製造されるに至っている。また、より身近な自

自動車分野に目を移すと、高級乗用車のボディパネルやフレームへ CFRP が適用された例を見ることができる。このような CFRP の自動車分野への適用は、量産性やコスト等の問題からまだ限られているが、これらを解決するための様々な研究・開発が取り組まれており、実用化は時間の問題である。このように、近年では CFRP が劇的に普及しつつある上、今後もその使用範囲は拡大し続けることが容易に予想されることから、CFRP の力学特性を明らかにすることは、これを使用した機器の安全性を保証する上で不可欠な課題である。

1. 2 CFRP 積層板の力学特性とそのマルチスケール性

一般に CFRP は、ラミナ（あるいはプリプレグ）と呼ばれる炭素繊維を一方向に配したシート状の CFRP を、向きを変えて多数積層した CFRP 積層板に加工した上で使用される。その理由としては主に、ラミナが繊維軸方向とそれ以外の方向とで特性が大きく異なる強異方性を有しており、これを緩和するためである。ラミナをどのような角度・順序で積層するかは、実際に使用される箇所の力学状態を考慮した上で決定されるが、広く用いられている積層構成の例として、図 1.1 に示すような、繊維を $[0/90]$ と直交方向に配したクロスプライ積層板、 $[\pm\theta]$ のように任意の角度で積層したアングルプライ積層板、 $[0/\pm60]$ や $[0/90/\pm45]$ となるように積層した擬似等方積層板などが挙げられる。

ここで、CFRP 積層板の内部構造に着目すると、それぞれのラミナ内部に炭素繊維とその周囲を満たす樹脂母材とで構成される微視構造が存在し、そのようなラミナをさらに多方向に積層することから、一般に複雑な微視構造を有する材料であることがわかる（図 1.1）。このような微視構造において種々の現象が相互に影響を及ぼし合いながら発生し、それらを反映して CFRP 積層板の全体挙動が発現することから、CFRP 積層板の力学特性への理解を深めるためには、微視的スケールと巨視的スケールの両者からの視点が必要となる。下記では、二つのスケールでそれぞれ重要となる事柄に関し、本研究の注目箇所に焦点を当てながら述べる。

1. 2. 1 微視的スケール ～構成材料の力学特性、異種材料境界面とフリーエッジ～

微視的スケールで CFRP 積層板の特性に影響を及ぼす因子としては、第一に構成材

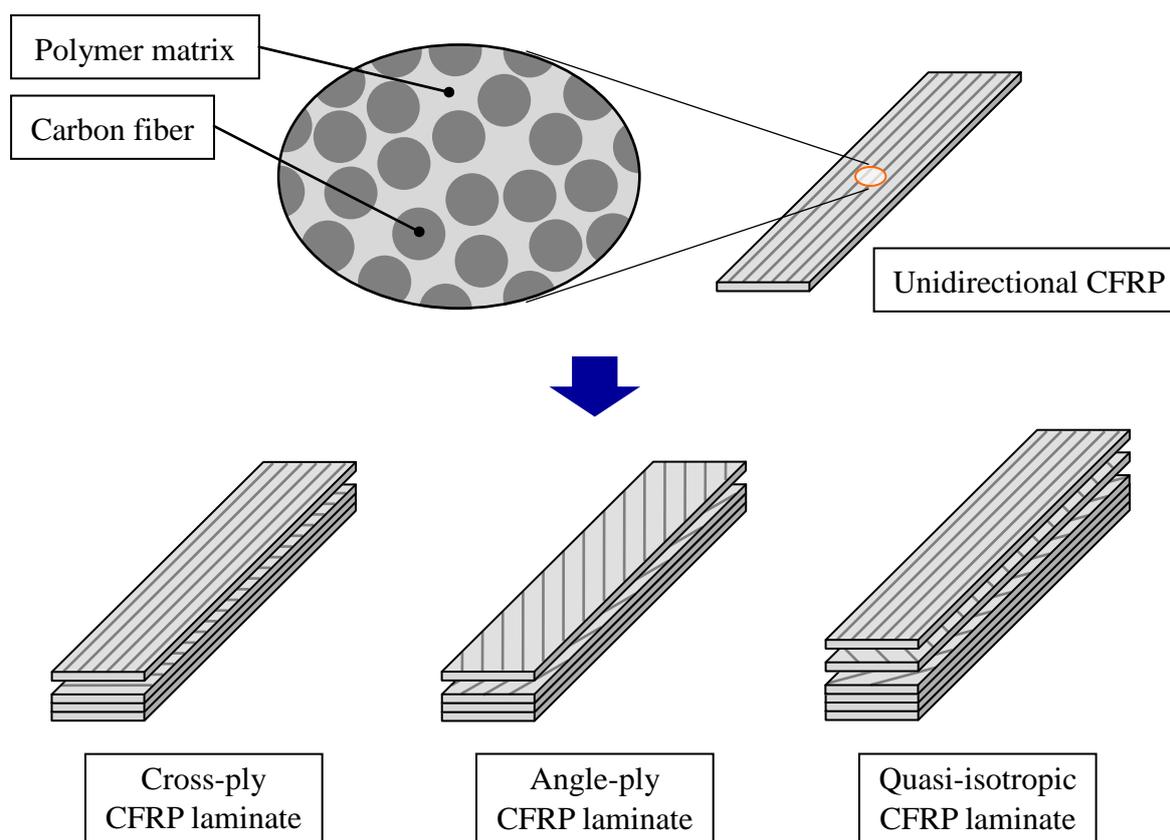


Fig. 1.1 Microstructure of unidirectional CFRP and types of laminate configurations.

料である炭素繊維・樹脂母材そのものの力学特性が挙げられる。一般に、炭素繊維は横等方弾性体と考えられており、繊維軸方向に高いヤング率および強度を有するが、横方向（繊維軸と直交する方向）のそれらはかなり低いことが知られている。これに対して樹脂母材は等方性とみなせることが多いが、弾性特性のみならず、粘弾性、塑性、粘塑性、クリープ等の種々の力学特性を有するため、その挙動は炭素繊維に比べて複雑である。このような樹脂母材の非弾性特性は、CFRP 積層板の全体挙動に大きく影響することが知られており[1-4]、先端的用途で高温・高応力等の過酷な環境下に置かれる可能性がある CFRP 積層板の力学特性を議論する上では、考慮すべき因子と言える。

また、CFRP 積層板内部には、炭素繊維と樹脂母材の界面、あるいはラミナ同士の接着面である層間など、力学特性が大きく異なる材料が互いに接着された異種材料境界面が存在する。これらの箇所では、接着された材料同士の变形特性の違いに起因し

て、負荷を受けた際に微視的応力・ひずみ集中が発生することが知られている。さらに、CFRP 積層板はフリーエッジと呼ばれる材料端部を有しているが、フリーエッジでは面外方向の変形が拘束されないため、特に異種材料境界面がフリーエッジに露出している場合には、図 1.2 に示すように、炭素繊維と樹脂母材、あるいは接着されたラミナ同士の変形特性の違いに起因して、局所的な変形の不マッチが発生する。これによりフリーエッジでは、負荷を受けた際に積層板内部とは大きく異なる微視的応力・ひずみ場が形成される（フリーエッジ問題）。

このように異種材料境界面やフリーエッジでは、巨視的な視点からは観測されない、微視的応力・ひずみ集中が容易に発生するため、想定荷重を下回る環境にあっても、これらの箇所が起点となって損傷や破壊を引き起こす危険性がある。また、異種材料境界面の強度は、CFRP 積層板の特性向上に寄与するため精力的に研究が進められており[5-15]、工学的にも重要な分野となっている。したがって、これらの箇所に発生する微視的応力・ひずみ分布を解明することは意義ある課題であると言える。

上記の背景からすでに、異種材料境界面やフリーエッジの応力・ひずみ分布が調べられてきたが、これらの箇所で生じる現象は微視的・局所的で計測が困難であるから、数値解析による研究が主流となっている[16-18]。しかし、これらの解析では主にラミ

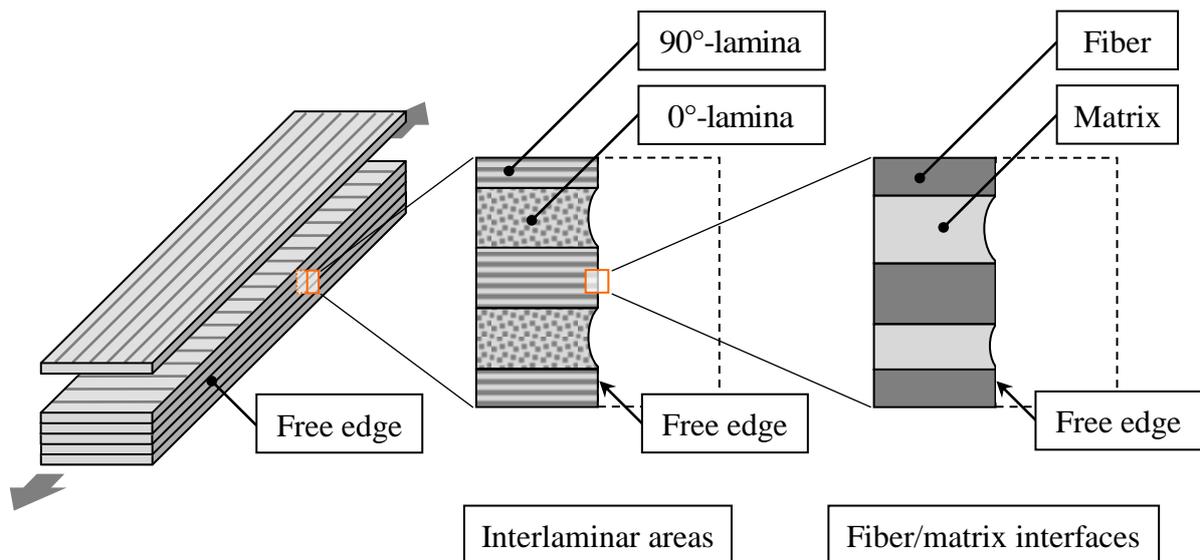


Fig. 1.2 Deformation at free edge of cross-ply CFRP laminate subjected to uniaxial tension.

ナを均質体と仮定するため、CFRP 積層板の微視構造に起因する詳細な 3 次元応力分布を求めることは困難である。FRP 積層板を対象に、その微視構造を考慮してフリーエッジの応力分布を解析した例としては、有限要素法を用いた文献[19-21]が挙げられるが、これらの文献は 2 次元弾性問題のみを取り扱っており、また解析モデルのフリーエッジには繊維／母材界面が露出していないことから、フリーエッジの応力分布を評価するには不十分である。一方で、CFRP 積層板のフリーエッジ問題を実験的に調査した数少ない例としては、デジタル画像相関法 (Digital Image Correlation : DIC) [22] を使用した研究が挙げられるが[23,24]、精度的に十分とは言えず、また、DIC は撮影された対象表面の変形状態を元に変形場を計算するため、積層板内部の力学状態を調査することは不可能である。このように、微視的な観点からの詳細な異種材料境界面やフリーエッジ挙動の解明、およびこれらの挙動が CFRP 積層板の巨視的／微視的非弾性特性に及ぼす影響の検証は、世界的に見てもほとんど取り組まれていないのが現状である。

1. 2. 2 巨視的スケール ～巨視的非弾性特性と負のポアソン比～

実際の設計段階では、一般に CFRP 積層板の巨視的特性を参考に強度設計が行われているから、CFRP 積層板の巨視的特性を調査することは重要な課題であり、特に近年では、高温・高応力といった過酷な使用環境下を想定し、その複雑な巨視的非弾性特性を詳細に把握することが不可欠なテーマとなっている。CFRP 積層板の巨視的挙動は、前節で示したような微視的スケールでの様々な因子を全て反映した結果として発現することから、その特性は多様であり、構成材料の組合せや積層構成、周辺環境等に応じて大きく変化する。さらに従来の一様材料とは異なり、CFRP 積層板の巨視的特性は強い異方性を示すことが特徴的である。これらの観点から、CFRP 積層板の弾性剛性、非弾性挙動や破壊強度等が精力的に調べられている[25-29]。

一方で、重要な材料特性の一つであるポアソン比に関しても研究が進められている。一般に CFRP 積層板は、ポアソン比も異方性を有しており、面内方向と積層方向とで異なる値となる。さらに興味深い知見として、CFRP 積層板の積層方向ポアソン比は、積層構成によっては負の値を示す、すなわち、面内引張負荷を受けた際に積層方向に膨張するという特異な挙動を示すことが知られている。このような負のポアソン比を

呈する現象は“Auxeticity”とも呼ばれ、CFRP 積層板以外にも、微視構造を工夫したセル状材料や高分子材料を対象とした研究が知られている[30-34]。CFRP 積層板の負のポアソン比に関しては、Herakovich[35]の研究に始まり、主に積層理論に基づいた解析的な研究がなされている[35-38]。また、実験的に CFRP 積層板の負のポアソン比を調査した例はわずかであるが、超音波を利用して測定した文献が挙げられる[39]。しかしこれらの文献では、弾性域における CFRP 積層板の負の積層方向ポアソン比にのみ言及しており、非弾性域の挙動については未だ議論がなされていない。ならびに、ラミナを均質体と仮定するため、負の積層方向ポアソン比が生じる際の、炭素繊維および樹脂母材の微視的な挙動を扱うことができず、その微視的なメカニズムは明らかにされていない。負のポアソン比は、例えば入りやすく抜けにくいくさび状の部品や、気密性が重要となるシール材の作製に応用することができ[34,40]、また、高度な形状安定性を必要とする宇宙機の設計などに利用できる可能性もあるから、このような特性を解明することは意義ある課題である。

1.3 均質化理論

前述のように CFRP 積層板は、従来の一様材料とは大きく異なる特性を有しており、このような複雑な力学挙動を詳細に解明するためには、その微視的特性と巨視的特性を関連付けて解析するマルチスケール的なアプローチが有効な手法の一つとなると考えられる。以下にマルチスケール解析手法の代表例を挙げる。

- ・ 複合則 (Voigt 則・Reuss 則) [41-43]
- ・ Halpin-Tsai 則[42,44]
- ・ Eshelby の楕円介在物理論[42,45]
- ・ Mori-Tanaka の平均場理論[46]
- ・ 均質化理論[47-50]

複合則は、強化材と母材が層状に構成された簡易的なモデルを考え、各層が等ひずみもしくは等応力状態であると仮定し、構成材料の特性と体積率を用いて全体挙動を計算する手法である。この手法は、CFRP 積層板の繊維軸方向特性など、特定の条件下ではおおむね良好な結果が得られるが、適用可能な事例は非常に限定的である。これを経験則に基づき発展させた手法が Halpin-Tsai 則で、複合則と比較してその予測精

度は向上しているが、各種パラメーターの同定には不明瞭な点がある。またこれらの手法は弾性問題に対して理論構築されており、非弾性問題への拡張は困難である。

一方で Eshelby の楕円介在物理論およびこれを発展させた Mori-Tanaka の平均場理論は、強化材と母材からなる微視構造を考慮したもので、母材中に楕円形状の強化材が埋没されている構造を仮定し、複合材料の全体挙動を予測する手法である。この楕円介在物の形状を変化させることで、繊維強化型・粒子強化型複合材料のいずれに対しても適用可能であり、さらに非弾性問題も取り扱うことが可能である。これらの手法は、複合材料の微視的な力学特性に着目する、いわゆるマイクロメカニックス的手法の走りであり、今日広く用いられている様々なマルチスケール解析手法の基礎となっている。

これらの手法と比較して、均質化理論（数学的均質化法）では、まずその微視的内部構造に対して周期構造を仮定し、その最小構成単位としてユニットセルを定義する。このユニットセルは強化材と母材から構成される不均質構造を有しているが、これを等価な力学特性を有する均質体へと置き換え、全体構造の力学特性を計算する（均質化解析）。さらに、全体構造に対してユニットセルが十分小さい場合、微視的応力・ひずみ場はユニットセルを単位として周期的に分布することから、均質化解析で得られた結果を用いてユニットセル内部の微視的応力・ひずみ分布を計算することができる（局所化解析）。このように均質化理論は、解析対象の微視的・巨視的特性を同時に解析可能な上、非線形問題に対する親和性も高いことから、複合材料[51-62]だけでなく、様々な不均質材料[63-74]の複雑な力学特性を解明する上で非常に有用な手法であると言える。

1.4 周期構造不連続面を考慮した均質化理論

一般に均質化理論に基づき CFRP 積層板の特性解析を実施する場合、まず CFRP 積層板を構成する各ラミナに対してその均質化特性を求め、得られた特性を用いて積層理論により CFRP 積層板の全体挙動を計算する手法が採られる。このような方法論に基づき、これまでに CFRP 積層板の弾-粘塑性解析[75,76]、クリープ解析[77]等が実施され、CFRP 積層板の巨視的・微視的挙動を精度良く予測可能であることが示された。このように均質化理論は、CFRP 積層板の特性解析に有用であると理解できるが、解

析対象とするユニットセルが無限に連続することを仮定した上で理論展開されているため、前述した層間やフリーエッジといった、微視的周期構造の連続性が失われる箇所（周期構造不連続面）そのものの挙動を取り扱うことは通常は不可能である。

上記の手法に対して、Matsuda *et al.*[78]は従来の均質化理論を拡張し、図 1.3 に示すような層間をも含んだ大規模な 3 次元ユニットセルを定義することで、クロスプライ CFRP 積層板の微視的層間応力解析を実施した。この手法は、1.2.1 節で取り上げた文献[17,18]とは対照的に、CFRP 積層板の微視構造を考慮した層間応力分布を解析することができ、同時にその巨視的挙動もマルチスケールの求めることが可能である。しかしこの研究は、弾性問題のみを扱っており、解析対象もクロスプライ CFRP 積層板に限られていた。またこの手法では、依然として CFRP 積層板のフリーエッジ問題を考慮することはできない。

1.5 本研究の目的

本研究では、層間やフリーエッジ等の周期構造不連続面を有する 3 次元ユニットセルを使用した CFRP 積層板の均質化解析手法を提案し、様々な積層構成を有する CFRP 積層板の弾性および弾-粘塑性解析を実施する。まず、Matsuda *et al.*[78]の手法を粘塑性問題に適用可能な形へと発展させるとともに、解析領域となる 3 次元ユニットセルの形状や境界条件を工夫することで、弾-粘塑性変形を受ける様々な CFRP 積層板の

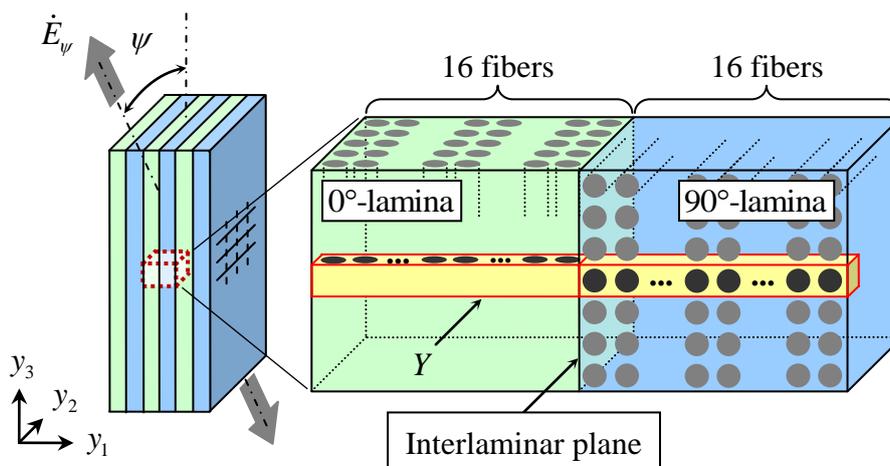


Fig. 1.3 Cross-ply CFRP laminate and unit cell Y including interlaminar plane.

層間における微視的応力分布を3次元的に解析する。さらに、均質化理論に新規境界条件を導入することで、フリーエッジの微視的弾-粘塑性特性を3次元的に解析可能な手法を提案する。また、本手法は均質化理論に基づいているため、上記の微視的挙動に加えて、巨視的特性もマルチスケールの調査することが可能である。このことを利用し、アングルプライ CFRP 積層板の負の弾-粘塑性ポアソン比について詳細に調査する。

1.6 本論文の構成

本論文ではまず、2章において、本研究で使用する時間依存材料に関する均質化理論[79,80]および半ユニットセルを用いた解析領域の半減方法[81]を述べる。ならびに、計算コストの低減を目的として、本理論にサブストラクチャ法を導入する[78,82,83]。つづいて3章では、クロスプライ、アングルプライおよび擬似等方 CFRP 積層板を対象として、層間を有する3次元ユニットセルを定義し、均質化理論に基づき弾-粘塑性層間応力解析を実施する。4章では、従来は微視的周期構造を有する無限体に対して理論展開されてきた均質化理論を、境界条件を検討することでフリーエッジ問題へと適用し、一方向およびクロスプライ CFRP 積層板の弾性・弾-粘塑性フリーエッジ解析を実施する。5章では、アングルプライ CFRP 積層板の弾-粘塑性解析を行い、積層構成によっては積層方向ポアソン比が負となること、およびその絶対値が積層板の粘塑性引張変形の進行とともに増大することを、その微視的メカニズムとともに明らかにする。さらに6章では、計算コストの低減を目的として、等価材料モデルを用いたクロスプライ CFRP 積層板の層間応力解析手法を提案し、従来手法との比較解析を実施することで、本手法の有効性を検証する。最後に7章では、本研究の総括として、各章のまとめおよび結言を述べる。

第2章

時間依存材料に関する均質化理論および

数値解析手法

本章ではまず、本論文で使用した時間依存材料に関する均質化理論[79,80]を解説する。ただし、本論文では巨視的一様変形を仮定し、二尺度漸近展開を用いない理論展開を示す。つづいて、微視的内部構造の点対称性を利用した解析領域の半減方法[81]を説明する。さらに、計算コストの低減を目的として、サブストラクチャ法[82]を本理論に導入する[83]。なお、本章では簡略化のために一方向 CFRP を例に解説し、また、添字の表記に関しては総和規約に従うとする。

2.1 時間依存材料に関する均質化理論[79,80]

2.1.1 理論展開

本節では解析対象として、図 2.1 に示すような微視的周期構造を有する一方向 CFRP を考え、直交座標系 y_i ($i=1,2,3$) を定める。このようなモデルに対し、解析領域として微視的周期構造の最小構成単位であるユニットセルを図中の Y のように定義する。 Y における微視的変位速度 $\dot{u}_i(\mathbf{y},t)$ は、巨視的変位速度 $\dot{F}_{ij}(t)y_j$ と擾乱変位速度 $\dot{u}_i^\#(\mathbf{y},t)$ の和として次式で表すことができる。

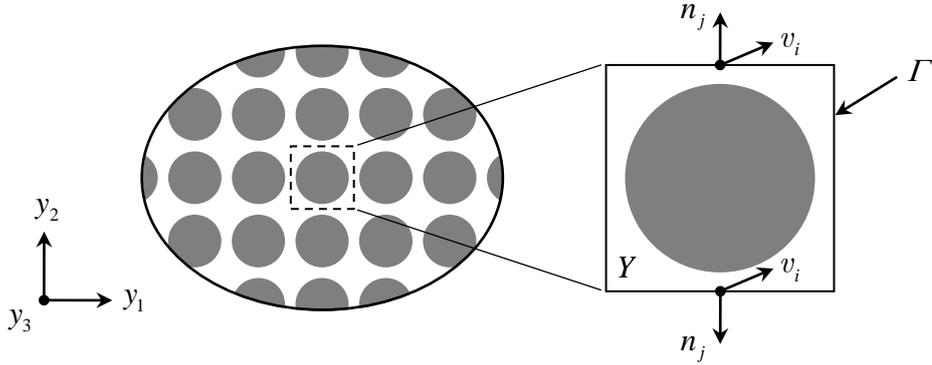


Fig. 2.1 Periodic internal structure of unidirectional CFRP and unit cell Y .

$$\dot{u}_i = \dot{F}_{ij} y_j + \dot{u}_i^\# \quad (2.1)$$

ここで、 (\cdot) は時間 t に関する微分を、 F_{ij} は巨視的一様変形の勾配をそれぞれ表す。 $\dot{u}_i^\#(\mathbf{y}, t)$ はユニットセル Y を単位として周期的に分布しており、これは Y -周期性と呼ばれる。同様に微視的ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}(\mathbf{y}, t)$ についても、

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{E}_{ij} + \dot{\epsilon}_{ij}^\# \quad (2.2)$$

と表される。ここで、 $\dot{E}_{ij}(t)$ 、 $\dot{\epsilon}_{ij}^\#(\mathbf{y}, t)$ はそれぞれ巨視的ひずみ速度および擾乱ひずみ速度を示しており、以下の関係を満たす。

$$\dot{E}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{F}_{ij} + \dot{F}_{ji}) \quad (2.3)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^\# = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j}^\# + \dot{u}_{j,i}^\#) \quad (2.4)$$

ここで、 $(\cdot)_{,i}$ は y_i に関する微分を表す。

次に、各構成相は弾-粘塑性材料であるとし、構成式が次式で表現されるとする。

$$\dot{\sigma}_{ij} = c_{ijkl}(\dot{\epsilon}_{kl} - \beta_{kl}) \quad (2.5)$$

ここで、 $\dot{\sigma}_{ij}(\mathbf{y}, t)$ は微視的応力速度を表す。また、 c_{ijkl} および β_{kl} は各構成相の弾性剛性テンソルおよび粘塑性関数を示し、以下の関係を満たす。

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{klij} \quad (2.6)$$

$$\beta_{kl} = \beta_{lk} \quad (2.7)$$

つづいて、 Y に関する微視的応力の釣合式は、

$$\dot{\sigma}_{ij,j} = 0 \quad (2.8)$$

と表される．式(2.8)は、部分積分および発散定理を用いることで、次の弱形式に変換される．

$$\int_Y \dot{\sigma}_{ij} v_{i,j} dY - \int_{\Gamma} \dot{\sigma}_{ij} n_j v_i d\Gamma = 0 \quad (2.9)$$

ここで、 $v_i(\mathbf{y}, t)$ は $\dot{u}_i^\#(\mathbf{y}, t)$ の任意の変分である．また、 Γ は Y の境界を表し、 n_j は Γ の外向き単位法線である．式(2.9)の第2項（境界積分項）に着目すると、 $\dot{\sigma}_{ij}$ と v_i は Y -周期性を有することから、 Y の向かい合う境界でそれぞれ同じ分布となる．一方、 n_j は向かい合う境界で互いに反対向きであるから、境界積分項は互いに打ち消し合い零となる（図 2.1）．したがって、式(2.9)は体積積分項のみを用いて、

$$\int_Y \dot{\sigma}_{ij} v_{i,j} dY = 0 \quad (2.10)$$

と書き改めることができる．式(2.10)に、式(2.2)および式(2.5)を代入すると、次式が得られる．

$$\int_Y c_{ijpq} \dot{u}_{p,q}^\# v_{i,j} dY = -\dot{E}_{kl} \int_Y c_{ijkl} v_{i,j} dY + \int_Y c_{ijkl} \beta_{kl} v_{i,j} dY \quad (2.11)$$

式(2.11)は、 $\dot{u}_i^\#$ に関して次の解を有している．

$$\dot{u}_i^\# = \chi_i^{kl} \dot{E}_{kl} + \varphi_i \quad (2.12)$$

ここで、 $\chi_i^{kl}(\mathbf{y})$ および $\varphi_i(\mathbf{y}, t)$ は特性関数と呼ばれる Y -周期関数で、次の境界値問題を解くことで得られる．

$$\int_Y c_{ijpq} \chi_{p,q}^{kl} v_{i,j} dY = -\int_Y c_{ijkl} v_{i,j} dY \quad (2.13)$$

$$\int_Y c_{ijpq} \varphi_{p,q} v_{i,j} dY = \int_Y c_{ijkl} \beta_{kl} v_{i,j} dY \quad (2.14)$$

なお、 $\chi_i^{kl}(\mathbf{y})$ は次の関係を満たす．

$$\chi_i^{kl} = \chi_i^{lk} \quad (2.15)$$

式(2.2)および式(2.12)を式(2.5)に代入することで、微視的応力の発展式が次のように得られる。

$$\dot{\sigma}_{ij} = a_{ijkl} \dot{E}_{kl} - r_{ij} \quad (2.16)$$

ここで、 $a_{ijkl}(\mathbf{y})$ 、 $r_{ij}(\mathbf{y}, t)$ はそれぞれ

$$a_{ijkl} = c_{ijpq} (\delta_{pk} \delta_{ql} + \chi_{p,q}^{kl}) \quad (2.17)$$

$$r_{ij} = c_{ijkl} (\beta_{kl} - \varphi_{k,l}) \quad (2.18)$$

であり、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタを表す。

また、 Y に関する体積平均を

$$\langle \# \rangle = |Y|^{-1} \int_Y \# dY \quad (2.19)$$

とし、式(2.16)に適用することで、巨視的構成式が次のように得られる。

$$\dot{\Sigma}_{ij} = \langle a_{ijkl} \rangle \dot{E}_{kl} - \langle r_{ij} \rangle \quad (2.20)$$

ここで、 $\langle a_{ijkl} \rangle$ 、 $\langle r_{ij} \rangle$ はそれぞれ均質化された巨視的弾性剛性テンソルおよび応力緩和関数を表す。また、 $\dot{\Sigma}_{ij}(t)$ は巨視的応力速度を表し、次式のように定義される。

$$\dot{\Sigma}_{ij} = \langle \dot{\sigma}_{ij} \rangle \quad (2.21)$$

式(2.2)に式(2.19)を適用すると、 $\dot{u}_i^\#$ の Y -周期性により $\langle \dot{\epsilon}_{ij}^\# \rangle$ が消去され、巨視的ひずみ速度 $\dot{E}_{ij}(t)$ は

$$\dot{E}_{ij} = \langle \dot{\epsilon}_{ij} \rangle \quad (2.22)$$

と表される。

なお、これまでに解説した理論は、巨視的一様変形を仮定することで、二尺度漸近展開を用いずに理論展開を行った。また、巨視的非一様変形を取り扱う場合には、FE²-メソッド[84]等と組み合わせることで、解析が可能である[66,68]。

2.1.2 有限要素解析

前節で取り上げた境界値問題(2.13)、(2.14)は、一般に有限要素法 (Finite Element

Method : FEM) を用いて解くことが可能である. このため, 境界値問題(2.13), (2.14) を離散化すると次式が得られる.

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\chi}^{kl} = \mathbf{F}^{kl} \quad (kl = 11, 22, \dots, 31) \quad (2.23)$$

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{G} \quad (2.24)$$

上式において, $\boldsymbol{\chi}^{kl}$, $\boldsymbol{\varphi}$ はそれぞれ χ_i^{kl} , φ_i の節点値ベクトルである. また, \mathbf{K} , \mathbf{F}^{kl} および \mathbf{G} はそれぞれ

$$\mathbf{K} = \int_Y \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dY \quad (2.25)$$

$$\mathbf{F}^{kl} = - \int_Y \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{kl} dY \quad (2.26)$$

$$\mathbf{G} = \int_Y \mathbf{B}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\beta} dY \quad (2.27)$$

である. ここで, \mathbf{B} はひずみ-変位マトリックス, \mathbf{C} は c_{ijkl} より構成されるマトリックス, \mathbf{C}^{kl} は \mathbf{C} の列ベクトル, $\boldsymbol{\beta}$ は β_{kl} より構成されるベクトル, \mathbf{T} は転置を表す. なお, 各マトリックスおよびベクトルの詳細は, 付録を参照されたい.

2. 1. 3 解析手順

巨視的応力 Σ_{ij} および巨視的ひずみ E_{ij} のいずれか, あるいは両者の組合せに関する時間履歴が与えられており, 時刻 t の微視的応力分布 $\sigma_{ij}(\mathbf{y}, t)$ が既知の場合, t から $t + \Delta t$ への増分解析は以下の手順で行われる.

- (1) 境界値問題(2.13), (2.14)を Y -周期境界条件のもとで解き, 特性関数 χ_i^{kl} , φ_i を求める.
- (2) 式(2.17)と式(2.18)よりそれぞれ a_{ijkl} , r_{ij} を計算する. また, 式(2.19)に基づきこれらの体積平均を計算し, 均質化された弾性剛性テンソルおよび応力緩和関数 $\langle a_{ijkl} \rangle$, $\langle r_{ij} \rangle$ を求める.
- (3) 式(2.20)より巨視的応力速度 $\dot{\Sigma}_{ij}$ あるいは巨視的ひずみ速度 \dot{E}_{ij} を, 式(2.16)より微視的応力速度 $\dot{\sigma}_{ij}$ をそれぞれ計算する.
- (4) 時刻 t から $t + \Delta t$ に関する増分を $\Delta \Sigma_{ij} = \dot{\Sigma}_{ij} \Delta t$, $\Delta E_{ij} = \dot{E}_{ij} \Delta t$, $\Delta \sigma_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} \Delta t$ のように

計算し、 t におけるそれぞれの値に加えることで、 $t+\Delta t$ の値を算出する。

その後、次の時間ステップへと移る。

なお、 χ_i^k 、 a_{ijkl} および $\langle a_{ijkl} \rangle$ は t に依存しない値であるから、一度計算された値を各時間ステップでそのまま使用することができる。一方、 φ_i 、 r_{ij} および $\langle r_{ij} \rangle$ は粘塑性関数 β_{kl} を含んでおり、 t に依存して変化するため、各時間ステップで再計算する必要がある。

2.2 半ユニットセルによる解析領域の半減[81]

図 2.2 に示すように、ユニットセル Y の内部構造がその中央点 C に関して点対称構造を有しているとする。このとき、 Y の微視的応力分布や擾乱変位場は、点 C に関して点対称に分布することが知られている。これを踏まえて、図 2.2 のように Y の半分の領域である \tilde{Y} を定義し、これを半ユニットセルと呼ぶこととする。 \tilde{Y} に関する微視的応力の釣合式は、式(2.9)と同様に、弱形式により次のように表される。

$$\int_{\tilde{Y}} \dot{\sigma}_{ij} v_{i,j} dY - \int_{\tilde{\Gamma}} \dot{\sigma}_{ij} n_j v_i d\Gamma = 0 \quad (2.28)$$

ここで、 \tilde{Y} における微視的応力速度 $\dot{\sigma}_{ij}$ および擾乱変位速度の任意変分 v_i は、図 2.2 に示すように点対称境界面の中央点 C 、 C' に関して点対称に分布する。このため、式(2.28)の境界積分項に着目すると、点対称境界面では点 C 、 C' に関して v_i が反対向きに分布し、 $\dot{\sigma}_{ij}$ および n_j が等しいから、境界積分項は零となり、

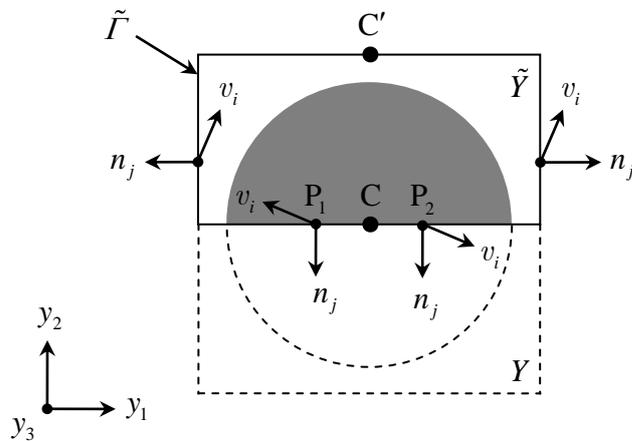


Fig. 2.2 Unit cell Y with point-symmetric internal structure and semiunit cell \tilde{Y} .

$$\int_{\tilde{Y}} \dot{\sigma}_{ij} v_{i,j} dY = 0 \quad (2.29)$$

が導かれる．式(2.29)を弱形式化し，式(2.2)および式(2.5)を代入すると， \tilde{Y} に関する境界値問題

$$\int_{\tilde{Y}} c_{ijpq} \chi_{p,q}^{kl} v_{i,j} dY = - \int_{\tilde{Y}} c_{ijkl} v_{i,j} dY \quad (2.30)$$

$$\int_{\tilde{Y}} c_{ijpq} \varphi_{p,q} v_{i,j} dY = \int_{\tilde{Y}} c_{ijkl} \beta_{kl} v_{i,j} dY \quad (2.31)$$

が得られる．

以上より，ユニットセル Y が点対称内部構造を有する場合，その点対称性を考慮することで， Y の半分の領域である半ユニットセル \tilde{Y} を解析領域として定義することが可能である．これにより，解析領域を半減することができる．

2.3 サブストラクチャ法[82,83]

図 2.3 に示すようなユニットセル Y （および半ユニットセル \tilde{Y} ）を，サブストラクチャ V_α （ $\alpha=1, 2, \dots, N$ ）へと分割する．それぞれの V_α に関する微視的応力 σ_{ij} の釣合式は，弱形式により次のように表される．

$$\int_{V_\alpha} \dot{\sigma}_{ij} v_{i,j} dV - \int_{\Gamma_\alpha} \dot{\sigma}_{ij} n_j v_i d\Gamma = 0 \quad (2.32)$$

ここで， Γ_α は V_α の境界である．式(2.32)の境界積分項は， y_2 軸および y_3 軸に直交する境界面では Y -周期性，すなわち向かい合う境界面で $\dot{\sigma}_{ij}$ および v_i が周期的に分布し，

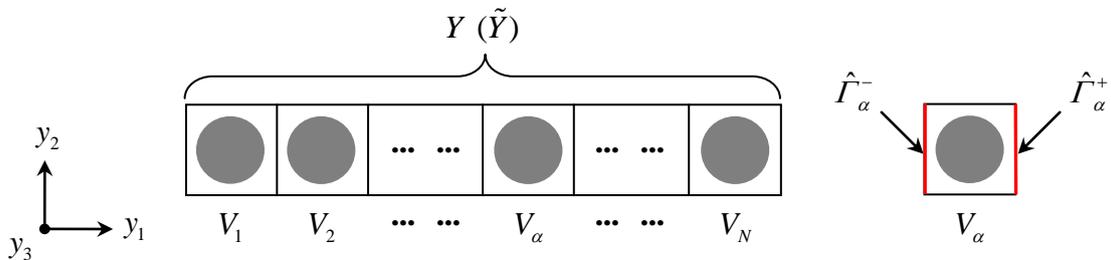


Fig. 2.3 Unit cell Y (semiunit cell \tilde{Y}) divided into substructures V_α , and boundary facets of V_α perpendicular to y_1 -direction, $\hat{\Gamma}_\alpha$.

n_j が反対向きであるため、互いに打ち消し合って零となる。一方、 y_1 軸と直交する境界面 $\hat{\Gamma}_\alpha$ では、向かい合う境界 $\hat{\Gamma}_\alpha^-$ と $\hat{\Gamma}_\alpha^+$ とで周期性を持たないため、境界積分項は零とはならない。したがって、式(2.32)は、

$$\int_{V_\alpha} \dot{\sigma}_{ij} v_{i,j} dV - \int_{\hat{\Gamma}_\alpha} \dot{\sigma}_{ij} n_j v_i d\Gamma = 0 \quad (2.33)$$

と書き改められる。ここで、 $\hat{\Gamma}_1^-$ と $\hat{\Gamma}_N^+$ に関しては、 Y -周期性もしくは点対称性により、境界積分項が零となることに留意する。

式(2.2)および式(2.5)を代入すると、式(2.33)は、

$$\int_{V_\alpha} c_{ijpq} \dot{u}_{p,q}^\# v_{i,j} dV = -\dot{E}_{kl} \int_{V_\alpha} c_{ijkl} v_{i,j} dV + \int_{V_\alpha} c_{ijkl} \beta_{kl} v_{i,j} dV + \int_{\hat{\Gamma}_\alpha} \dot{\sigma}_{ij} n_j v_i d\Gamma \quad (2.34)$$

となる。これは、離散化すると次式で表される。

$$\mathbf{v}_\alpha^\top \int_{V_\alpha} \mathbf{B}^\top \mathbf{C} \mathbf{B} dV \dot{\mathbf{u}}_\alpha^\# = -\mathbf{v}_\alpha^\top \dot{E} \int_{V_\alpha} \mathbf{B}^\top \mathbf{C} dV + \mathbf{v}_\alpha^\top \int_{V_\alpha} \mathbf{B}^\top \mathbf{C} \boldsymbol{\beta} dV + \mathbf{v}_\alpha^\top \int_{\hat{\Gamma}_\alpha} \dot{\boldsymbol{\sigma}} n d\Gamma \quad (2.35)$$

ここで、 \mathbf{v}_α 、 $\dot{\mathbf{u}}_\alpha^\#$ はそれぞれ V_α に関する v_i 、 $\dot{u}_i^\#$ の節点ベクトルである。式(2.35)が任意の \mathbf{v}_α に対して成立することから、次の関係式が導かれる。

$$\int_{V_\alpha} \mathbf{B}^\top \mathbf{C} \mathbf{B} dV \dot{\mathbf{u}}_\alpha^\# = -\dot{E} \int_{V_\alpha} \mathbf{B}^\top \mathbf{C} dV + \int_{V_\alpha} \mathbf{B}^\top \mathbf{C} \boldsymbol{\beta} dV + \int_{\hat{\Gamma}_\alpha} \dot{\boldsymbol{\sigma}} n d\Gamma \quad (2.36)$$

すなわち、

$$\mathbf{K}_\alpha \dot{\mathbf{u}}_\alpha^\# = \dot{E}_{kl} \mathbf{F}_\alpha^{kl} + \mathbf{G}_\alpha + \mathbf{S}_\alpha^{(\hat{\Gamma})} \quad (2.37)$$

である。なお、

$$\mathbf{K}_\alpha = \int_{V_\alpha} \mathbf{B}^\top \mathbf{C} \mathbf{B} dV \quad (2.38)$$

$$\mathbf{F}_\alpha^{kl} = -\int_{V_\alpha} \mathbf{B}^\top \mathbf{C}^{kl} dV \quad (2.39)$$

$$\mathbf{G}_\alpha = \int_{V_\alpha} \mathbf{B}^\top \mathbf{C} \boldsymbol{\beta} dV \quad (2.40)$$

$$\mathbf{S}_\alpha^{(\hat{\Gamma})} = \int_{\hat{\Gamma}_\alpha} \dot{\boldsymbol{\sigma}} n d\Gamma \quad (2.41)$$

とした。

つづいて、 V_α 境界上の節点を Γ 、 V_α 内部の節点を Ω とし、 $\dot{\mathbf{u}}_\alpha^\#$ をそれぞれ $\dot{\mathbf{u}}_\alpha^{\#(\Gamma)}$ と $\dot{\mathbf{u}}_\alpha^{\#(\Omega)}$ に分離する。これにより、式(2.37)は次のように書き改められる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_\alpha^{(\Gamma)} & \mathbf{K}_\alpha^{(\Gamma\Omega)} \\ \mathbf{K}_\alpha^{(\Omega\Gamma)} & \mathbf{K}_\alpha^{(\Omega)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_\alpha^{\#(\Gamma)} \\ \dot{\mathbf{u}}_\alpha^{\#(\Omega)} \end{Bmatrix} = \dot{E}_{kl} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_\alpha^{kl(\Gamma)} \\ \mathbf{F}_\alpha^{kl(\Omega)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{G}_\alpha^{(\Gamma)} \\ \mathbf{G}_\alpha^{(\Omega)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{S}_\alpha^{(\hat{\Gamma})} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (2.42)$$

式(2.42)の第2式より、 $\dot{\mathbf{u}}_\alpha^{\#(\Omega)}$ は次式で表される。

$$\dot{\mathbf{u}}_\alpha^{\#(\Omega)} = \left(\mathbf{K}_\alpha^{(\Omega)} \right)^{-1} \left(\dot{E}_{kl} \mathbf{F}_\alpha^{kl(\Omega)} + \mathbf{G}_\alpha^{(\Omega)} - \mathbf{K}_\alpha^{(\Omega\Gamma)} \dot{\mathbf{u}}_\alpha^{\#(\Gamma)} \right) \quad (2.43)$$

式(2.43)を式(2.42)の第1式へと代入し、 $\dot{\mathbf{u}}_\alpha^{\#(\Omega)}$ を消去することで次式が得られる。

$$\bar{\mathbf{K}}_\alpha^{(\Gamma)} \dot{\mathbf{u}}_\alpha^{\#(\Gamma)} = \dot{E}_{kl} \bar{\mathbf{F}}_\alpha^{kl(\Gamma)} + \bar{\mathbf{G}}_\alpha^{(\Gamma)} + \mathbf{S}_\alpha^{(\hat{\Gamma})} \quad (2.44)$$

なお、

$$\bar{\mathbf{K}}_\alpha^{(\Gamma)} = \mathbf{K}_\alpha^{(\Gamma)} - \mathbf{K}_\alpha^{(\Gamma\Omega)} \left(\mathbf{K}_\alpha^{(\Omega)} \right)^{-1} \mathbf{K}_\alpha^{(\Omega\Gamma)} \quad (2.45)$$

$$\bar{\mathbf{F}}_\alpha^{kl(\Gamma)} = \mathbf{F}_\alpha^{kl(\Gamma)} - \mathbf{K}_\alpha^{(\Gamma\Omega)} \left(\mathbf{K}_\alpha^{(\Omega)} \right)^{-1} \mathbf{F}_\alpha^{kl(\Omega)} \quad (2.46)$$

$$\bar{\mathbf{G}}_\alpha^{(\Gamma)} = \mathbf{G}_\alpha^{(\Gamma)} - \mathbf{K}_\alpha^{(\Gamma\Omega)} \left(\mathbf{K}_\alpha^{(\Omega)} \right)^{-1} \mathbf{G}_\alpha^{(\Omega)} \quad (2.47)$$

である。

式(2.44)を全ての V_α で連成すると、次式が得られる。

$$\bar{\mathbf{K}}^{(\Gamma)} \dot{\mathbf{u}}^{\#(\Gamma)} = \dot{E}_{kl} \bar{\mathbf{F}}^{kl(\Gamma)} + \bar{\mathbf{G}}^{(\Gamma)} \quad (2.48)$$

ここで、 $\dot{\mathbf{u}}^{\#(\Gamma)}$ は全ての V_α の境界節点における $\dot{\mathbf{u}}_i^\#$ の節点ベクトル、 $\bar{\mathbf{K}}^{(\Gamma)}$ は $\bar{\mathbf{K}}_\alpha^{(\Gamma)}$ より構成されるマトリックス、 $\bar{\mathbf{F}}^{kl(\Gamma)}$ と $\bar{\mathbf{G}}^{(\Gamma)}$ はそれぞれ $\bar{\mathbf{F}}_\alpha^{kl(\Gamma)}$ および $\bar{\mathbf{G}}_\alpha^{(\Gamma)}$ より構成されるベクトルである。なお、 $\hat{\Gamma}_\alpha^+$ と $\hat{\Gamma}_{\alpha+1}^-$ では、 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ の分布が等しく、 \mathbf{n} は反対向きであることから、 $\mathbf{S}_\alpha^{(\hat{\Gamma})}$ を全ての V_α で和を取ると零となることに留意する ($\sum_\alpha \mathbf{S}_\alpha^{(\hat{\Gamma})} = \mathbf{0}$)。ここで、 $\dot{\mathbf{u}}^\#$ に関する解は、式(2.12)より

$$\dot{\mathbf{u}}^\# = \boldsymbol{\chi}^{kl} \dot{E}_{kl} + \boldsymbol{\varphi} \quad (2.49)$$

であるから、式(2.49)の $\dot{\mathbf{u}}^{\#(\Gamma)}$ に関する解 ($\dot{\mathbf{u}}^{\#(\Gamma)} = \boldsymbol{\chi}^{kl(\Gamma)} \dot{E}_{kl} + \boldsymbol{\varphi}^{(\Gamma)}$) を式(2.48)に代入する

ことで、次の境界値問題を導く。

$$\bar{\mathbf{K}}^{(\Gamma)} \boldsymbol{\chi}^{kl(\Gamma)} = \bar{\mathbf{F}}^{kl(\Gamma)} \quad (2.50)$$

$$\bar{\mathbf{K}}^{(\Gamma)} \boldsymbol{\varphi}^{(\Gamma)} = \bar{\mathbf{G}}^{(\Gamma)} \quad (2.51)$$

ここで、 $\boldsymbol{\chi}^{kl(\Gamma)}$ 、 $\boldsymbol{\varphi}^{(\Gamma)}$ はそれぞれ全ての V_α に関する $\boldsymbol{\chi}^{kl}$ 、 $\boldsymbol{\varphi}$ の境界節点成分である。式(2.50)および式(2.51)を解くことで $\boldsymbol{\chi}^{kl(\Gamma)}$ 、 $\boldsymbol{\varphi}^{(\Gamma)}$ が求まり、これらを用いて式(2.43)に基づき $\boldsymbol{\chi}^{kl(\Omega)}$ 、 $\boldsymbol{\varphi}^{(\Omega)}$ が次式で計算される。

$$\boldsymbol{\chi}_\alpha^{kl(\Omega)} = (\mathbf{K}_\alpha^{(\Omega)})^{-1} (\mathbf{F}_\alpha^{kl(\Omega)} - \mathbf{K}_\alpha^{(\Omega\Gamma)} \boldsymbol{\chi}_\alpha^{kl(\Gamma)}) \quad (2.52)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_\alpha^{(\Omega)} = (\mathbf{K}_\alpha^{(\Omega)})^{-1} (\mathbf{G}_\alpha^{(\Omega)} - \mathbf{K}_\alpha^{(\Omega\Gamma)} \boldsymbol{\varphi}_\alpha^{(\Gamma)}) \quad (2.53)$$

以上のように、全ての V_α で $\boldsymbol{\chi}^{kl}$ および $\boldsymbol{\varphi}$ の全成分を求めることができる。一般に、全サブストラクチャの境界節点数は、解析領域に含まれる全節点数より遥かに少なく、境界値問題の自由度は大幅に低下するため、本手法を用いることで計算コストの低減が可能となる。

第3章

CFRP 積層板の微視的層間応力解析^[83,85]

1章でも述べたように, Matsuda *et al.*[78]は層間を有するユニットセルを定義することで, 均質化理論に基づきクロスプライ CFRP 積層板の弾性層間応力解析を実施した. しかしながら, 上記の文献は弾性域における解析に留まっており, また解析対象もクロスプライ CFRP 積層板のみであった. 近年の CFRP 積層板の使用例を踏まえると, クロスプライ CFRP 積層板に限らず, 様々な積層構成の CFRP 積層板を対象に, 層間挙動の非弾性特性を調査することは工学的に意義があると考えられる. そこで本章では, 層間を有する3次元ユニットセルの形状を工夫するとともに, 2章で解説した時間依存材料に関する均質化理論および数値解析手法を使用することで, 種々の CFRP 積層板を対象に弾-粘塑性層間応力解析を実施する. なお, 本章では解析対象として, 3種類の CFRP 積層板 (クロスプライ・アングルプライ・擬似等方 CFRP 積層板) を取り上げる.

3.1 クロスプライ CFRP 積層板

3.1.1 モデル化

本節では, 図 3.1 に示すような [0/90] クロスプライ CFRP 積層板を考える. このモデルは y_1 軸方向を積層方向とし, 繊維軸方向は y_2 軸および y_3 軸方向に平行である. 繊維は繊維軸に直交する面内で正方配列しており, 各ラミナは y_1 軸方向に 16 本の織

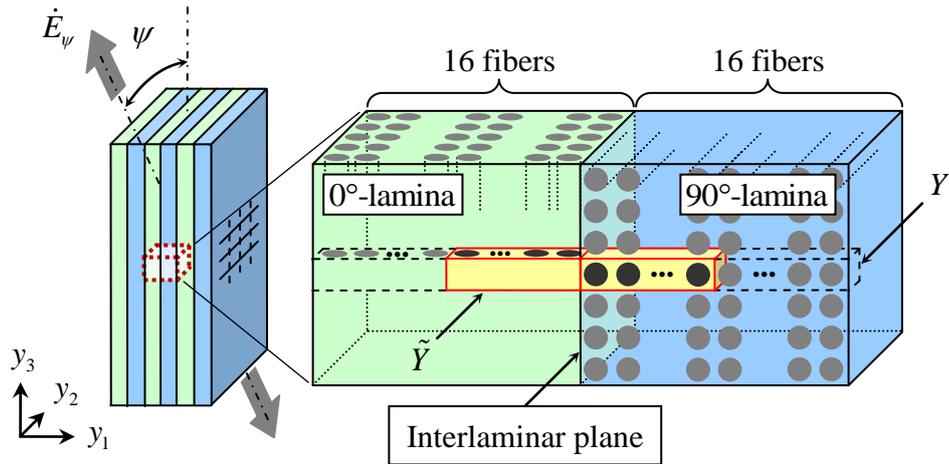


Fig. 3.1 Cross-ply CFRP laminate, unit cell Y and semiunit cell \tilde{Y} .

維を含んでいるとする. このようなクロスプライ CFRP 積層板に対し, 解析領域として層間を有するユニットセル Y を定義する. ここで, Y の内部構造に着目すると, 点 C_1 および C_2 に関して点対称構造を有していることがわかる. このため, Y と同様に半ユニットセル \tilde{Y} も解析領域として定義することが可能である. そこで本節では, \tilde{Y} を解析領域と定め, さらに立方体サブストラクチャ A_α および B_α ($\alpha=1, 2, \dots, 8$)に分割し (図 3.2), 解析を実施する.

3. 1. 2 解析条件

解析に使用したサブストラクチャ A_α および B_α の有限要素モデルを図 3.3 に示す. 各モデルは 8 節点アイソパラメトリック要素で有限要素分割しており, 節点数, 要素数はそれぞれ 5005, 4320 である. また, 繊維体積率は断面観察の結果に基づき 56%と定める. 負荷条件は $y_2 - y_3$ 面内における巨視的単軸引張ひずみ速度 $\dot{E}_\psi = 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ とする.

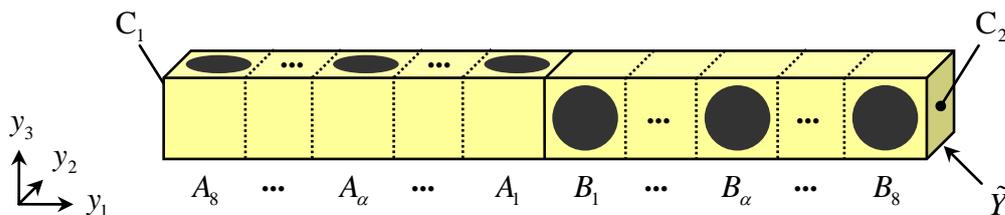


Fig. 3.2 Semiunit cell \tilde{Y} divided into substructures A_α and B_α ($\alpha=1, 2, \dots, 8$).

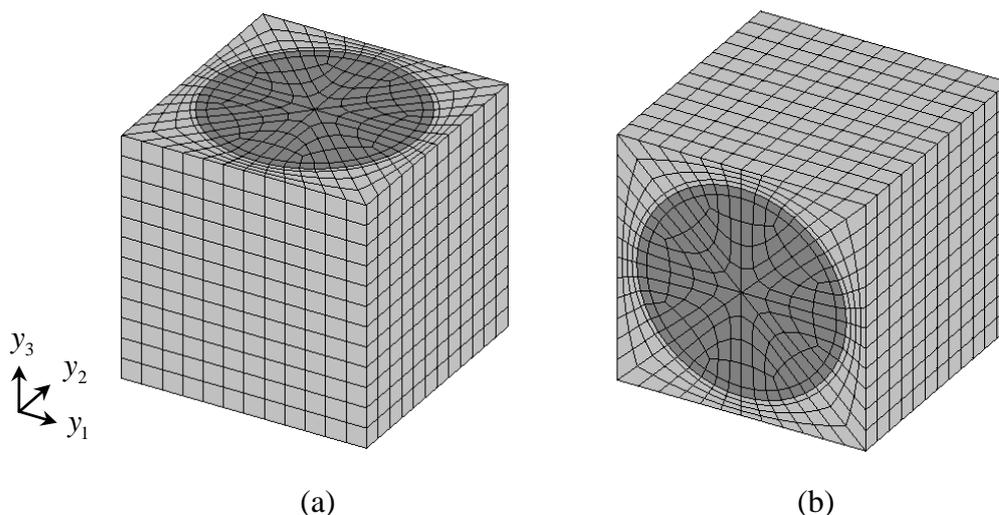


Fig. 3.3 Finite element models of substructures for cross-ply CFRP laminate;
(a) A_α and (b) B_α ($\alpha = 1, 2, \dots, 8$).

ここで、 ψ は負荷軸方向と y_3 軸方向との成す角を示しており、本解析では $\psi = 0^\circ, 45^\circ$ とする。

3. 1. 3 材料定数

解析モデルの CFRP 積層板は三菱レイヨン製 TR30/#340 であるとし、文献[75,76]と同じく表 3.1 の材料定数を用いる。炭素繊維は横等方弾性体、エポキシは等方弾-粘塑性体とし、エポキシは以下の構成式に従うとする[79,80]。

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1+\nu_m}{E_m} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{\nu_m}{E_m} \dot{\sigma}_{kk} \delta_{ij} + \frac{3}{2} \dot{\varepsilon}_0^p \left[\frac{\sigma_{eq}}{g(\bar{\varepsilon}^p)} \right]^n \frac{s_{ij}}{\sigma_{eq}} \quad (3.1)$$

Table 3.1 Material constants of carbon fibers and epoxy matrix.

Carbon fiber	$E_{LL} = 240$ [GPa]	$\nu_{TT} = 0.49$
	$E_{TT} = 15.5$ [GPa]	$\nu_{LT} = 0.28$
	$G_{LT} = 24.7$ [GPa]	
Epoxy	$E_m = 3.5$ [GPa]	$\nu_m = 0.35$
	$\dot{\varepsilon}^p = 10^{-5} [\sigma_{eq} / g(\bar{\varepsilon}^p)]^{35}$ [s ⁻¹]	
	$g(\bar{\varepsilon}^p) = 141.8(\bar{\varepsilon}^p)^{0.165} + 10$ [MPa]	

ここで、 E_m 、 ν_m および n はエポキシの材料定数、 $g(\bar{\varepsilon}^p)$ は相当粘塑性ひずみ $\bar{\varepsilon}^p$ に依存する硬化関数、 $\dot{\varepsilon}_0^p$ は参照ひずみ速度、 s_{ij} は偏差応力を表し、 $\sigma_{eq} = [(3/2)s_{ij}s_{ij}]^{1/2}$ である。

材料定数の妥当性を確認するため、図 3.4 に示すような一方向 CFRP および立方体ユニットセル（前節で示したサブストラクチャと同一）を考え、3 種類の一定ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}_{33} = 10^{-3}$ 、 10^{-5} 、 10^{-7} s^{-1} による $\theta = 45^\circ$ 非主軸方向引張の均質化解析を実施し、実験結果[75]との比較を行った。その結果を図 3.5 に示す。この図を見ると、解析結果と実験結果は精度良く一致しており、表 3.1 の材料定数は妥当であると言える。

3.1.4 巨視的特性

図 3.6 は、解析により得られたクロスプライ CFRP 積層板の巨視的応力-ひずみ関係である。この結果より、主軸方向引張である $\psi = 0^\circ$ の結果は線形性を示しているが、非主軸方向引張である $\psi = 45^\circ$ の結果は顕著な非線形性を呈することがわかる。また、図 3.6 には実験結果もプロットしており[75]、いずれの負荷方向でも解析結果と実験結果は精度良く一致していることが確認できる。したがって、本手法はクロスプライ CFRP 積層板の巨視的弾-粘塑性特性および負荷方向依存性を精度良く再現可能であると言える。

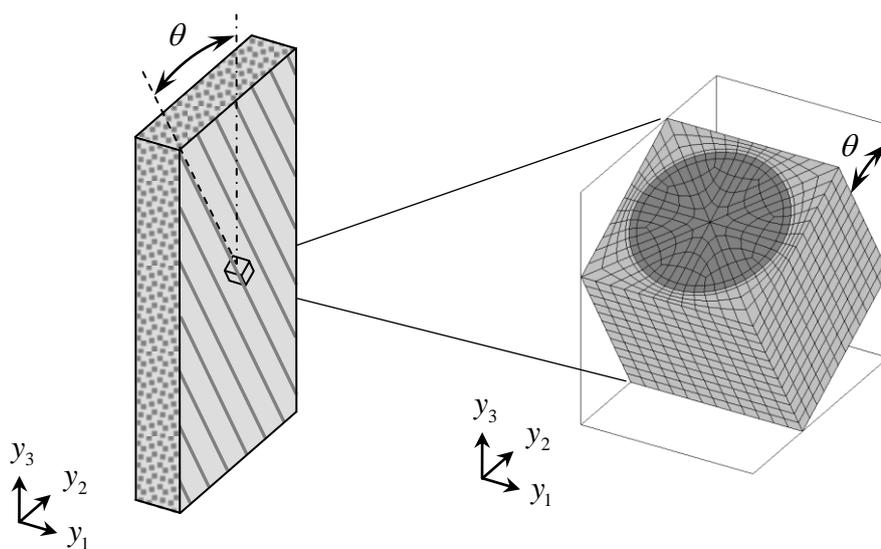


Fig. 3.4 Unidirectional CFRP with off-axis angle θ and unit cell.

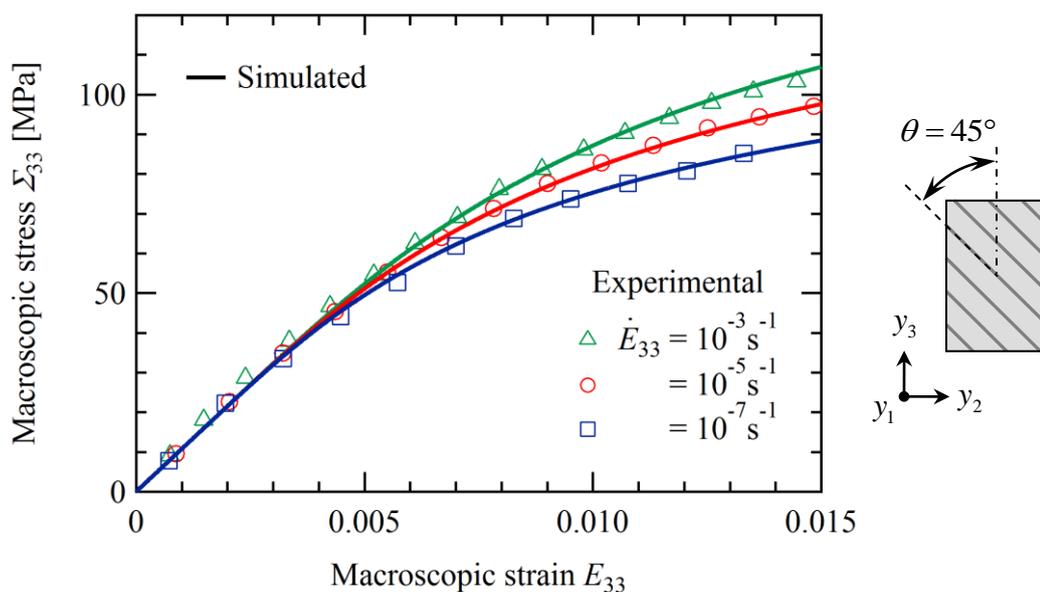


Fig. 3.5 Macroscopic stress-strain relationships of unidirectional CFRP at $\dot{E}_{33} = 10^{-3}$, 10^{-5} and 10^{-7} s^{-1} ($\theta = 45^\circ$).

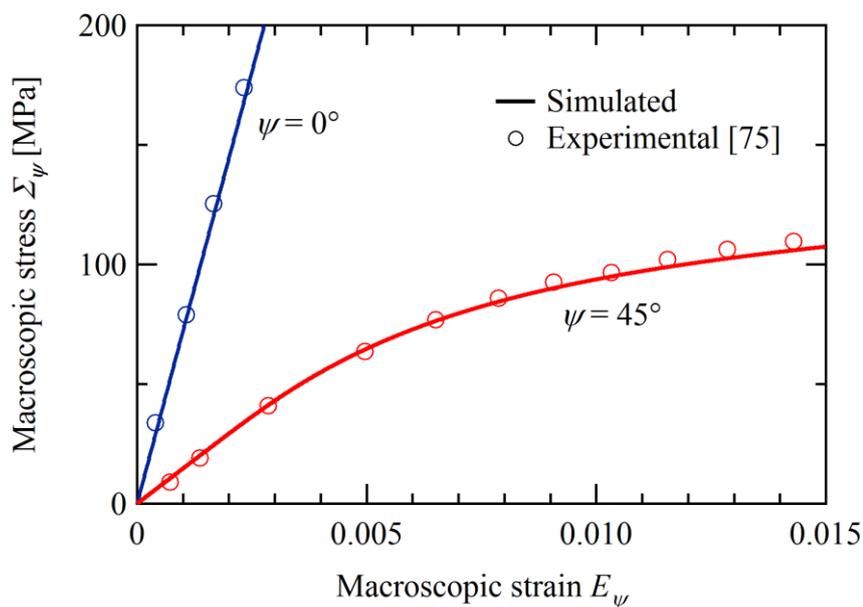


Fig. 3.6 Macroscopic stress-strain relationships of cross-ply CFRP laminate ($\dot{E}_\psi = 10^{-5} \text{ s}^{-1}$).

3. 1. 5 微視的層間応力分布

図 3.7 は引張ひずみ $E_\psi = 0.015$ の際の、 $0^\circ/90^\circ$ -層間に発生する微視的層間合成せん断応力 $(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2)^{1/2}$ のベクトル分布図である。図中のベクトルの方向は、層間面内でせん断応力が作用する方向を示している。また、図 3.7 は A_1 の変形図を用いて描いて

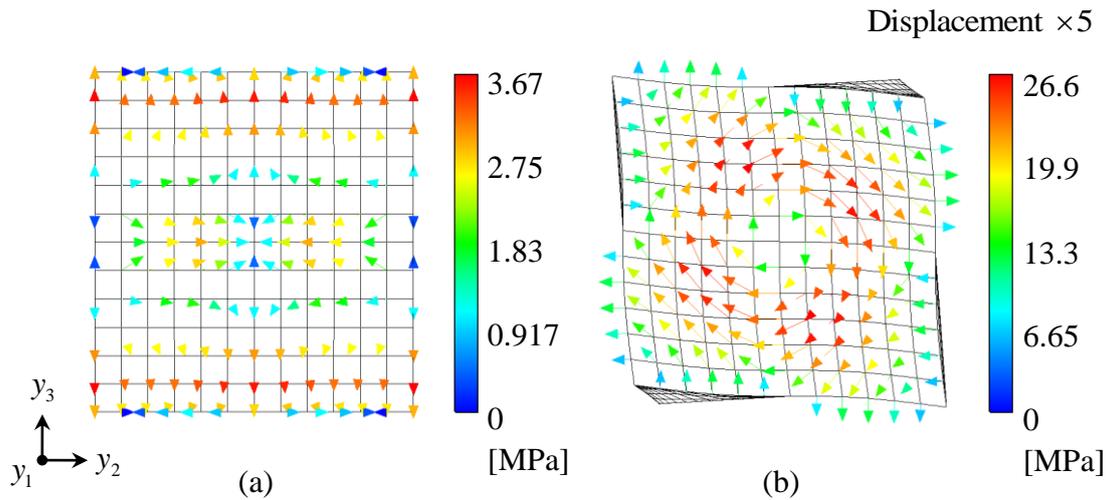


Fig. 3.7 Vector distributions of interlaminar resultant shear stress $(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2)^{1/2}$ superposed on deformed shapes of A_1 ; (a) $\psi = 0^\circ$ and (b) $\psi = 45^\circ$ ($E_\psi = 0.015$, $\dot{E}_\psi = 10^{-5} \text{s}^{-1}$).

おり，変位は5倍に拡大されている．これらの分布図より，いずれの負荷方向でも，巨視的には単軸引張負荷のみを与えているにも関わらず，層間では顕著な微視的せん断応力が発生することがわかる．特に $\psi = 45^\circ$ の結果に注目すると，微視的層間せん断応力の最大値は約27MPaと，巨視的引張応力 $\Sigma_{\psi=45^\circ}$ の25%に達しており，興味深い結果であると言える．CFRP積層板が非主軸方向負荷を受ける際には，積層板内部の炭素繊維が負荷方向へと回転する繊維回転が生じるため， $\psi = 45^\circ$ では図3.7(b)に示すような特徴的な応力分布が発生するものと考えられる．

また，図3.8は微視的層間面外垂直応力 σ_{11} の分布図である．図3.7のせん断応力と同様に，面外方向に関しても複雑な応力分布が発生し，さらに負荷方向に応じて分布様式が変化することがわかる．これらの微視的応力分布は，今回のようにCFRP積層板の微視構造を考慮することで初めて得られる結果であり，本解析手法の有用性を示している．

3.2 アンギュラプライCFRP積層板

3.2.1 モデル化

本節では解析モデルとして，図3.9に示すような $[\pm\theta]$ アンギュラプライCFRP積層板を考える．積層方向は前節と同様に y_1 軸方向とし，各ラミナは y_3 軸方向より $\pm\theta$ の角

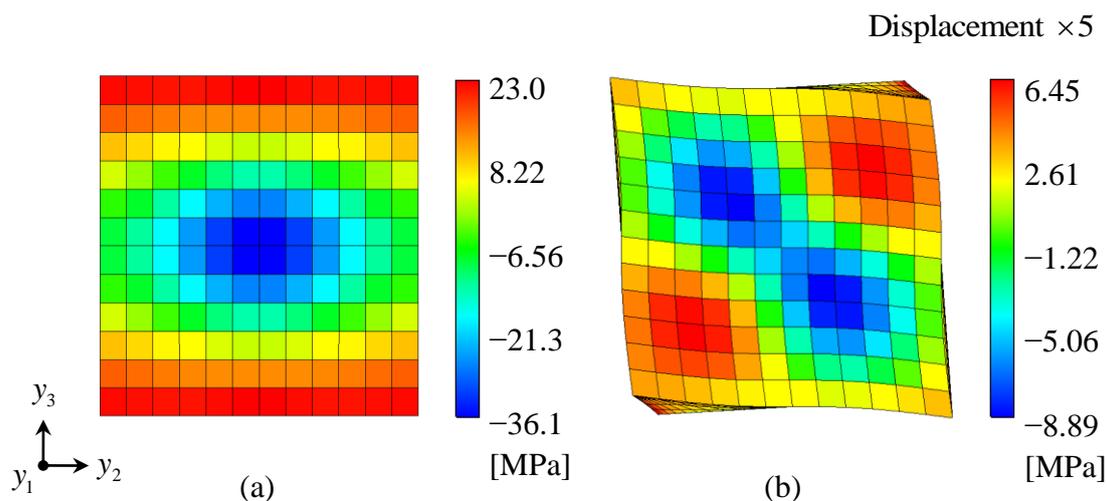


Fig. 3.8 Distributions of interlaminar out-of-plane normal stress σ_{11} superposed on deformed shapes of A_1 ; (a) $\psi = 0^\circ$ and (b) $\psi = 45^\circ$ ($E_\psi = 0.015$, $\dot{E}_\psi = 10^{-5} \text{ s}^{-1}$).

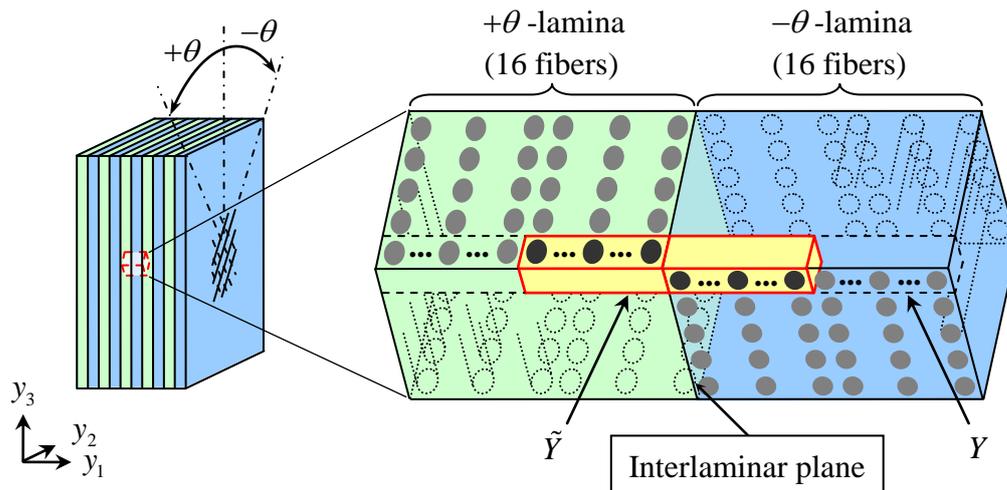


Fig. 3.9 $[\pm\theta]$ angle-ply CFRP laminate, unit cell Y and semiunit cell \tilde{Y} .

度で交互に積層されている。繊維配列は繊維軸に直交する面内で正方配列とし、各ラミナは y_1 軸方向に 16 本の繊維を含んでいるとする。このようなアングラプライ CFRP 積層板に対し、解析領域として層間を有するユニットセルを図 3.9 中の Y のように定義することが可能であるが、前節と同様に半ユニットセル \tilde{Y} も、左右両側面の中央点 C_1 , C_2 に関する点対称性を考慮することで解析領域とすることができる。したがって、解析領域を \tilde{Y} と定め、図 3.10 に示すようにサブストラクチャ A_α および B_α ($\alpha = 1, 2, \dots, 8$) に分割し、解析を実施する。

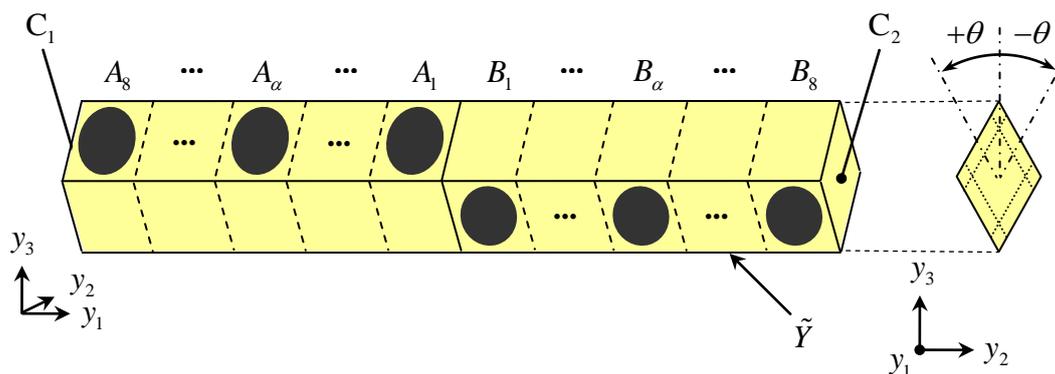


Fig. 3.10 Semiunit cell \tilde{Y} divided into substructures A_α and B_α ($\alpha = 1, 2, \dots, 8$).

3.2.2 解析条件

解析に使用した有限要素モデルの例として、積層構成が $[\pm 30]$ 、 $[\pm 45]$ および $[\pm 60]$ のサブストラクチャ A_α と B_α の有限要素モデルを図3.11-3.13に示す。節点数、要素数および繊維体積率は前節と等しくそれぞれ5005、4320、56%である。積層構成は $[\pm 5]$ から $[\pm 85]$ まで 5° 刻みで変更し、計17種類の積層構成を対象として解析を実施する。負荷条件は y_3 軸方向の巨視的単軸引張ひずみ速度 $\dot{E}_{33} = 10^{-5} \text{s}^{-1}$ とし、引張ひずみが

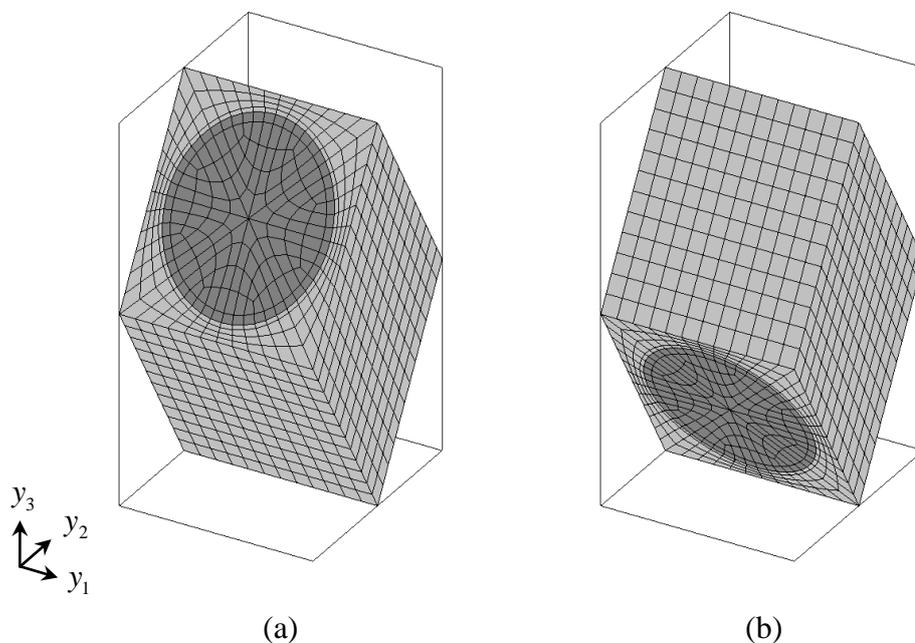


Fig. 3.11 Finite element models of substructures for $[\pm 30]$ angle-ply CFRP laminate; (a) A_α and (b) B_α ($\alpha = 1, 2, \dots, 8$).

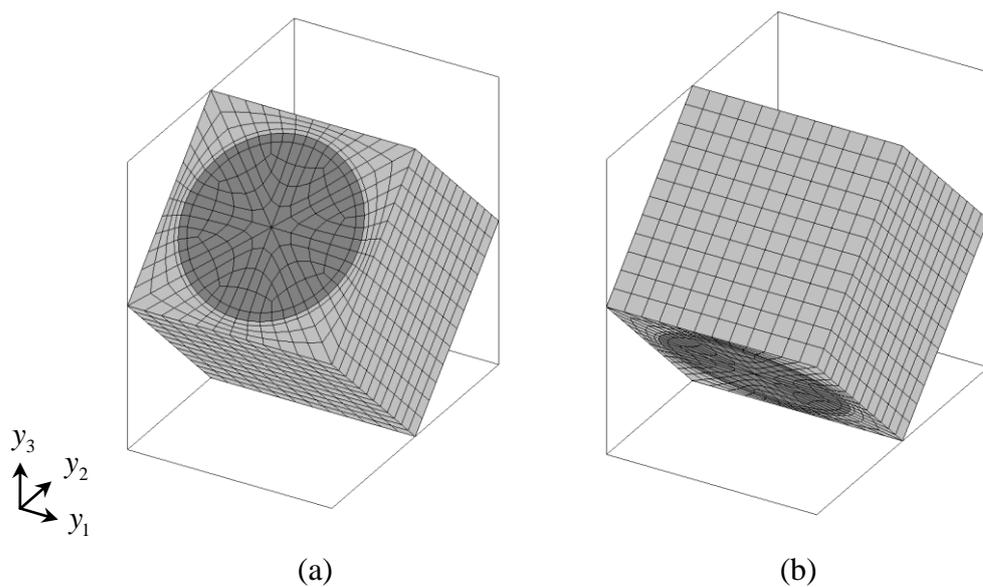


Fig. 3.12 Finite element models of substructures for [±45] angle-ply CFRP laminate; (a) A_α and (b) B_α ($\alpha=1, 2, \dots, 8$).

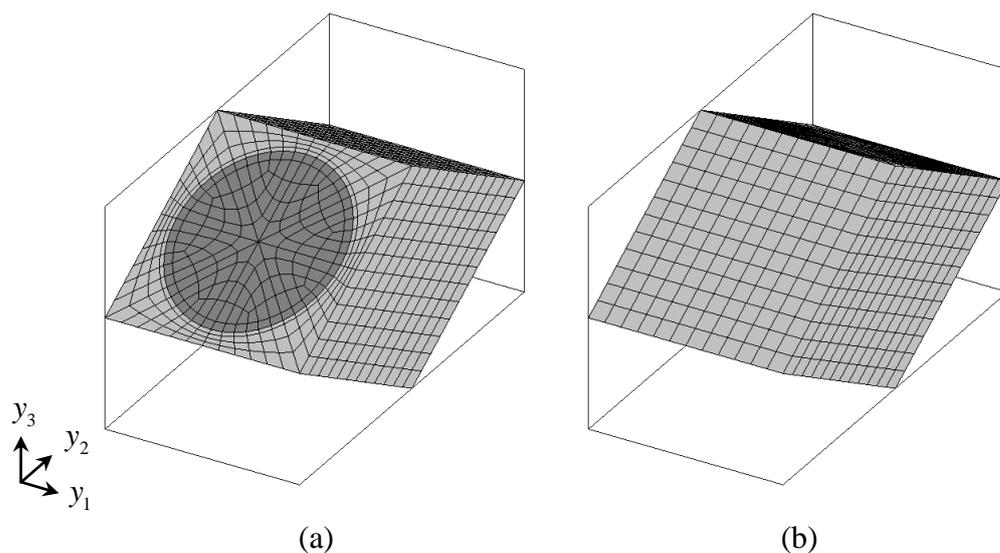


Fig. 3.13 Finite element models of substructures for [±60] angle-ply CFRP laminate; (a) A_α and (b) B_α ($\alpha=1, 2, \dots, 8$).

$E_{33} = 0.015$ に達するまで解析を実施する. また, 3.2.6節ではひずみ速度依存性を確認するため, 3種類のひずみ速度 ($\dot{E}_{33} = 10^{-3}, 10^{-5}, 10^{-7} \text{s}^{-1}$)で解析を行う.

3. 2. 3 巨視的特性

解析により得られた、 $[\pm 30]$ 、 $[\pm 45]$ および $[\pm 60]$ の巨視的応力-ひずみ関係を図 3.14 に示す。いずれの積層構成も、巨視的ひずみの増加に伴って明確な非線形性が生じている。また、 θ が増加するにつれて巨視的応力-ひずみ関係は急激に低下しており、アングルプライ CFRP 積層板の巨視的特性は、顕著な積層構成依存性を有していることがわかる。なお、 $[\pm 45]$ は実験結果[75]も示しており、実験結果と解析結果は精度良く一致することが確認できる。

3. 2. 4 微視的層間応力分布

図 3.15 は、巨視的引張ひずみ $E_{33} = 0.015$ の際の、 $[\pm 30]$ 、 $[\pm 45]$ および $[\pm 60]$ の微視的層間合成せん断応力 $(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2)^{1/2}$ のベクトル分布である。なお、図 3.15 はサブストラクチャ A_1 の変形図を用いており、変位を 5 倍に拡大して描いている。これらの図より、前節で示したクロスプライ CFRP 積層板と同様に、アングルプライ CFRP 積層板も、巨視的には単軸引張負荷のみを与えているにも関わらず、層間では顕著な微視的せん断応力が生じることがわかる。また、層間合成せん断応力の最大値は積層構成に応じて異なる値を示しており、それぞれ約 29MPa ($[\pm 30]$)、約 27MPa ($[\pm 45]$)、約 20MPa

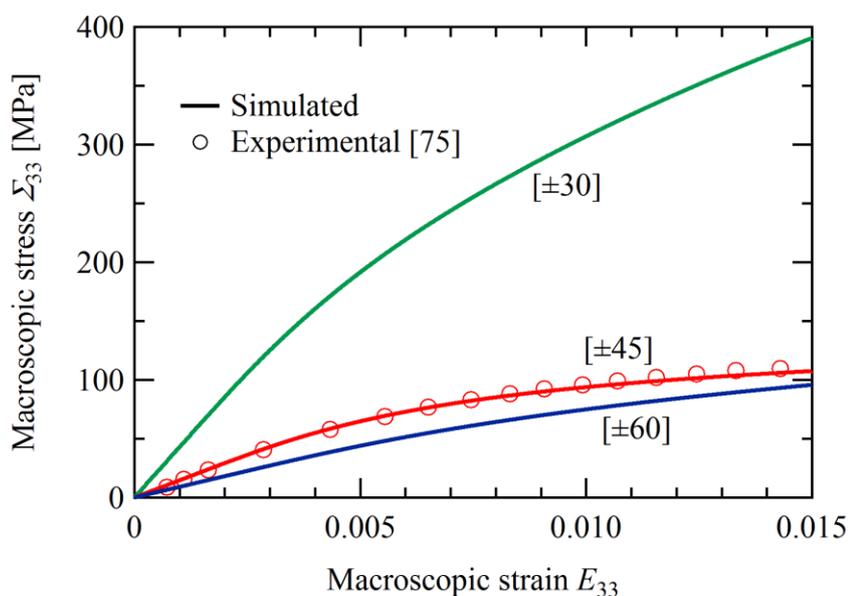


Fig. 3.14 Macroscopic stress-strain relationships of $[\pm 30]$ 、 $[\pm 45]$ and $[\pm 60]$ angle-ply CFRP laminates ($\dot{E}_{33} = 10^{-5} \text{ s}^{-1}$).

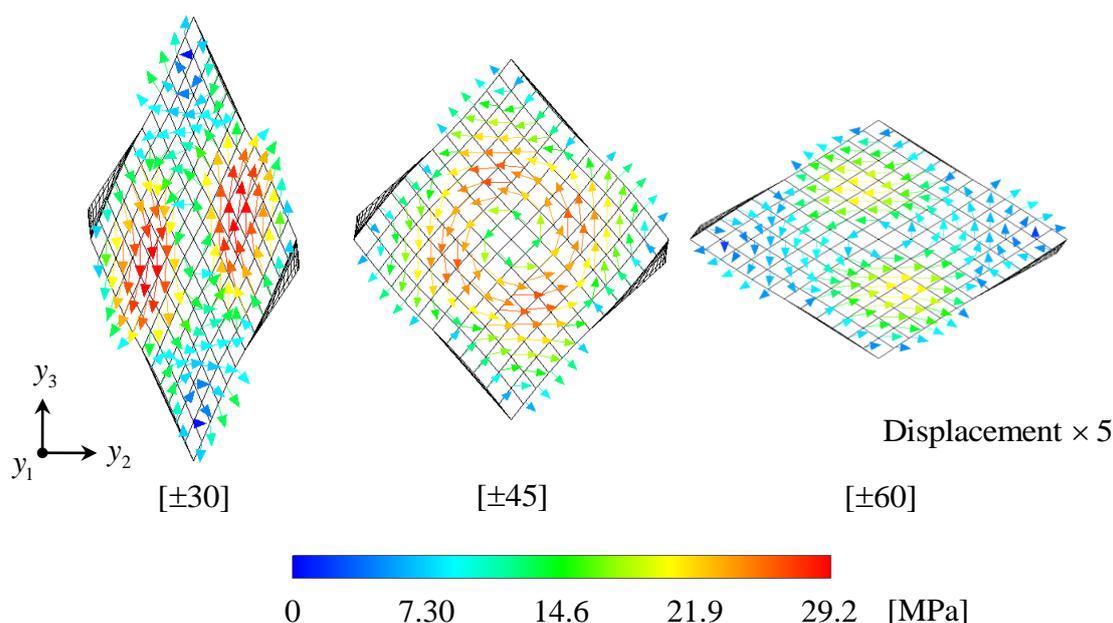


Fig. 3.15 Vector distributions of interlaminar resultant shear stress $(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2)^{1/2}$ superposed on deformed shapes of A_1 ($E_{33} = 0.015$, $\dot{E}_{33} = 10^{-5} \text{s}^{-1}$).

($[\pm 60]$) である。このような層間せん断応力の最大値と積層構成との関連性については、次節で詳細に検討する。つづいて、図 3.16 は A_1 における微視的層間面外垂直応力 σ_{11} の分布である。図 3.16 でも特徴的な応力分布が発生しているが、中でも $[\pm 30]$ と $[\pm 60]$ の分布様式に着目する。両者を比較すると、 $[\pm 30]$ では中央部に引張応力、周辺部に圧縮応力が作用しているが、 $[\pm 60]$ では応力分布が逆転し、中央部には圧縮応力、周辺部には引張応力が作用している。このような応力分布の逆転現象が発生する要因として、 $[\pm 30]$ では負の積層方向（面外方向）ポアソン比が生じるため、引張負荷を受ける際に、面外方向である y_1 軸方向へも膨張するためであると考えられる。このようなアングルプライ CFRP 積層板の負の積層方向ポアソン比に関しては、5 章で詳述する。

3. 2. 5 微視的層間せん断応力の積層構成依存性

前節で取り上げた微視的層間合成せん断応力の最大値 $[(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2)^{1/2}]^{\max}$ と、積層構成 $[\pm \theta]$ との関係を示したグラフが図 3.17 である。この結果より、最大層間せん断応力の明確な積層構成依存性が確認できる。 θ が小さい領域では、 θ が増加するに伴い最大層間せん断応力は急激に増加し、 $\theta = 35^\circ$ で最大値となる。その後、 $\theta > 35^\circ$ の領

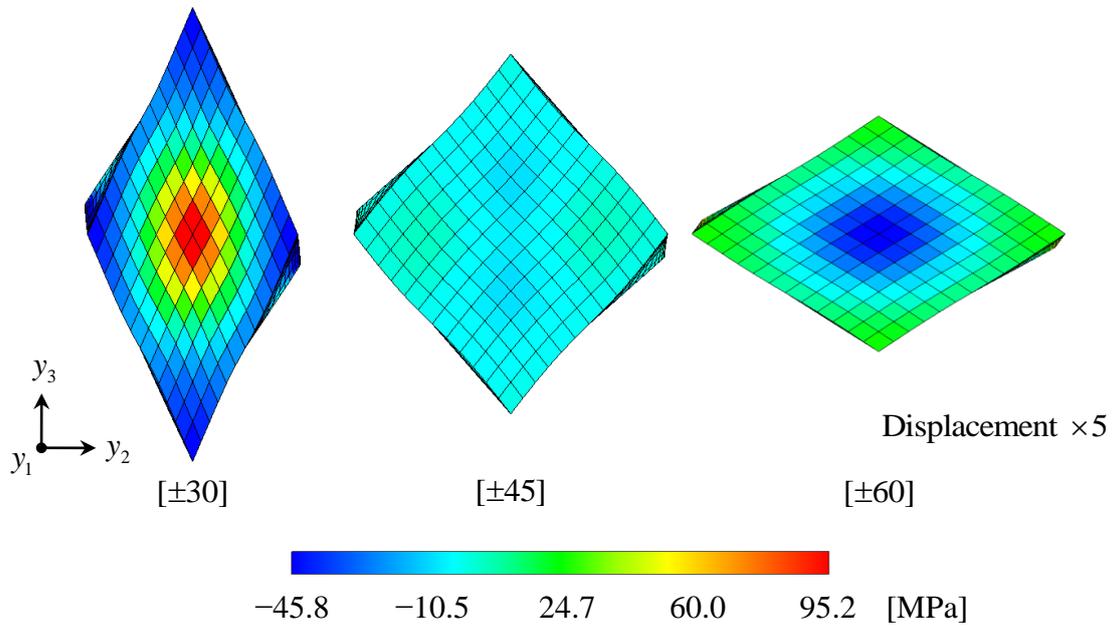


Fig. 3.16 Distributions of interlaminar out-of-plane normal stress σ_{11} superposed on deformed shapes of A_1 ($E_{33} = 0.015$, $\dot{E}_{33} = 10^{-5} \text{s}^{-1}$).

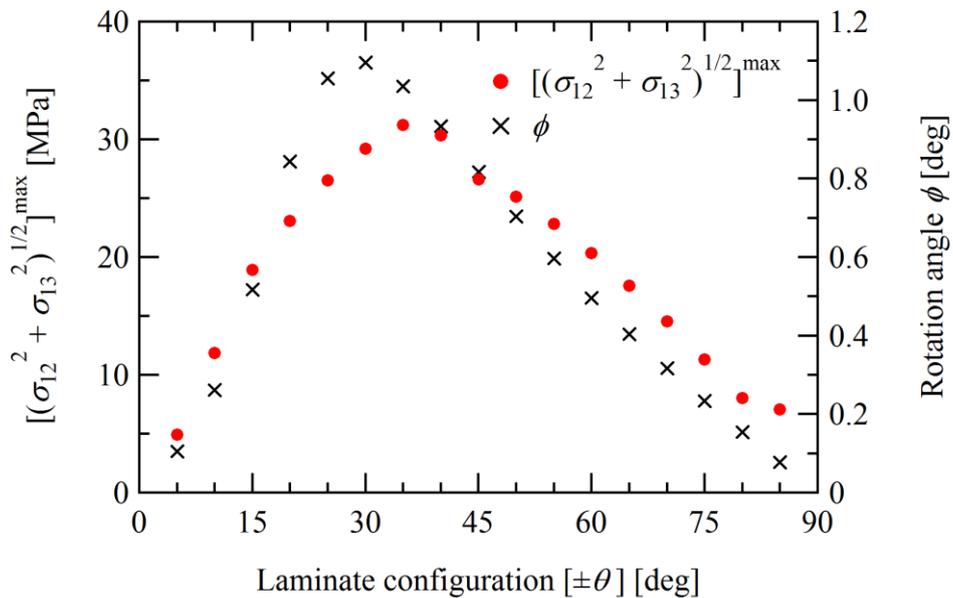


Fig. 3.17 Variations of maximum interlaminar resultant shear stress $[(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2)^{1/2}]^{\max}$, fiber rotation angle ϕ depending on laminate configuration $[\pm\theta]$ ($E_{33} = 0.015$, $\dot{E}_{33} = 10^{-5} \text{s}^{-1}$).

域では、 θ が増加するにつれて最大層間せん断応力は徐々に減少する。前述のように CFRP 積層板の層間せん断応力は、主に繊維回転に起因すると考えられるから、両者

の関連性を検討する．図 3.17 に記す×印のプロットは， $E_{33} = 0.015$ の際の A_1 の変形図より計算した，変形後の繊維回転角度 ϕ を示している．両者の結果は同様の傾向を示しており，層間に生じる微視的せん断応力は，主に繊維回転により引き起こされると言える．

しかし図 3.14 の巨視的応力-ひずみ関係からわかるように， θ が比較的小さい場合は，積層板に作用する巨視的応力 Σ_{33} そのものが高く ($[\pm 30]$ で約 390MPa)，このため積層板内部も必然的に高応力状態となる．この影響を取り除くため，最大層間せん断応力 $[(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2)^{1/2}]^{\max}$ を巨視的応力 Σ_{33} で除して無次元化した最大層間せん断応力比 $[(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2)^{1/2}]^{\max} / \Sigma_{33}$ を考える．この最大層間せん断応力比と積層構成との関係を示したグラフが図 3.18 である．この図からわかるように，巨視的応力との比を求めるとグラフの頂点は移動し， $\theta = 50^\circ$ で最大となる．この結果はすなわち， $\theta = 50^\circ$ 付近では，積層板に作用する巨視的応力が低い場合でも，微視的に見ると層間では高いせん断応力が発生し得ることを示唆している．

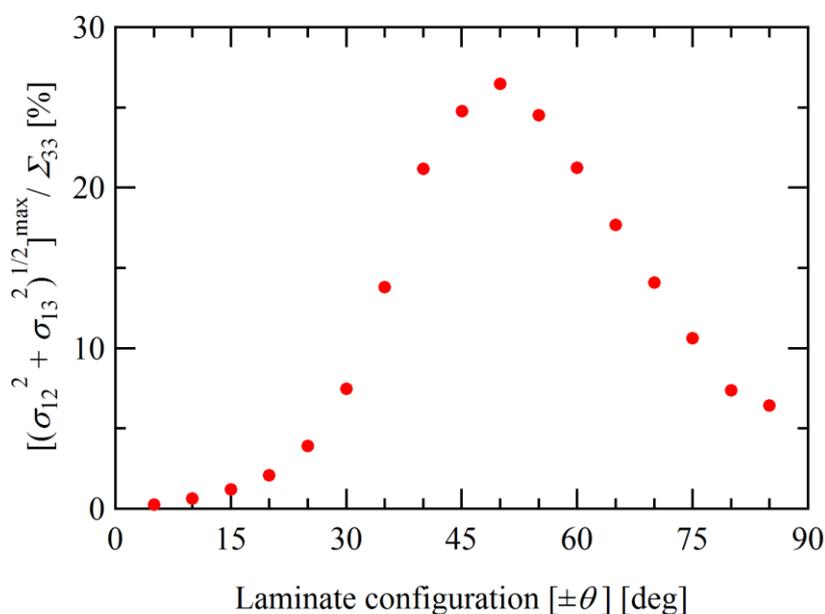


Fig. 3.18 Variation of maximum interlaminar resultant shear stress ratio $[(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2)^{1/2}]^{\max} / \Sigma_{33}$ depending on laminate configuration $[\pm\theta]$ ($E_{33} = 0.015$, $\dot{E}_{33} = 10^{-5} \text{ s}^{-1}$).

3. 2. 6 巨視的特性および層間微視的特性のひずみ速度依存性

図 3.19 は 3 種類のひずみ速度 ($\dot{E}_{33} = 10^{-3}, 10^{-5}, 10^{-7} \text{ s}^{-1}$) で解析した, $[\pm 30]$, $[\pm 45]$ および $[\pm 60]$ の巨視的応力-ひずみ関係を示している. なお, 図 3.19 に実線で示された $\dot{E}_{33} = 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ の結果は, 図 3.14 で示した結果と等しいものである. 図 3.19 より, $[\pm 30]$ の結果に着目すると, $E_{33} = 0.015$ の際の巨視的応力 Σ_{33} はそれぞれ約 420MPa ($\dot{E}_{33} = 10^{-3} \text{ s}^{-1}$), 約 390MPa ($\dot{E}_{33} = 10^{-5} \text{ s}^{-1}$), 約 360MPa ($\dot{E}_{33} = 10^{-7} \text{ s}^{-1}$) と, $\dot{E}_{33} = 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ の結果を基準として, $\dot{E}_{33} = 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ の結果は約 7.7% 上昇, $\dot{E}_{33} = 10^{-7} \text{ s}^{-1}$ の結果は約 7.7% 低下している. このように, ひずみ速度の変化に応じて巨視的応力-ひずみ関係も上下しており, アングルプライ CFRP 積層板の巨視的特性は, 明確なひずみ速度依存性を有することが確認できる.

つづいて層間の微視的特性に着目し, 最大層間せん断応力 $[(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2)^{1/2}]^{\max}$ と積層構成 $[\pm \theta]$ との関係を示したグラフが図 3.20 である. 例えば, $[\pm 30]$ の結果を見ると, $E_{33} = 0.015$ の際の $[(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2)^{1/2}]^{\max}$ はそれぞれ約 33MPa ($\dot{E}_{33} = 10^{-3} \text{ s}^{-1}$), 約 29MPa ($\dot{E}_{33} = 10^{-5} \text{ s}^{-1}$), 約 26MPa ($\dot{E}_{33} = 10^{-7} \text{ s}^{-1}$) と, $\dot{E}_{33} = 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ の結果に対してそれぞれ約 14% 上昇 ($\dot{E}_{33} = 10^{-3} \text{ s}^{-1}$), 約 10% 低下 ($\dot{E}_{33} = 10^{-7} \text{ s}^{-1}$) して

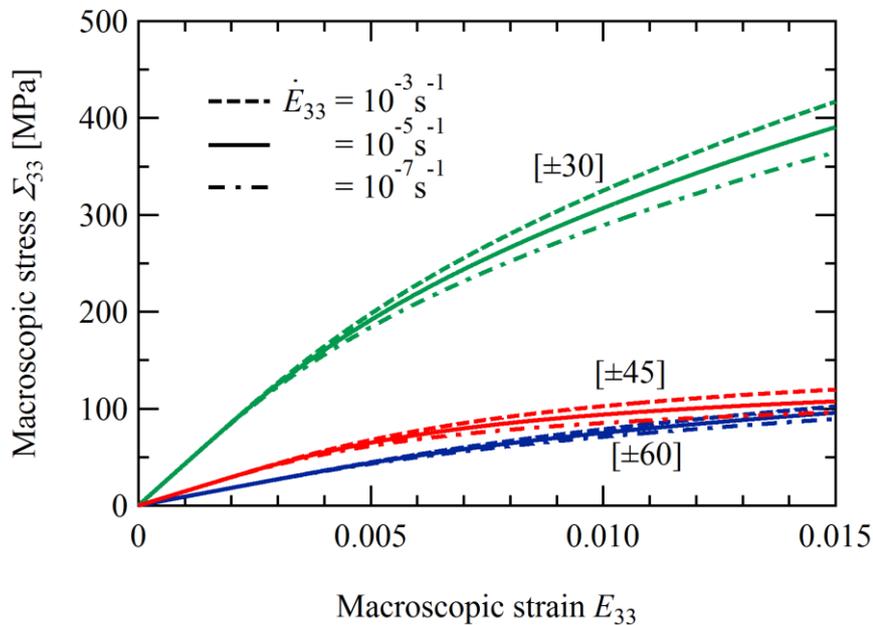


Fig. 3.19 Macroscopic stress-strain relationships of $[\pm 30]$, $[\pm 45]$ and $[\pm 60]$ angle-ply CFRP laminates at $\dot{E}_{33} = 10^{-3}, 10^{-5}$ and 10^{-7} s^{-1} .

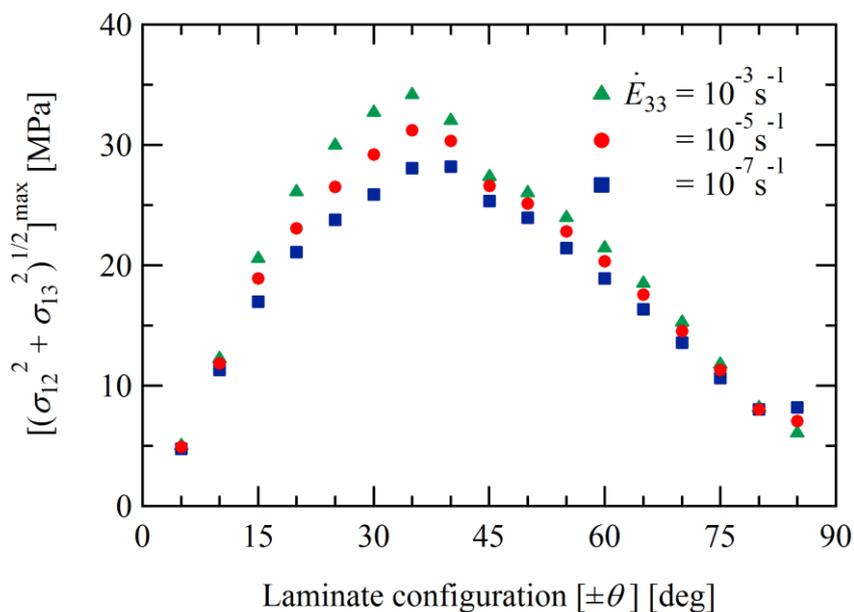


Fig. 3.20 Variation of maximum interlaminar resultant shear stress $[(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2)^{1/2}]^{\max}$ depending on laminate configuration $[\pm\theta]$ at $\dot{E}_{33} = 10^{-3}, 10^{-5}$ and 10^{-7} s^{-1} ($E_{33} = 0.015$).

いる. このように, $[(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2)^{1/2}]^{\max}$ に関してもひずみ速度依存性が確認でき, 特に, $15^\circ \leq \theta \leq 40^\circ$ の範囲で顕著に発現している.

一方, 図 3.21 は, 最大層間せん断応力比 $[(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2)^{1/2}]^{\max} / \Sigma_{33}$ と積層構成 $[\pm\theta]$ との関係を示すグラフである. この図を見ると, ひずみ速度の変化に伴うせん断応力比の変化は $40^\circ \leq \theta \leq 55^\circ$ でのみ観察され, 図 3.20 に示した $[(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2)^{1/2}]^{\max}$ と比べると, ひずみ速度依存性はかなり限定された範囲で発生していることがわかる.

3.3 擬似等方 CFRP 積層板

3.3.1 モデル化

これまでのところ, 擬似等方 CFRP 積層板を対象として, その微視的内部構造を踏まえて解析を実施した例は存在していない. この理由としては, 擬似等方 CFRP 積層板の微視的内部構造は非常に複雑であり, そのモデル化が困難であるためと考えられる. そこで本研究では, 解析モデルとして図 3.22 に示すような $[0/+60/-60]$ 擬似等方 CFRP 積層板を考える. 各ラミナの繊維軸方向は, 0° -ラミナが y_3 軸方向, $+60^\circ$ -およ

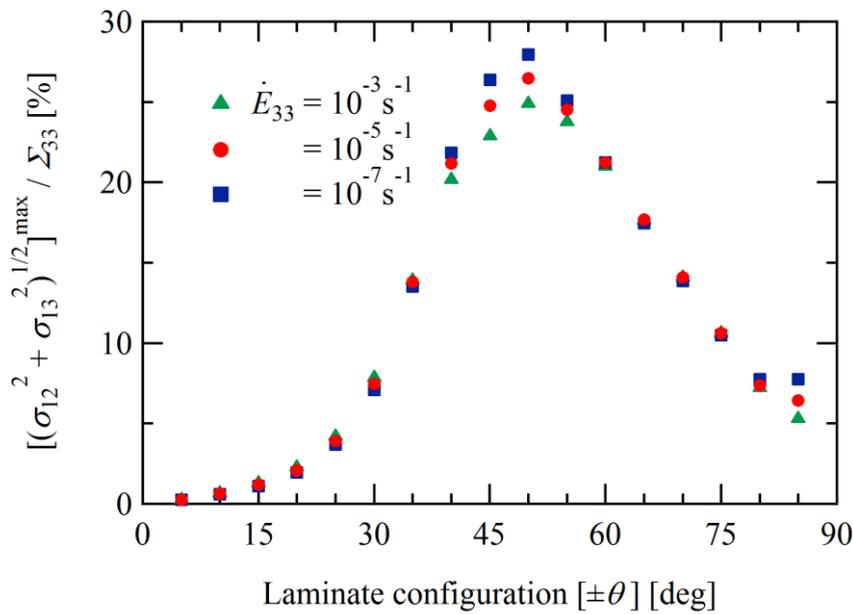


Fig. 3.21 Variation of maximum interlaminar resultant shear stress ratio $[(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2)^{1/2}]^{\max} / \Sigma_{33}$ depending on laminate configuration $[\pm\theta]$ at $\dot{E}_{33} = 10^{-3}$, 10^{-5} and 10^{-7} s^{-1} ($E_{33} = 0.015$).

び -60° -ラミナはそれぞれ y_3 軸方向より $\pm 60^\circ$ 回転した方向である. このような擬似等方積層板に対し, 図 3.22 中に示すような六角柱形状のユニットセル Y (および半ユニットセル \tilde{Y}) を定義する. この Y (\tilde{Y}) は隣り合う 2 本の炭素繊維を跨ぐように領域を定めている. 解析領域をこのような形状とすることで, 擬似等方 CFRP 積層板の微視的内部構造を隙間無く表現することができ, 均質化理論を用いた解析が可能となる. 本節では \tilde{Y} を解析領域とし, 図 3.23 に示すように各ラミナをそれぞれサブストラクチャ A_α , B_α および C_α ($\alpha = 1, 2, \dots, 16$) に分割し解析を実施する.

3.3.2 解析条件

解析に使用したサブストラクチャ A_α , B_α および C_α の有限要素モデルを図 3.24 に示す. いずれのサブストラクチャも節点数は 3517, 要素数は 3120, 繊維体積率は 56% である. 負荷条件は, $y_2 - y_3$ 面内で y_3 軸と成す角 ψ の方向に, 巨視的引張ひずみ速度 $\dot{E}_\psi = 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ とし, 負荷方向は $\psi = 0^\circ$, 30° とする.

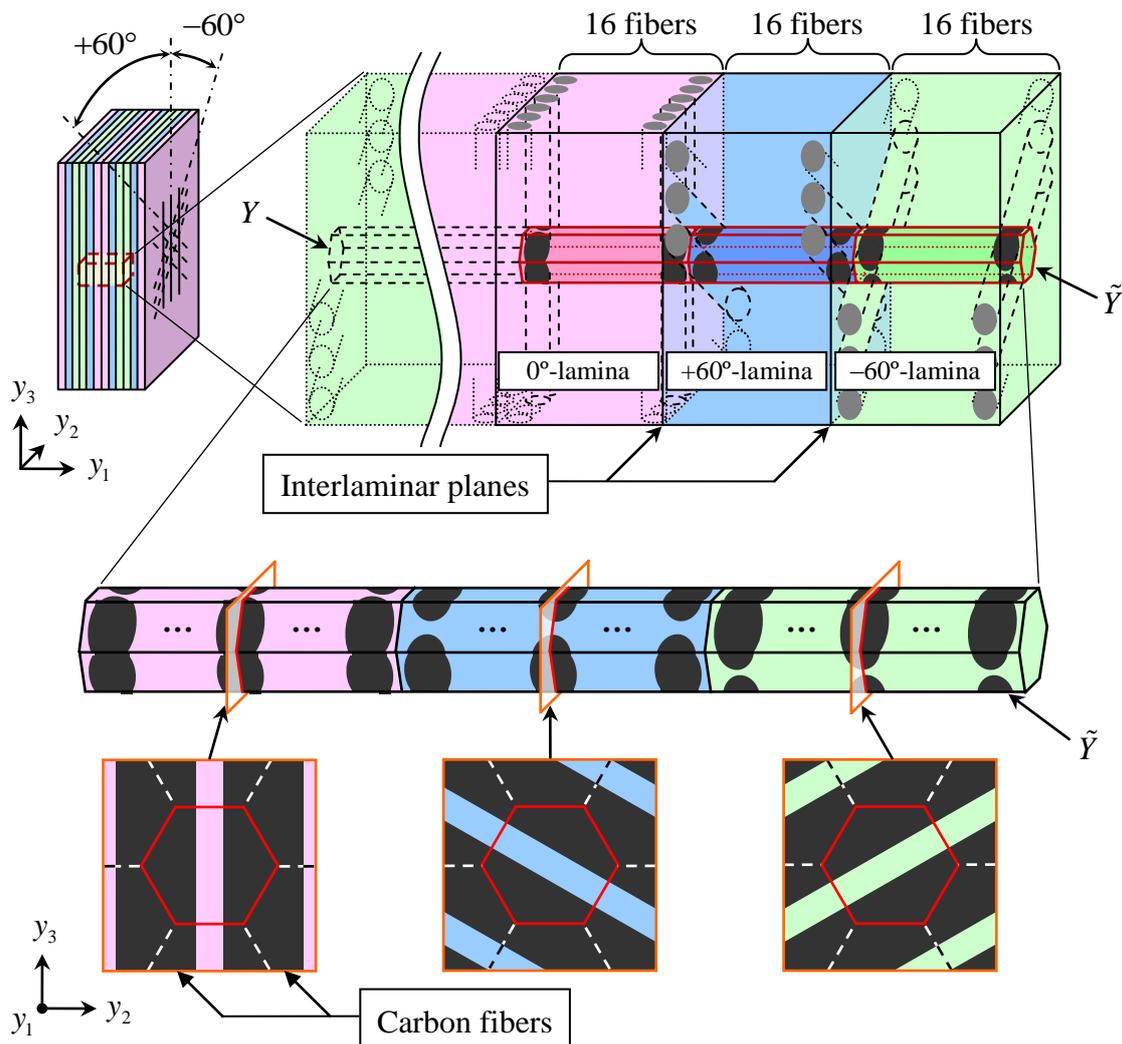


Fig. 3.22 $[0/+60/-60]_s$ quasi-isotropic CFRP laminate, unit cell Y and semiunit cell \tilde{Y} .

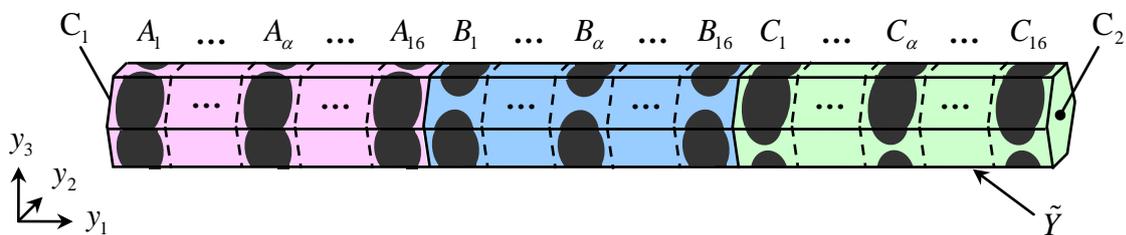


Fig. 3.23 Semiunit cell \tilde{Y} divided into substructures A_α , B_α and C_α ($\alpha = 1, 2, \dots, 16$).

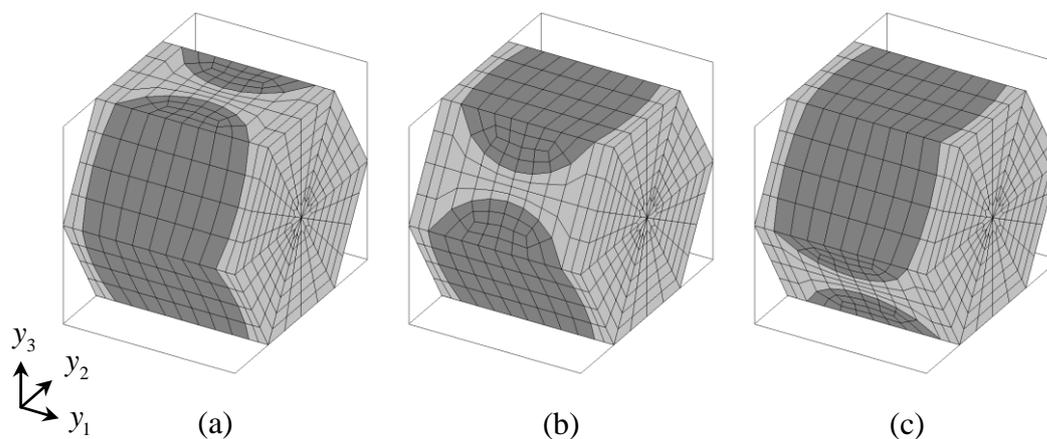


Fig. 3.24 Finite element models of substructures for quasi-isotropic CFRP laminate; (a) A_α , (b) B_α and (c) C_α ($\alpha=1, 2, \dots, 16$).

3.3.3 巨視的特性

図 3.25 は、解析により得られた擬似等方 CFRP 積層板の巨視的応力-ひずみ関係である。それぞれ赤実線が $\psi = 0^\circ$ 、青実線が $\psi = 30^\circ$ の解析結果で、同色のプロットが実験結果である。前節までの積層構成（クロスプライ・アングルプライ積層板）とは異なり、微視的特性としてエポキシに非線形パラメーターを付与しているにも関わら

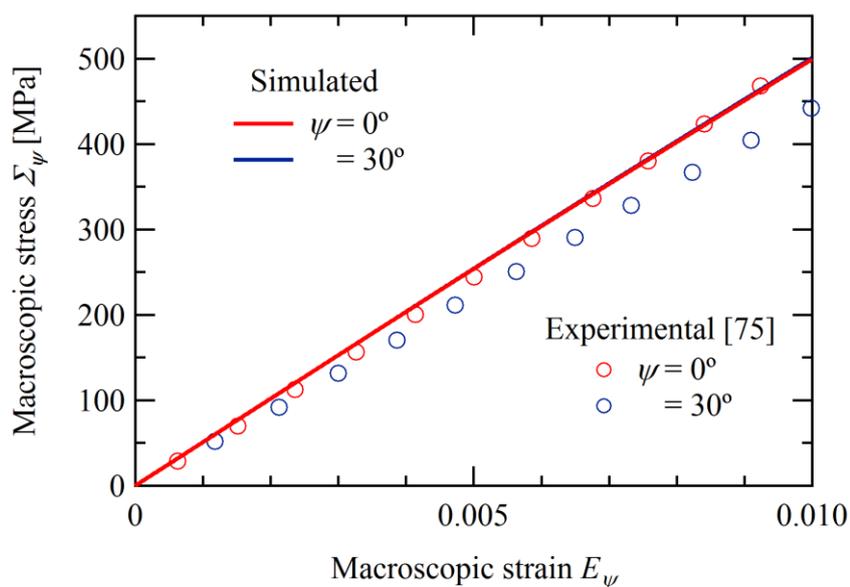


Fig. 3.25 Macroscopic stress-strain relationships of quasi-isotropic CFRP laminate ($\dot{E}_\psi = 10^{-5} \text{ s}^{-1}$).

ず、いずれの負荷方向でも、その巨視的特性は解析結果、実験結果ともに線形性を示している。また、解析結果と実験結果[75]は良好な一致を示していることから、本手法は擬似等方 CFRP 積層板に対しても適用が可能であると言える。

3.3.4 微視的層間応力分布

図 3.26 は、 $\psi = 0^\circ$ 、 $E_\psi = 0.01$ の際の微視的層間合成せん断応力分布図である。図 3.26(a)は $0^\circ/+60^\circ$ -層間、図 3.26(b)は $+60^\circ/-60^\circ$ -層間の分布を表している。図 3.26 より、 $0^\circ/+60^\circ$ -層間では $+60^\circ$ -ラミナの繊維軸と平行なベクトル分布、 $+60^\circ/-60^\circ$ -層間では楕円状のベクトル分布が発生している。このような分布形状の違いは、隣り合うラミナ同士の組合せによるもので、 $0^\circ/+60^\circ$ -層間では $+60^\circ$ -ラミナ内部のみで繊維回転が生じるのに対して、 $+60^\circ/-60^\circ$ -層間では両ラミナで繊維回転が発生するためであると考えられる。また図 3.27 は、 $\psi = 30^\circ$ の際の層間せん断応力分布を示している。これらの結果より、隣り合う両ラミナで繊維回転が発生する場合、一方のラミナのみで繊維回転が生じる場合と比較して高い微視的層間せん断応力が発生することがわかる (図 3.26(b)および図 3.27(a))。

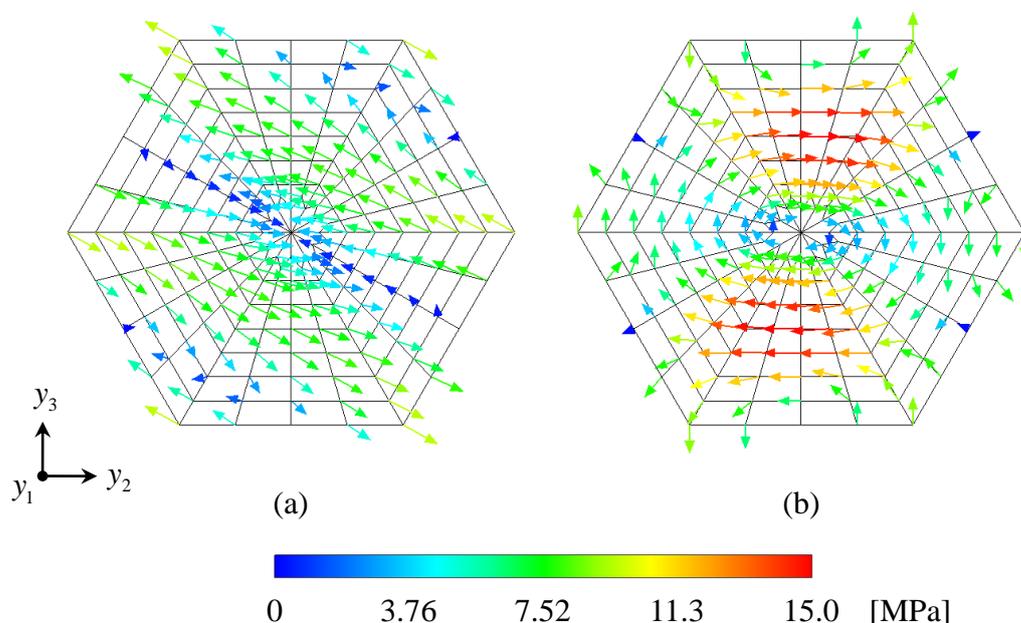


Fig. 3.26 Vector distributions of interlaminar resultant shear stress $(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2)^{1/2}$ at (a) $0^\circ/+60^\circ$ -interlaminar plane and (b) $+60^\circ/-60^\circ$ -interlaminar plane ($\psi = 0^\circ$, $E_\psi = 0.01$, $\dot{E}_\psi = 10^{-5} \text{s}^{-1}$).

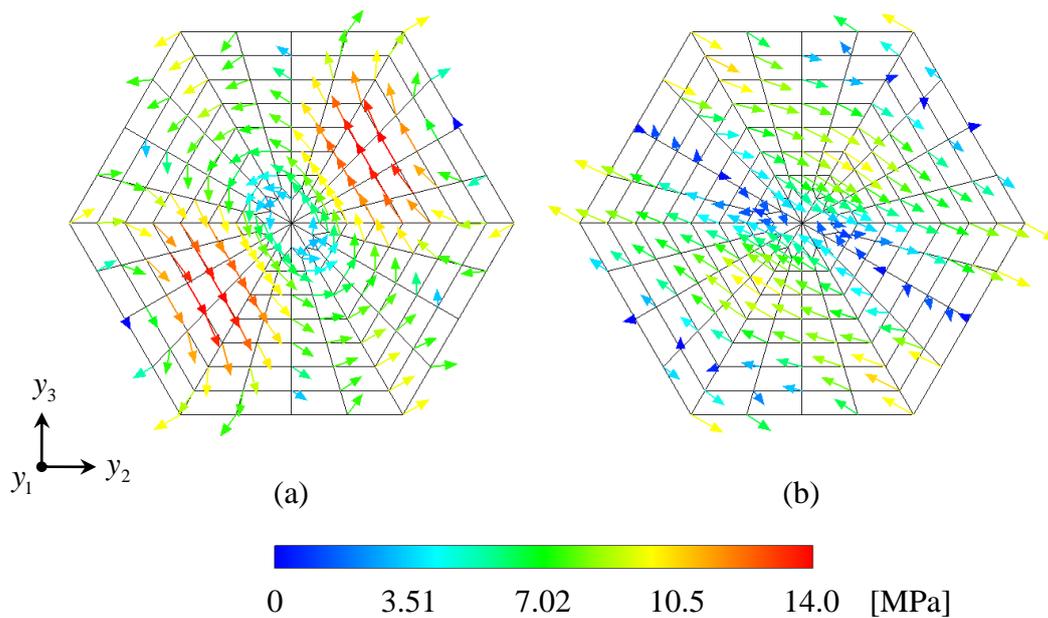


Fig. 3.27 Vector distributions of interlaminar resultant shear stress $(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2)^{1/2}$ at (a) $0^\circ/+60^\circ$ -interlaminar plane and (b) $+60^\circ/-60^\circ$ -interlaminar plane ($\psi = 30^\circ$, $E_\psi = 0.01$, $\dot{E}_\psi = 10^{-5} \text{ s}^{-1}$).

3.4 まとめ

本章では、クロスプライ・アングルプライ・擬似等方 CFRP 積層板の 3 種類の CFRP 積層板を対象として、層間を有する 3 次元ユニットセルを定義し、均質化理論に基づく提案手法により弾-粘塑性層間応力解析を実施した。解析の結果、CFRP 積層板の層間では、炭素繊維とエポキシからなる微視構造に起因して、複雑な微視的層間応力分布が生じることを示した。特に、ラミナが非主軸方向負荷を受ける際には、繊維が負荷方向に向かって回転する繊維回転が引き起こされるため、巨視的には単軸引張負荷のみを与えているにも関わらず、層間では顕著な微視的せん断応力が発生した。また、この微視的層間せん断応力の最大値は、顕著な積層構成依存性を有していることが示された。本章で提示した微視的層間応力分布は、CFRP 積層板の微視構造を考慮することで初めて得られるものであり、提案手法の有用性が示されたと言える。

第4章

CFRP 積層板のフリーエッジ解析^[86]

1 章で述べたように、CFRP 積層板のフリーエッジでは、積層板内部とは大きく異なる微視的応力・ひずみ場が発生することが知られている。特に、フリーエッジに繊維／母材界面や層間などの異種材料境界面が露出している場合、各構成材料の変形特性の違いに起因した変形の不連続が発生し、顕著な微視的応力・ひずみ集中が生じる。このような応力・ひずみ集中は CFRP 積層板の損傷・破壊を引き起こし得るため、CFRP 積層板のフリーエッジ特性を明らかにすることは、学術的のみならず工学的にも重要なテーマである。CFRP 積層板のフリーエッジ問題に関しては、主に解析的手法に基づく結果が多数報告されているが[19-21]、これらの文献で用いられた手法では、フリーエッジで局所的（微視的）に発生する現象を十分に評価できているとは言えない。また、CFRP 積層板は 3 次元微視構造を有しており、フリーエッジ近傍の微視的応力・ひずみ分布はその影響を強く受けることが容易に予想されるが、このような 3 次元微視構造を考慮したフリーエッジ解析は報告されていない。そこで本章では、均質化理論に基づくフリーエッジ解析手法を新規に提案し、フリーエッジを有する 3 次元ユニットセルを用いることで、CFRP 積層板のフリーエッジにおける微視的応力・ひずみ分布を 3 次元的に解析する。また、得られた結果に基づき、フリーエッジが微視的応力・ひずみ分布に与える影響を考察する。

4.1 均質化理論に基づくフリーエッジ解析手法

4.1.1 フリーエッジを有する CFRP 積層板のモデル化

本節では簡略化のため、解析モデルとして、図 4.1 に示すようなフリーエッジを有する一方向 CFRP が、 $y_2 - y_3$ 面内巨視的引張負荷を受ける場合を考える。このモデルは y_2 軸および y_3 軸方向には無限長であるが、 y_1 軸方向には有限の長さであり、すなわち、 y_1 軸方向にフリーエッジを有している。繊維軸方向は y_1 軸方向とし、繊維配列は $y_2 - y_3$ 面内で正方配列とする。このようなモデルに対し、周期構造の最小構成単位として、ユニットセルを図中に示す Y のように定める。

4.1.2 均質化理論のフリーエッジ問題への拡張

2 章で述べた時間依存材料に関する均質化理論は、微視的周期構造を有する無限体に対して理論展開されており、そのままでは CFRP 積層板のフリーエッジ問題に適用することはできない。そこで本節では、フリーエッジの境界積分項を検討し、前述の均質化理論を、フリーエッジを有する解析モデルに対しても適用可能な形へと発展させる。

図 4.1 のようなフリーエッジを有するユニットセル Y の微視的応力釣合式は、式(2.8)と同様に

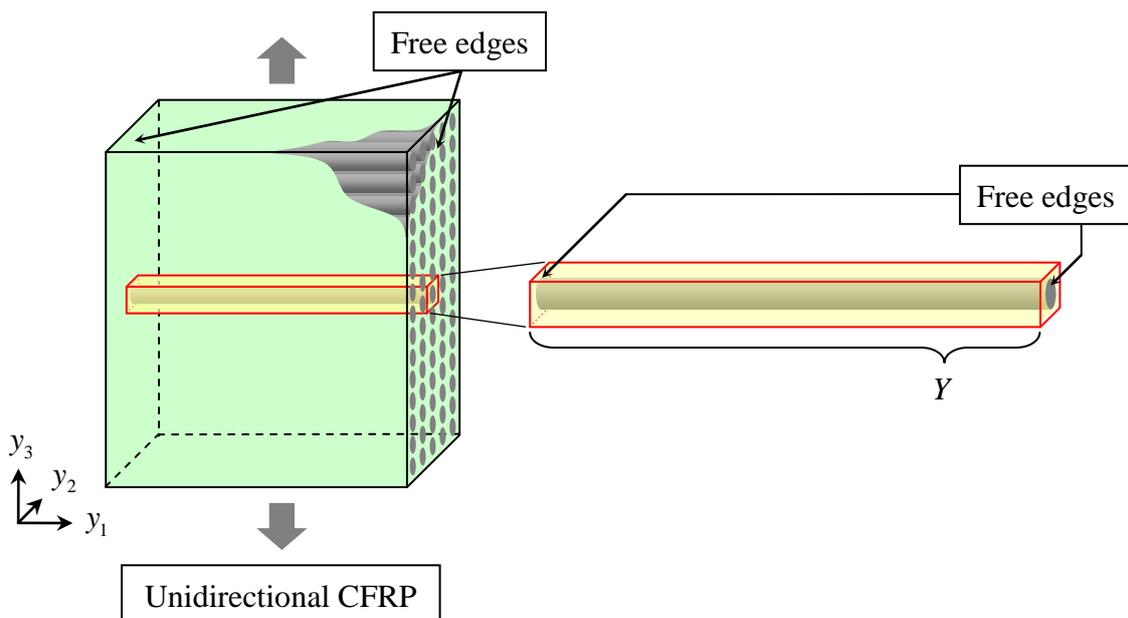


Fig. 4.1 Unidirectional CFRP with free edges and unit cell Y .

$$\dot{\sigma}_{ij,j} = 0 \quad (4.1)$$

と表現される．また，式(4.1)の弱形式もまた，式(2.9)と同じく

$$\int_Y \dot{\sigma}_{ij} v_{i,j} dY - \int_{\Gamma} \dot{\sigma}_{ij} n_j v_i d\Gamma = 0 \quad (4.2)$$

である．ここで，式(4.2)の境界積分項を検討する．ユニットセル Y の境界 Γ を，図4.2に示すように，材料内部境界面である境界 Γ_A と，フリーエッジである境界 Γ_B に分割する．まず内部境界である境界 Γ_A は，2章で取り上げた従来の均質化理論と同様に Y -周期境界面であるから，向かい合う境界面で $\dot{\sigma}_{ij}$ および v_i は周期的に分布し， n_j が反対向きとなる．したがって，境界 Γ_A の境界積分項は

$$\int_{\Gamma_A} \dot{\sigma}_{ij} n_j v_i d\Gamma = 0 \quad (4.3)$$

となる．これに対してフリーエッジである境界 Γ_B では，構造の連続性が失われるため，従来の均質化理論を適用することはできない．そこで，フリーエッジにおける各成分の詳細な考察を行う．まず，フリーエッジの $\dot{\sigma}_{ij}$ および v_i は，フリーエッジ面内への投影を考えると，向かい合う面で Y -周期性を有することが確認できる（図4.2）．そのため，従来の Y -周期境界面と同様に，フリーエッジ面内成分の境界積分項は零となる．

$$\int_{\Gamma_B} \dot{\sigma}_{ij} n_j v_i d\Gamma = 0 \quad (ij = 22, 33, 23) \quad (4.4)$$

これに対してフリーエッジ面外成分に着目すると，今回は $y_2 - y_3$ 面内負荷を想定して

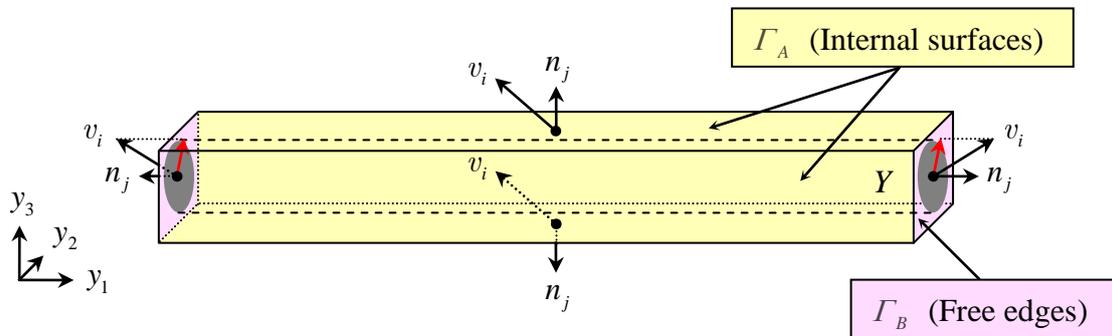


Fig. 4.2 Unit cell Y and boundary surfaces, Γ_A (internal surfaces) and Γ_B (free edges).

いることから、 y_1 軸方向に対しては荷重が作用しないため、微視的応力速度 $\dot{\sigma}_{ij}$ について

$$\dot{\sigma}_{ij} = 0 \quad (ij = 11, 12, 31) \quad (4.5)$$

が成立する。したがって、フリーエッジ面外成分も、結果として境界積分項は次式の通り零となる。

$$\int_{\Gamma_B} \dot{\sigma}_{ij} n_j v_i d\Gamma = 0 \quad (ij = 11, 12, 31) \quad (4.6)$$

以上の結果から、フリーエッジ（境界 Γ_B ）の境界積分項に関しても

$$\int_{\Gamma_B} \dot{\sigma}_{ij} n_j v_i d\Gamma = 0 \quad (4.7)$$

と導かれる。これらを総合すると、式(4.2)の境界積分項は、フリーエッジを有するユニットセル Y の境界全体で、次のように零となる。

$$\int_{\Gamma} \dot{\sigma}_{ij} n_j v_i d\Gamma = \int_{\Gamma_A} \dot{\sigma}_{ij} n_j v_i d\Gamma + \int_{\Gamma_B} \dot{\sigma}_{ij} n_j v_i d\Gamma = 0 \quad (4.8)$$

以上の結果から、式(2.10)と同じく

$$\int_Y \dot{\sigma}_{ij} v_{i,j} dY = 0 \quad (4.9)$$

が得られる。これに式(2.2)および式(2.5)を代入することで、従来の無限体に対する均質化理論と同様に境界値問題

$$\int_Y c_{ijpq} \chi_{p,q}^{kl} v_{i,j} dY = - \int_Y c_{ijkl} v_{i,j} dY \quad (4.10)$$

$$\int_Y c_{ijpq} \varphi_{p,q} v_{i,j} dY = \int_Y c_{ijkl} \beta_{kl} v_{i,j} dY \quad (4.11)$$

が導かれる。したがって、解析対象がフリーエッジを有する場合でも、これまでとまったく同じ手順で以降の式展開が可能であり、本手法を用いることで、巨視的負荷を受ける CFRP 積層板のフリーエッジにおける微視的応力分布を解析できる。なお、同様の検討を行うことで、半ユニットセル \tilde{Y} に対しても本手法が適用可能であることが示される。

4. 1. 3 フリーエッジにおける境界条件の検討

2章で述べたように、境界値問題(4.10), (4.11)は一般に有限要素法を用いて解くことが可能であるから、離散化することで次式が得られる.

$$K\chi^{kl} = F^{kl} \quad (kl=11, 22, \dots, 31) \quad (4.12)$$

$$K\phi = G \quad (4.13)$$

有限要素法により式(4.12), (4.13)の解を求める場合、適切な境界条件を選択・適用することが必要となる. 本手法によりフリーエッジ解析を実施する際の、ユニットセル Y の境界条件としては、前節で述べた境界積分項の検討内容を踏まえ、材料内部境界面である境界 Γ_A には従来の Y -周期境界条件を適用する. 一方、フリーエッジである境界 Γ_B には、フリーエッジ面内成分は Y -周期境界条件、面外成分は微視的応力速度 $\dot{\sigma}_{ij}$ を零とするために自由変形条件とし、これらの組み合わせとなる境界条件を適用する. また、半ユニットセル \tilde{Y} を解析領域として用いる際は、上記の境界条件に加えて、フリーエッジ面内成分および点対称境界面には、境界面中央点 C_1 , C_2 に関する点対称境界条件を付加する.

4. 2 クロスプライ CFRP 積層板の弾性フリーエッジ解析

4. 2. 1 解析条件

図 4.3 に示すような、フリーエッジを有する[0/90]クロスプライ CFRP 積層板を考える. このモデルは y_1 軸方向にフリーエッジを有しており、 y_2 軸方向を積層方向とする. 各ラミナの繊維軸方向は y_3 軸方向(0°-ラミナ)および y_1 軸方向(90°-ラミナ)とする. 解析領域として、図 4.3 に示すような、層間およびフリーエッジを含む幅広の領域のユニットセル Y 、および Y の半分の領域である半ユニットセル \tilde{Y} を定義する. この \tilde{Y} を、図 4.4 に示すようにサブストラクチャ A_α^β および B_α^β に分割する. ここで、添字 α , β はそれぞれ y_1 軸方向および y_2 軸方向の番号を示している. 本解析では計算コストの制約により、この \tilde{Y} は y_1 軸方向に8個、 y_2 軸方向に16個のサブストラクチャから構成されている. 解析に用いたサブストラクチャ A_α^β および B_α^β ($\alpha, \beta=1, 2, \dots, 8$)の有限要素モデルを図 4.5 に示す. 材料定数は表 3.1 に示した値を使用するが、エポキシは弾性パラメーターのみ(E_m , ν_m)を使用する.

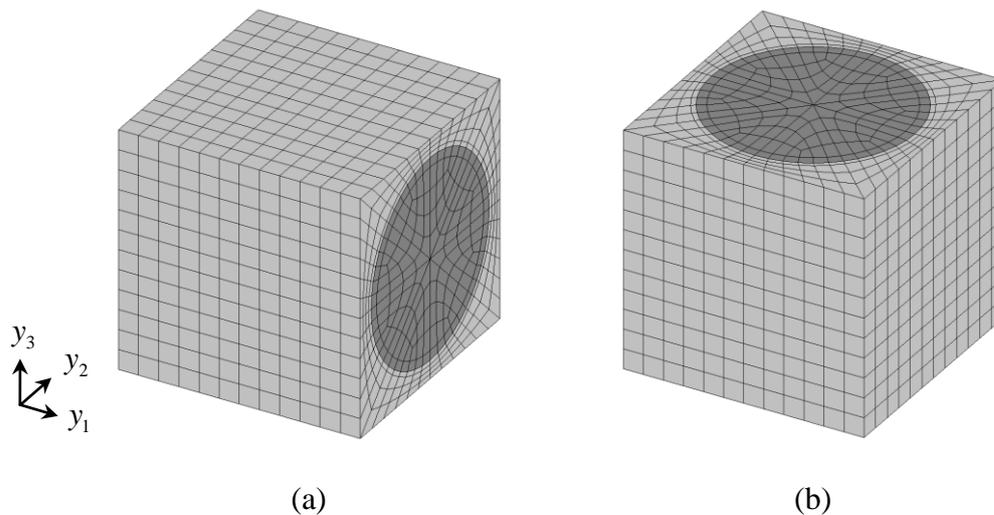


Fig. 4.5 Finite element models of substructures for cross-ply CFRP laminate;
 (a) A_{α}^{β} and (b) B_{α}^{β} ($\alpha, \beta = 1, 2, \dots, 8$).

4. 2. 2 解析結果

本節ではまず，クロスプライ CFRP 積層板のフリーエッジにおける微視的変形に着目する．図 4.6 は引張負荷 $E_{33} = 0.005$ を受けた際のフリーエッジの微視的変形図で，変位を 30 倍に拡大して描いてある．この変形図から， 0° -ラミナではポアソン効果による負荷直交方向への収縮が見られるのに対して， 90° -ラミナでは炭素繊維が負荷直交方向の変形を妨げるため，両者の変形特性の違いに起因する変形の不連続が，フリーエッジの層間近傍で発生している様子が確認できる．ここで，フリーエッジの層間を有するサブストラクチャとして，サブストラクチャ B_8^1 の微視的変形図を図 4.7 に示す．図 4.7(a) は B_8^1 を上から観察した変形図，図 4.7(b) は B_8^1 の層間面を横から観察した変形図である．図 4.7(a) からは，フリーエッジの層間近傍で，隣の 90° -ラミナに引きずられるようにして発生した変形の様子が，図 4.7(b) からは， 90° -ラミナに含まれる炭素繊維によって引き起こされているフリーエッジのわん曲の様子が確認できる．したがって，クロスプライ CFRP 積層板のフリーエッジでは，層間近傍で各ラミナの相互作用による局所的な変形が発生すると言える．

つづいて，半ユニットセル \tilde{Y} 内部の微視的層間応力分布を検討する． \tilde{Y} を構成するサブストラクチャのうち，フリーエッジから最も離れた $A_1^4 - B_1^1$ 境界面，フリーエッジからサブストラクチャ 1 個分離れた $A_4^4 - B_1^1$ 境界面，およびフリーエッジを有する

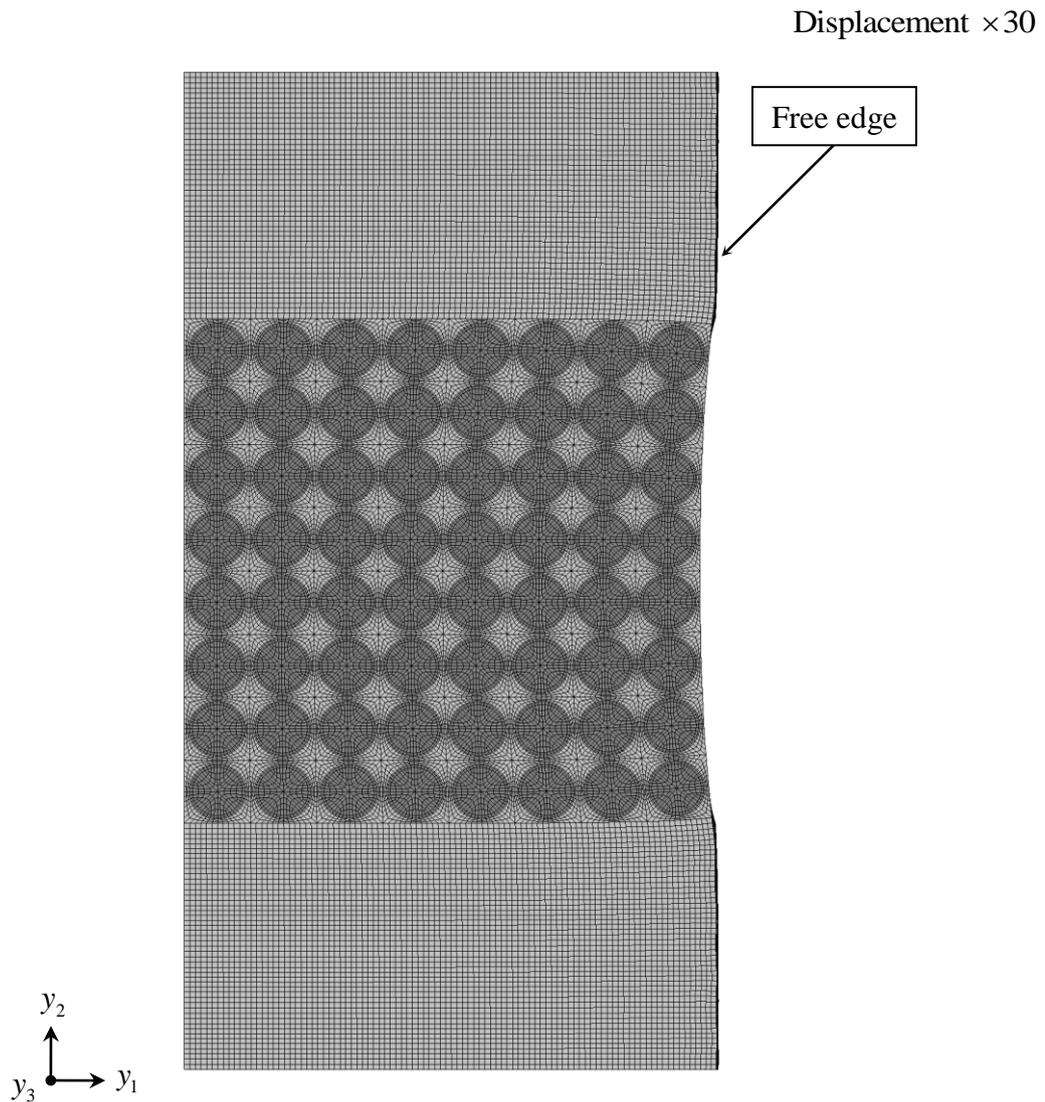


Fig. 4.6 Deformed shape of semiunit cell \tilde{Y} ($E_{33} = 0.005$).

$A_8^4 - B_8^4$ 境界面を対象として，微視的層間合成せん断応力 $(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2)^{1/2}$ の分布を図 4.8 に示す．これらの結果から，フリーエッジの層間では顕著な微視的せん断応力が発生しているが（図 4.8(c)），フリーエッジからわずかに離れるとこのようなせん断応力は減少し（図 4.8(b)），積層板内部ではせん断応力はほとんど生じないことがわかる（図 4.8(a)）．また，図 4.9 は同じ境界面の微視的層間面外垂直応力 σ_{22} の分布図であり，フリーエッジ近傍（図 4.9(c)）では，積層板内部（図 4.9(a)）とは異なる応力分布が生じている．なお，図 4.8(a)および図 4.9(a)の応力分布は，従来の均質化理論を用いた際の解析結果[78]と同様の応力分布を示している．以上の結果から，層間の微視的応力分

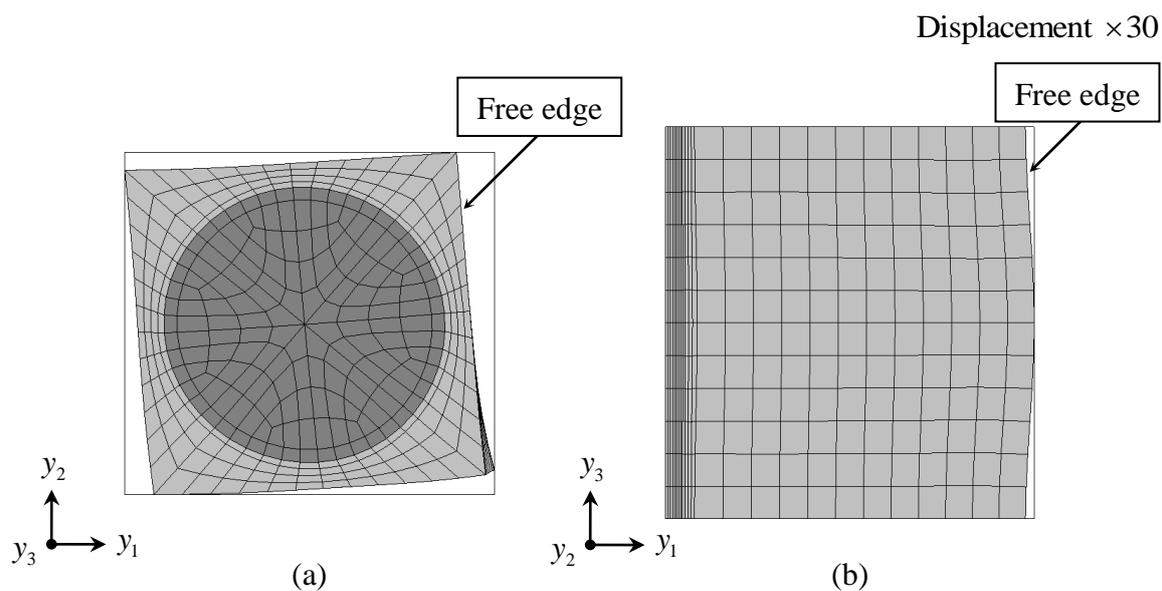


Fig. 4.7 Deformed shapes of substructure B_8^1 ; (a) upper surface and (b) interlaminar surface ($E_{33} = 0.005$).

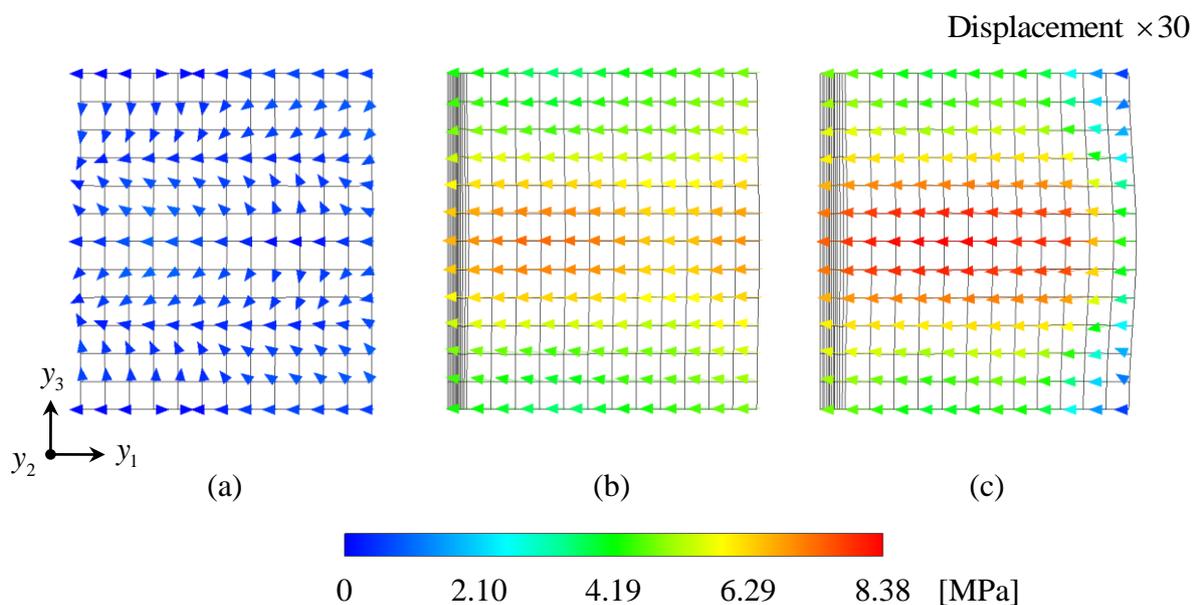


Fig. 4.8 Vector distributions of interlaminar resultant shear stress $(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2)^{1/2}$ at (a) B_1^1 , (b) B_7^1 and (c) B_8^1 ($E_{33} = 0.005$).

布は、フリーエッジでは複雑に発生するが、このような応力分布が発生する範囲は非常に局所的であることが明らかとなった。

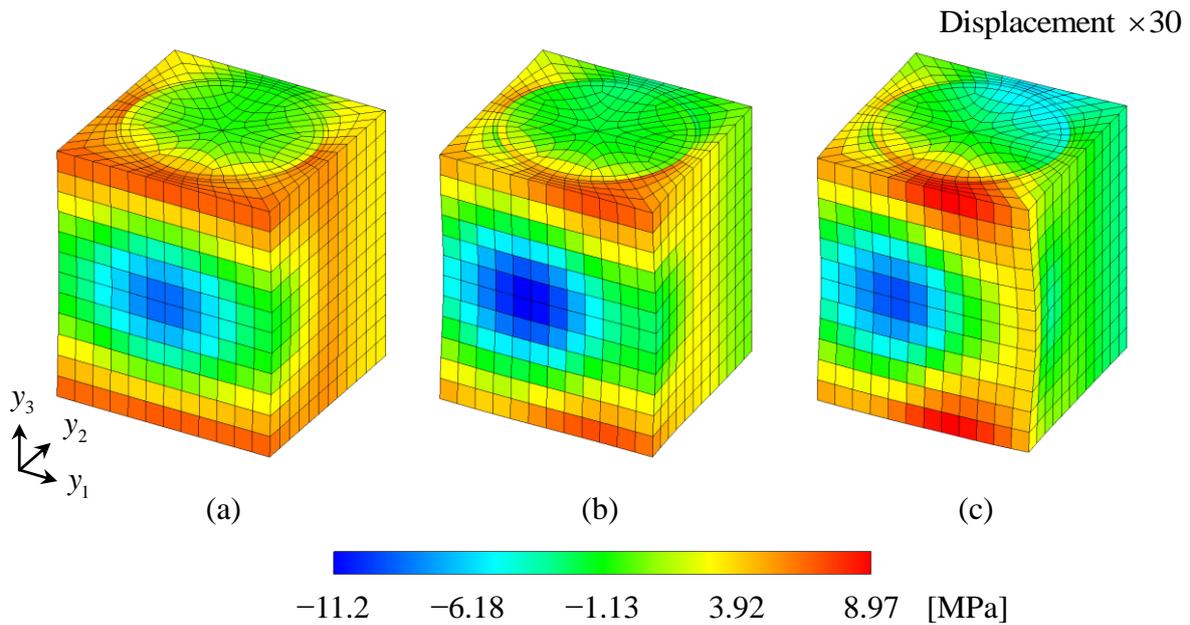


Fig. 4.9 Distributions of interlaminar out-of-plane normal stress σ_{22} at (a) B_1^I , (b) B_7^I and (c) B_8^I ($E_{33} = 0.005$).

4.3 一方向 CFRP の弾-粘塑性フリーエッジ解析

4.3.1 解析条件

本解析では図 4.10 に示すような、フリーエッジを有する一方向 CFRP を考える。このモデルは図 4.1 と同様に、 y_1 軸方向にフリーエッジを有しており、 y_2 軸、 y_3 軸方向には無限長であるとする。繊維軸方向は y_1 軸方向とし、繊維配列は $y_2 - y_3$ 面内で正方配列とする。このモデルに対し、解析領域として、図中に示すようなフリーエッジを有するユニットセル Y および半ユニットセル \tilde{Y} を定義する。本解析も同様に \tilde{Y} を解析領域とし、 N 個の立方体サブストラクチャ A_α に分割し解析を行う。

解析には主に図 4.11(a) に示すサブストラクチャ A_α ($\alpha = 1, 2, \dots, N$) を使用する。この有限要素モデルの節点数、要素数はそれぞれ 5005, 4320 であり、繊維体積率は 56% である。また、4.3.5 節では、フリーエッジ近傍の応力集中を調査するため、フリーエッジを有するサブストラクチャ A_N を、図 4.11(b) に示すような応力集中評価箇所を詳細に有限要素分割したモデルに置き換えて解析する。この詳細に有限要素分割したモデルは、節点数が 30446, 要素数は 27848 である。材料定数は前章と同じく表 3.1 の値を使用する。負荷条件は、繊維軸直交方向引張負荷を考え、 y_3 軸方向に巨視的引張ひずみ速度 $\dot{E}_{33} = 10^{-5} \text{s}^{-1}$ とし、巨視的平面応力条件のもとに解析を行う。

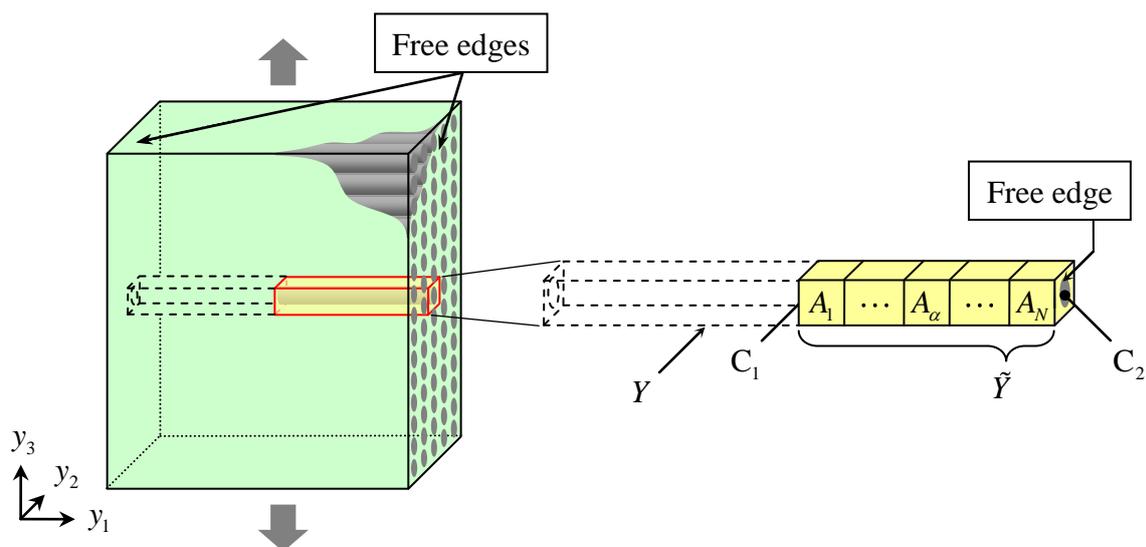


Fig. 4.10 Unidirectional CFRP with free edges, unit cell Y and semiunit cell \tilde{Y} divided into substructures A_α ($\alpha = 1, 2, \dots, N$).

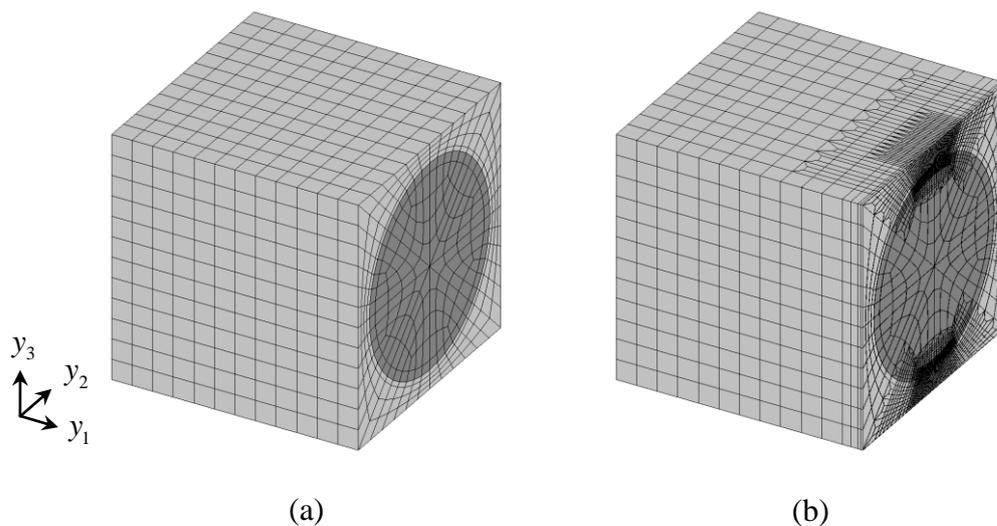


Fig. 4.11 Finite element models of substructures A_α for unidirectional CFRP; (a) coarse mesh model ($\alpha = 1, 2, \dots, N$) and (b) fine mesh model (A_N).

4. 3. 2 解析領域サイズの検討

半ユニットセル \tilde{Y} を構成するサブストラクチャ数 N は、解析を行う際に任意に定めることが可能であるが、次の現象に留意する必要がある。

- N を小さく設定した場合、すなわちフリーエッジ間距離が近い場合は、両フリー

エッジの相互干渉が発生し、CFRP 積層板の種々の特性に影響を及ぼす可能性がある。

- N を大きく設定すると、より実現象に則した解析が可能となるが、計算コストは莫大なものとなる。

したがって、 N を変化させて比較解析を行い、一方向 CFRP の巨視的材料特性がフリーエッジ間距離（積層板厚さ）に依存してどのように変化するかを調べた上で、 N を決定することとする。

図 4.12-4.14 は、 N を変化させた際の、引張負荷方向の巨視的ヤング率 E_3 、および引張方向である y_3 軸方向ひずみに対する y_1 軸あるいは y_2 軸方向ひずみの割合を表す巨視的ポアソン比 ν_{31} と ν_{32} の変化の様子をそれぞれ示している。また、各図中の破線は、従来の均質化理論に基づく無限体の解析結果である。これらの結果から、 N が増加する、すなわちフリーエッジ間距離が広がるにつれて、両フリーエッジの相互干渉が減少し、一方向 CFRP の巨視的特性は、従来の均質化理論を用いて解析した無限長を有するモデルの解析結果へと収束することがわかる。また図 4.15 は、 N を変化させた際の、巨視的引張応力 Σ_{33} の変化の様子を示している。この場合も、図 4.12-4.14 と同様に、 N が増加するにつれて無限長を有する場合の解析結果に収束することがわ

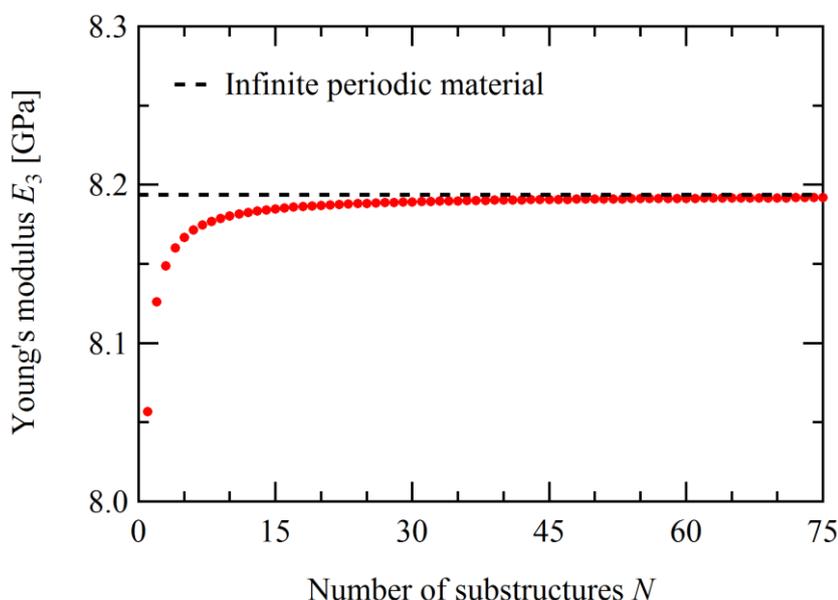


Fig. 4.12 Relationship between macroscopic Young's modulus E_3 and number of substructures N .

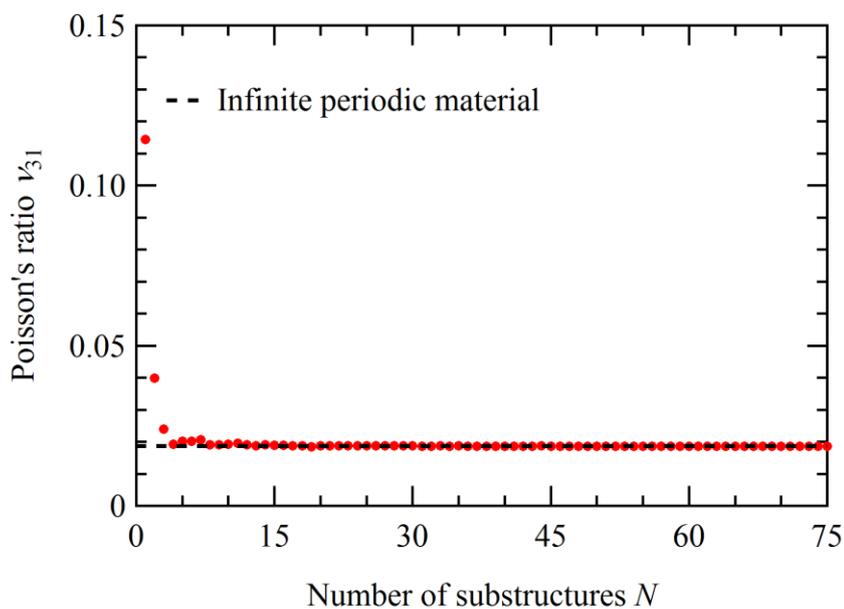


Fig. 4.13 Relationship between macroscopic Poisson's ratio ν_{31} and number of substructures N .

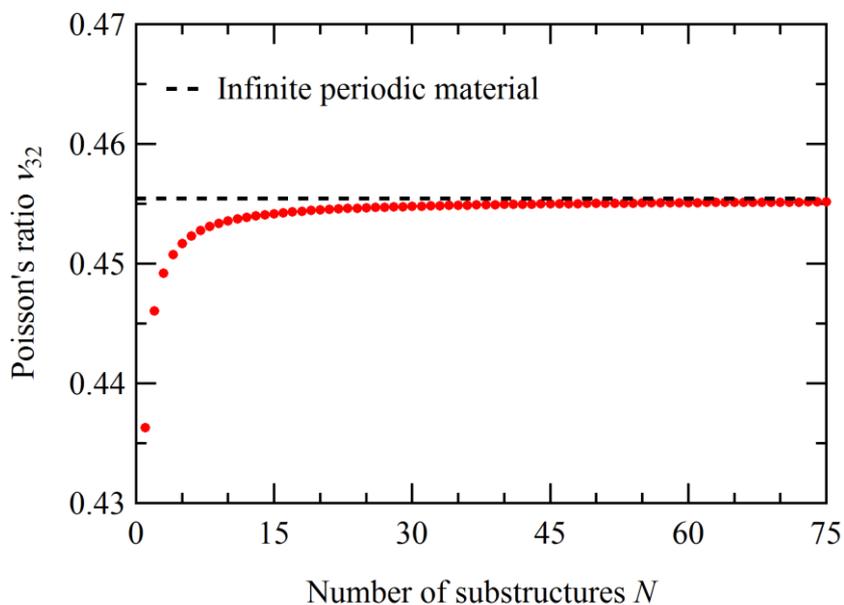


Fig. 4.14 Relationship between macroscopic Poisson's ratio ν_{32} and number of substructures N .

かる。これらの結果から、ある程度以上のサブストラクチャ数 N を設定することで、実際の一方向 CFRP の力学挙動を模擬することが可能であると考えられる。

そこで、サブストラクチャ数が N の場合と $N-1$ の場合とで、半ユニットセル \tilde{Y} の

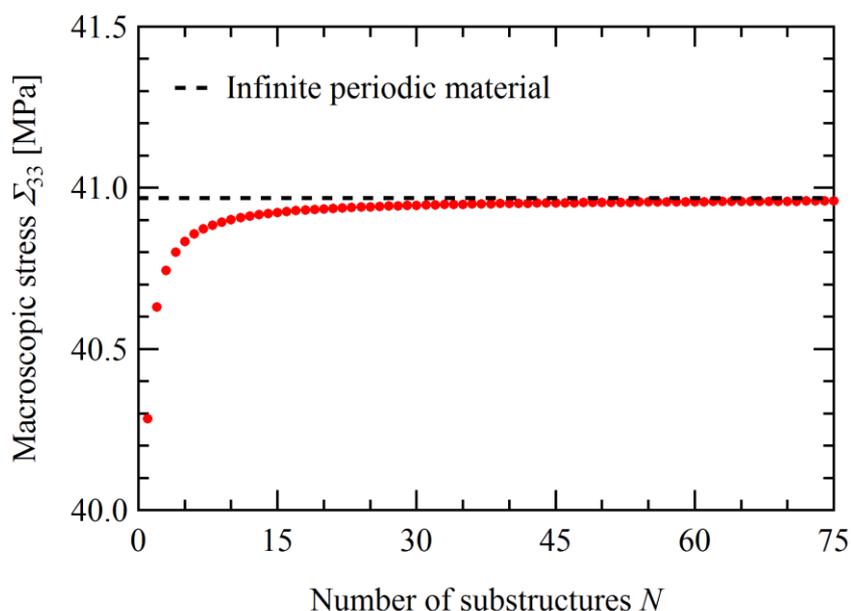


Fig. 4.15 Relationship between macroscopic stress Σ_{33} and number of substructures N ($E_{33} = 0.005$).

巨視的成分の変化率，および各要素の微視的応力の変化率を調査する．その結果， $N=30$ の場合にそれら全ての変化率が0.1%以下となることから，両フリーエッジの相互干渉が十分に小さくなったと判断し， $N=30$ と定めて解析を実施する．

4. 3. 3 巨視的特性

図 4.16 は，解析により得られたフリーエッジを有する一方向 CFRP の巨視的応力-ひずみ関係である．この結果より，引張ひずみが増加するにつれて，わずかではあるが一方向 CFRP の巨視的特性に非線形性が発現することがわかる．また，図 4.16 中のプロットは，従来の均質化理論に基づく無限体の解析結果を表している．前節において，フリーエッジの相互干渉が生じないようにサブストラクチャ数 N を決定しており，このため両者の解析結果は精度良く一致する．したがって，一方向 CFRP の巨視的弾-粘塑性特性に対して，フリーエッジを有することによる影響は少ないと言える．

4. 3. 4 フリーエッジの微視的応力・ひずみ分布

本節では半ユニットセル \tilde{Y} を構成するサブストラクチャのうち，点対称境界面を有するサブストラクチャ A_1 ，フリーエッジからサブストラクチャ 1 個分離れた A_{29} ，お

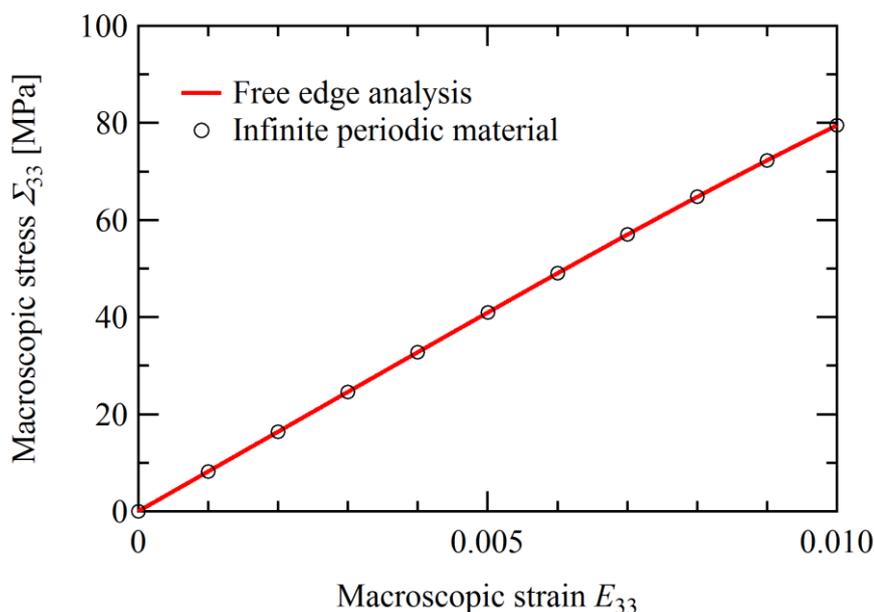


Fig. 4.16 Macroscopic stress-strain relationships of unidirectional CFRP ($\dot{E}_{33} = 10^{-5} \text{ s}^{-1}$).

よびフリーエッジを有する A_{30} の 3 個のサブストラクチャを対象として、微視的応力・ひずみ分布を調査する．図 4.17(a)-(c)はそれぞれ、巨視的ひずみ $E_{33} = 0.01$ の際の、上記サブストラクチャに生じる微視的せん断応力 σ_{31} の分布図を示している．なお、図 4.17 は変位を 10 倍した変形後のサブストラクチャを用いて描いており、また各サブストラクチャの中央面を表示している．図 4.17(c)より、フリーエッジの繊維／母材界面近傍で、炭素繊維とエポキシの変形特性の違いに起因した変形の不マッチが確認できる．これによりフリーエッジ近傍では複雑な応力分布が生じており、中でもフリーエッジの繊維／母材界面で顕著な微視的応力集中が発生している．この σ_{31} の最大値は約 30MPa であり、巨視的引張応力 Σ_{33} の約 40% に達している．一方で、フリーエッジよりわずかに離れると、このようなせん断応力は急激に減少し、 A_1 、 A_{29} ではせん断応力が発生しないことがわかる（図 4.17(a), (b)）．

つづいて、図 4.18(a)-(c)は、 A_1 、 A_{29} および A_{30} に生じる微視的垂直応力 σ_{11} の分布図である．図 4.18(c)より、フリーエッジ近傍では繊維／母材界面で、炭素繊維には圧縮応力が、エポキシには引張応力が作用するような、複雑な応力場が形成されている様子が確認できる．しかしながら σ_{11} に関しても、フリーエッジからわずかに離れると、応力分布は繊維軸方向に沿って一様に分布することがわかる（図 4.18 (a), (b)）．

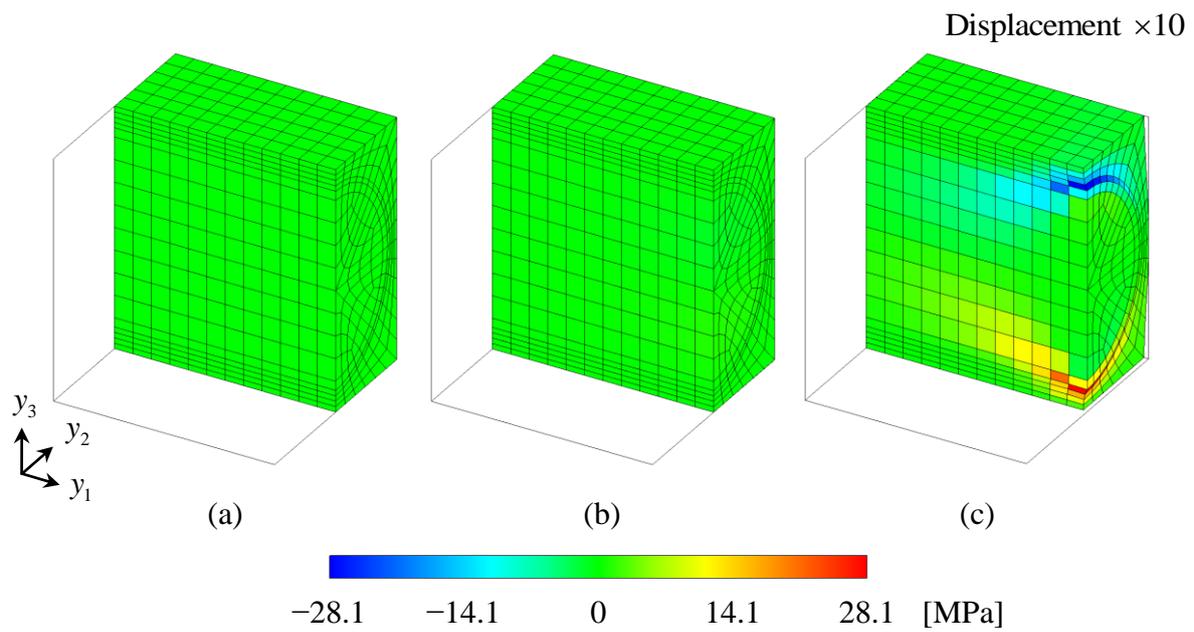


Fig. 4.17 Distributions of microscopic shear stress σ_{31} at (a) A_1 , (b) A_{29} and (c) A_{30} ($E_{33} = 0.01$, $\dot{E}_{33} = 10^{-5} \text{s}^{-1}$).

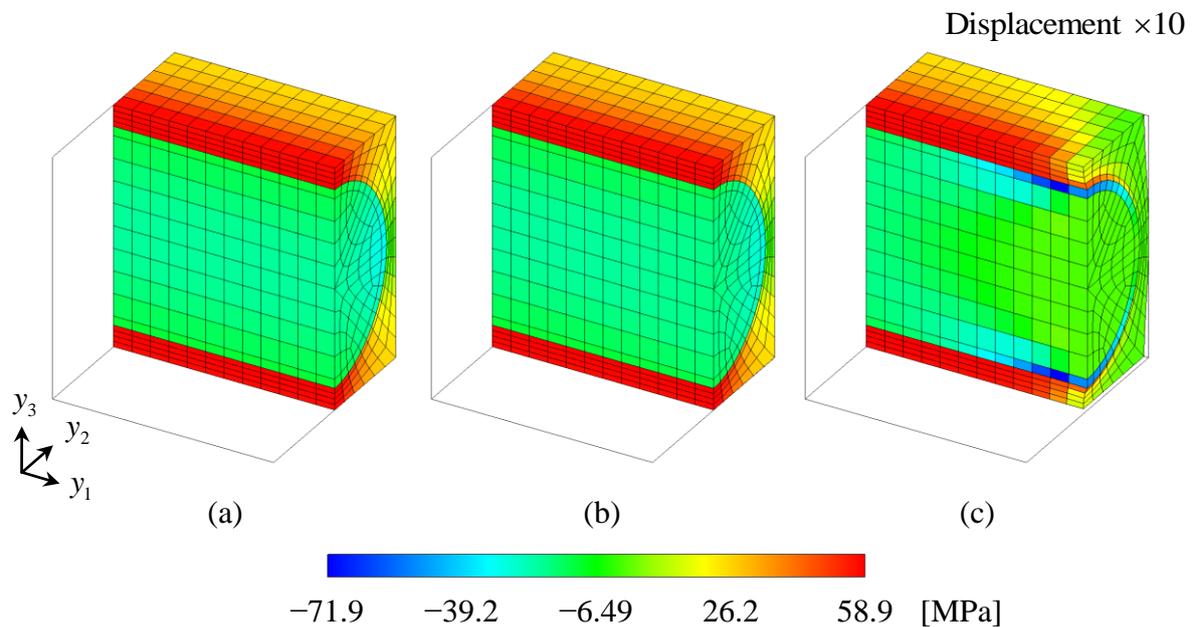


Fig. 4.18 Distributions of microscopic normal stress σ_{11} at (a) A_1 , (b) A_{29} and (c) A_{30} ($E_{33} = 0.01$, $\dot{E}_{33} = 10^{-5} \text{s}^{-1}$).

最後に、 \tilde{Y} に生じる微視的相当粘塑性ひずみ $\tilde{\epsilon}^p$ の分布を図 4.19 に示す。図 4.19(c)より、フリーエッジの繊維/母材界面で顕著なひずみ集中が発生しており、その最大

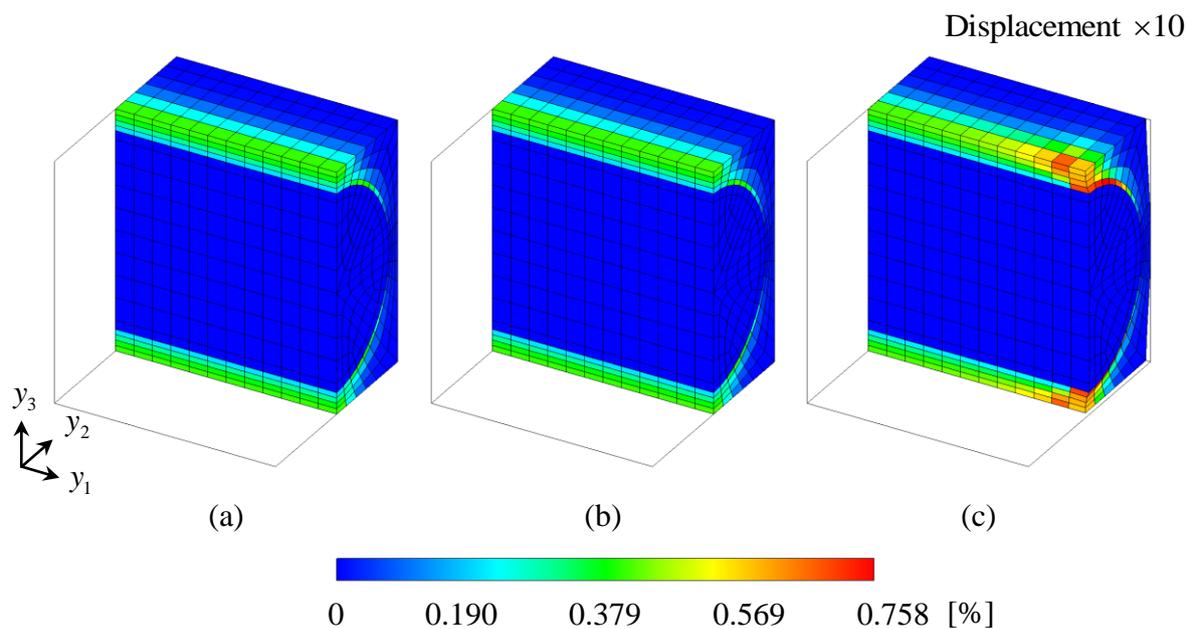


Fig. 4.19 Distributions of microscopic equivalent viscoplastic strain $\bar{\varepsilon}^p$ at (a) A_1 , (b) A_{29} and (c) A_{30} ($E_{33} = 0.01$, $\dot{E}_{33} = 10^{-5} \text{s}^{-1}$).

値は約0.75%である。一方で、このようなひずみ集中は局所的であり、一方向 CFRP の内部ではひずみ分布は繊維軸方向に沿って一様であることが、図 4.19(a), (b)の結果より読み取れる。

以上の結果より、一方向 CFRP のフリーエッジでは、材料内部とは大きく異なる応力・ひずみ分布が生じており、中でも繊維／母材界面で顕著な微視的応力・ひずみ集中が発生することが明らかとなり、フリーエッジ解析の重要性が示唆された。一方で、フリーエッジが微視的応力・ひずみ分布に影響を及ぼす範囲は極めて局所的であり、フリーエッジより繊維 1 本分程度離れると、その影響はほとんど消失するものと考えられる。

4. 3. 5 フリーエッジの微視的応力集中

前節の結果より、フリーエッジでは炭素繊維の上端、下端の界面で顕著な微視的応力・ひずみ集中が発生することが示された。そこで、これらの箇所における応力集中を検証する。フリーエッジの異種材料境界面に生じる応力集中を評価するには、有限要素メッシュ依存性とともに応力の特異性に関する考慮が必要であり、これには

特異性のオーダーや Bogy の解といった手法が有用であるが[87-91]，これらの手法は弾性材料を対象としている．今回のような弾-粘塑性材料を対象とする場合には，特異性が緩和されることが知られており[15]，したがって本節では，特異性の議論はせず，有限要素メッシュ依存性の観点から応力集中を調査する．このため，フリーエッジを有するサブストラクチャ A_{30} を，フリーエッジの応力集中箇所を詳細に有限要素分割したモデル（図 4.11 (b)）に変更し解析を行う．

図 4.20 は巨視的引張ひずみ $E_{33} = 0.005$ の際の，サブストラクチャ A_{30} における引張負荷方向微視的垂直応力 σ_{33} の分布図を示している．この分布図より，フリーエッジ近傍の非常に局所的な領域で，繊維／母材界面応力が急激に上昇する様子が確認できる．図 4.20 に示す A_{30} 中央面の，繊維／母材界面における σ_{33} の変化の様子を示したグラフが図 4.21 である．図 4.21 の縦軸は σ_{33} （界面応力）の節点応力を，横軸は節点の y_1 座標をサブストラクチャの長さ L で除した， A_{29} 接合面からの距離 y_1/L を示している．なお，節点応力の算出には外挿法を使用した．また，図中に示す A_{30} 中央面では，繊維／母材界面で σ_{33} が連続した値となるので，着目する節点を共有する各要素より

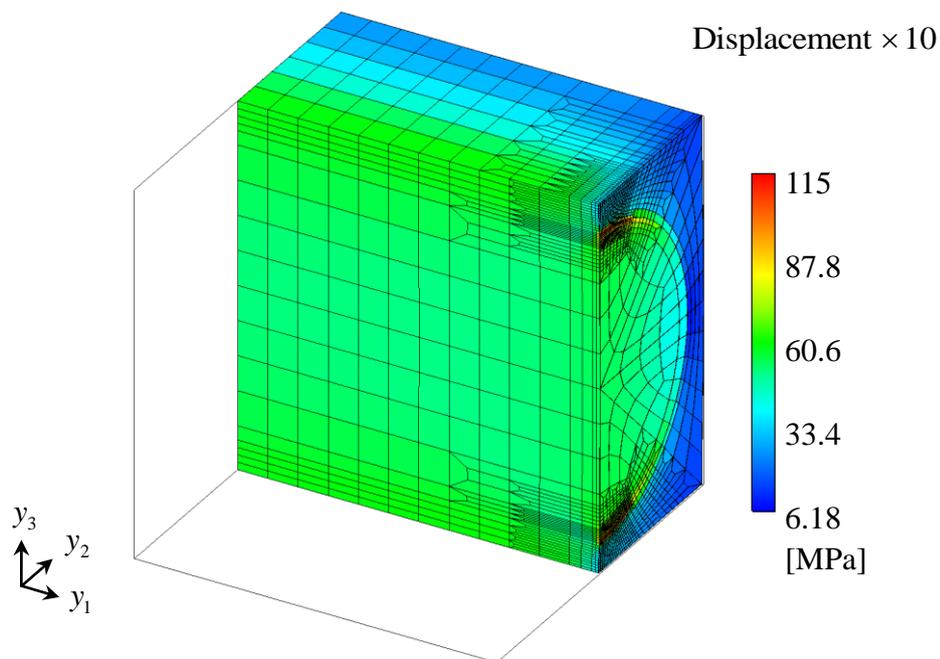


Fig. 4.20 Distribution of microscopic normal stress σ_{33} in fine mesh model, A_{30} ($E_{33} = 0.005$, $\dot{E}_{33} = 10^{-5} \text{ s}^{-1}$).

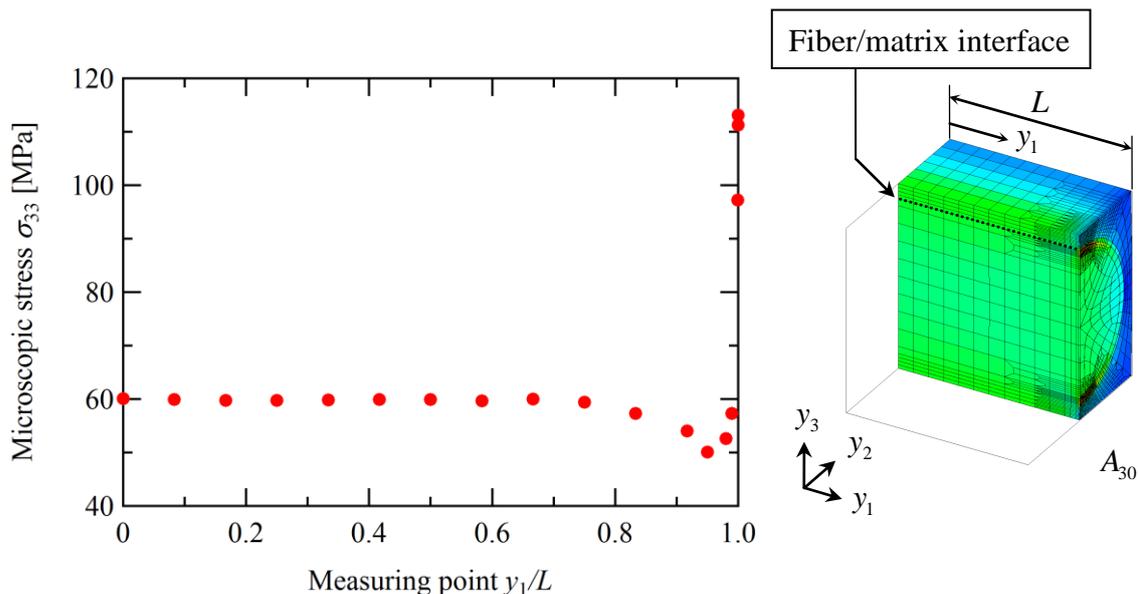


Fig. 4.21 Variation of microscopic interfacial stress σ_{33} at fiber/matrix interface in A_{30} ($E_{33} = 0.005$, $\dot{E}_{33} = 10^{-5} \text{s}^{-1}$).

算出される節点応力の平均値を示している。図 4.21 より、おおよそ $y_1/L \leq 0.7$ では σ_{33} はほぼ一定（約 60MPa）であるが、その後一旦低下し、 $y_1/L \geq 0.99$ の領域で σ_{33} は急激に上昇する。この σ_{33} はフリーエッジで最大となり、その値は約 115MPa と、内部で発生する一定値のおおよそ 2 倍となっている。このような結果は、図 4.11(a)で示した有限要素分割が粗いモデルを使用した解析では、明確には確認されなかった。したがって、フリーエッジの応力分布を検討する場合には、そのメッシュ依存性に注意を払う必要があると言える。

なお、上記のように本解析ではエポキシを弾-粘塑性材料であるとした。したがって、フリーエッジに生じる界面応力のひずみ速度依存性を検証するために、2 種類の異なる巨視的ひずみ速度 ($\dot{E}_{33} = 10^{-3}$, 10^{-7}s^{-1}) による解析も実施した。その結果、巨視的ひずみ速度が変化した場合でも、最大界面応力 σ_{33}^{\max} の変化量は $\pm 2 \text{MPa}$ 程度であり、ひずみ速度依存性はほとんど確認されなかった。

また、界面応力の応力緩和を調査するため、図 4.20 に示した状態から、巨視的引張ひずみを $E_{33} = 0.005$ のまま 10 時間保持した場合の応力緩和解析を実施した。その結果が図 4.22 である。この図は、 $E_{33} = 0.005$ に達した時点をも $t = 0 \text{h}$ とし、横軸に保持時間、縦軸に最大界面応力 σ_{33}^{\max} をプロットしている。この結果より、保持時間が $t = 1 \text{h}$ で

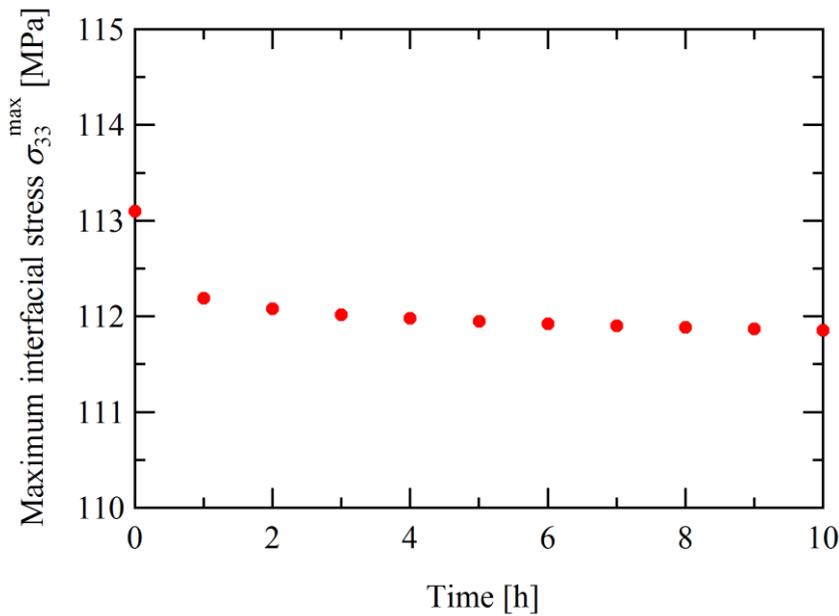


Fig. 4.22 Relaxation behavior of microscopic maximum interfacial stress σ_{33}^{\max} in A_{30} ($E_{33} = 0.005$).

1MPa 程度の応力緩和が生じるが、その後の応力緩和はほとんど発生しないことがわかる。ただし、これは室温の解析結果であり、温度が高い場合には応力緩和が顕著となる可能性がある。

4.4 まとめ

本章では、従来は微視的周期構造を有する無限体に対して理論展開されてきた均質化理論を、境界積分項を検討することで、フリーエッジ問題にも適用可能な形式へと発展させた。また、提案手法を用いて、クロスプライ CFRP 積層板の弾性フリーエッジ解析、および一方向 CFRP の弾-粘塑性フリーエッジ解析を実施した。解析の結果、フリーエッジに繊維/母材界面や層間が露出している場合、これらの箇所では特徴的な変形場が形成され、顕著な微視的応力・ひずみ集中が発生した。したがって、フリーエッジが CFRP 積層板の微視的特性に及ぼす影響は非常に大きく、フリーエッジ解析の重要性が示された。一方で、フリーエッジよりわずかに離れると、フリーエッジで見られた複雑な応力・ひずみ分布は消失し、積層板内部と同様の分布を呈することから、フリーエッジが影響を及ぼす範囲は非常に局所的であると言える。さらに、フ

リーエッジの微視的応力集中を調査するため、応力集中箇所を詳細に有限要素分割したモデルを用いて解析を行った。その結果、フリーエッジ近傍では異種材料境界面である繊維／母材界面で急激に界面応力値が増加し、フリーエッジでは材料内部と比較して約2倍の界面応力が発生した。したがって、フリーエッジの異種材料境界面では、微視的応力集中およびそのメッシュ依存性に十分注意する必要がある。

第5章

アングルプライ CFRP 積層板の負の

積層方向ポアソン比^[83]

Herakovich[35]らの研究により，アングルプライ CFRP 積層板は，積層構成に依存して負の積層方向ポアソン比が生じることが明らかにされている．しかしこれらの解析は，ラミナを均質弾性体と仮定していることから，非弾性領域における負の積層方向ポアソン比の挙動については未だ議論がなされていない．また，この手法では積層板内部の繊維・母材の微視的な挙動を扱うことができず，負の積層方向ポアソン比が発現する微視的なメカニズムは明らかにされていない．そこで本章では，均質化理論に基づきアングルプライ CFRP 積層板の弾-粘塑性解析を実施し，粘塑性領域における負の積層方向ポアソン比の変化の様子，ならびに負の積層方向ポアソン比を引き起こす微視的メカニズムを調査する．解析手法としては3章で提案した，均質化理論に基づく弾-粘塑性層間応力解析手法を使用するが，本章では主にアングルプライ CFRP 積層板の巨視的特性に着目する．

5.1 解析モデル

本章では解析モデルとして，図 5.1 に示す $[\pm\theta]$ アングルプライ CFRP 積層板を考える．3章で用いたモデルと同様に，この積層板は y_1 軸方向を積層方向とし，各ラミナ

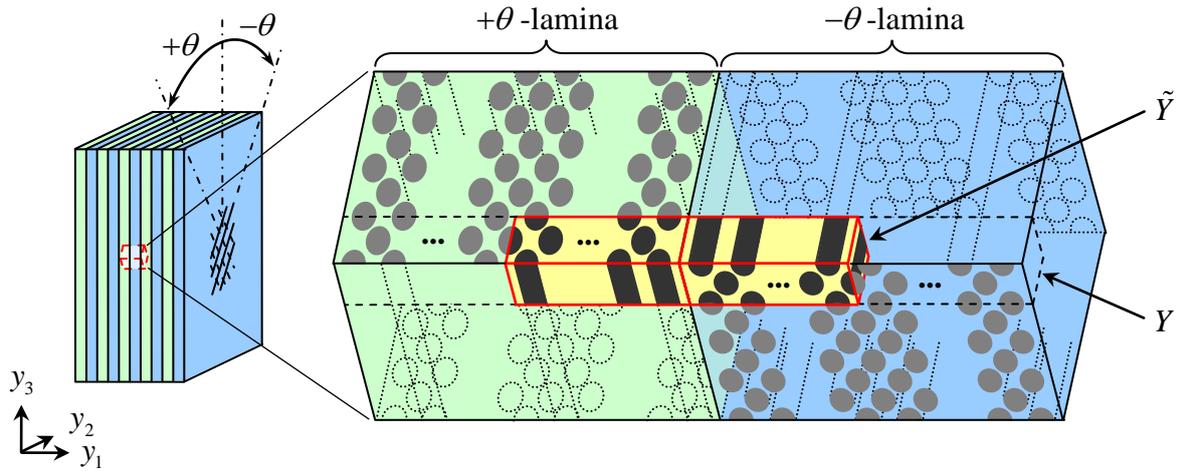


Fig. 5.1 $[\pm\theta]$ angle-ply CFRP laminate, unit cell Y and semiunit cell \tilde{Y} .

は y_3 軸方向より $\pm\theta$ の配向角で交互に積層されているとするが、本章のモデルでは、各ラミナ内部の繊維配列として六方配列を仮定する。炭素繊維は繊維軸と直交する面内において六方配列とし、各ラミナは積層方向に最大で 16 本の繊維を含んでいるとする。このようなモデルに対し、解析領域としてユニットセル Y および半ユニットセル \tilde{Y} を図 5.1 のように定義することが可能である。したがって、本章でも \tilde{Y} を解析領域とし、サブストラクチャに分割した上で解析を実施する (図 5.2)。

5.2 解析条件

解析に使用した有限要素モデルの例として、積層構成が $[\pm 30]$ 、 $[\pm 45]$ および $[\pm 60]$ の各サブストラクチャの有限要素モデルを図 5.3-5.5 に示す。各モデルは 8 節点アイソパラメトリック要素で有限要素分割されており、節点数は 23693、要素数は 21504 で

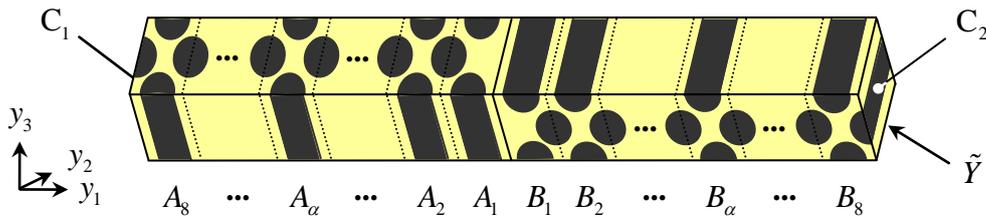


Fig. 5.2 Semiunit cell \tilde{Y} and divided substructures A_α and B_α ($\alpha=1, 2, \dots, 8$).

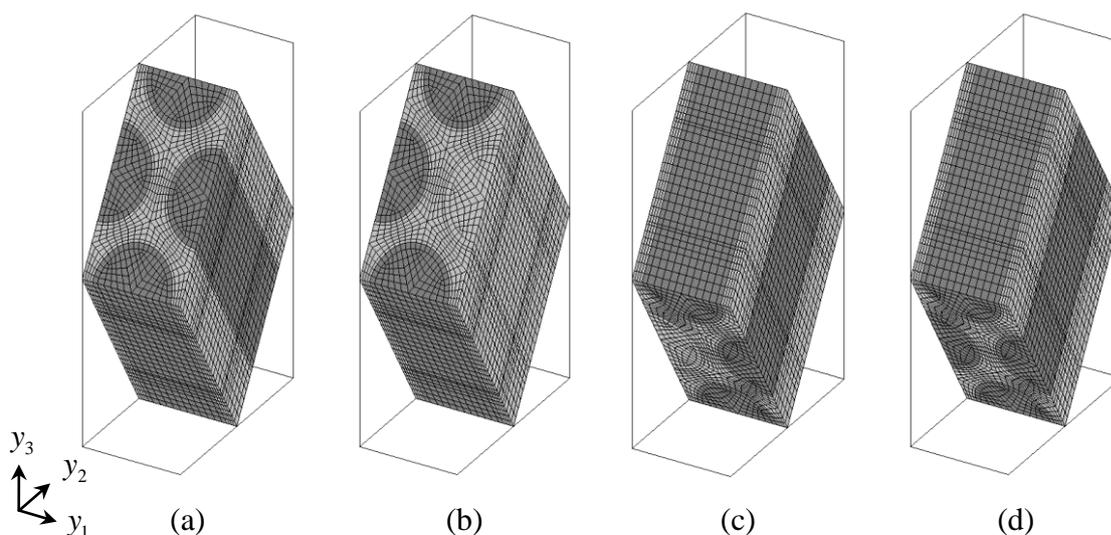


Fig. 5.3 Finite element models of substructures for $[\pm 30]$ angle-ply CFRP laminate; (a) A_α , (b) A_1 , (c) B_1 and (d) B_α ($\alpha = 2, 3, \dots, 8$).

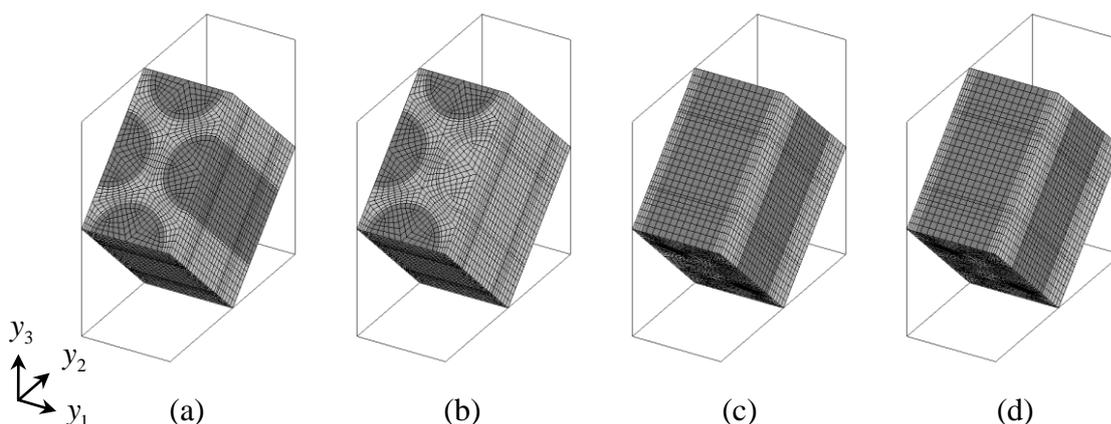


Fig. 5.4 Finite element models of substructures for $[\pm 45]$ angle-ply CFRP laminate; (a) A_α , (b) A_1 , (c) B_1 and (d) B_α ($\alpha = 2, 3, \dots, 8$).

ある．また，繊維体積率は各ラミナで 56%と定める．ここで，層間を有する A_1 および B_1 は，微視構造を考慮して層間近傍をエポキシとしたモデルを使用し，ラミナ内部は A_α および B_α を連結した構造とする．積層構成は $[\pm 5]$ から $[\pm 85]$ まで 5° 刻みで変更し，計 17 パターンの積層構成を対象として解析する．

負荷条件は y_3 軸方向の単軸引張負荷とし，巨視的一定ひずみ速度 $\dot{E}_{33} = 10^{-5} \text{s}^{-1}$ の条件下で，巨視的引張ひずみが $E_{33} = 0.015$ に達するまで解析を実施する．また，5.3.3 節では負の積層方向ポアソン比のひずみ速度依存性を検証するため，3 種類のひずみ速

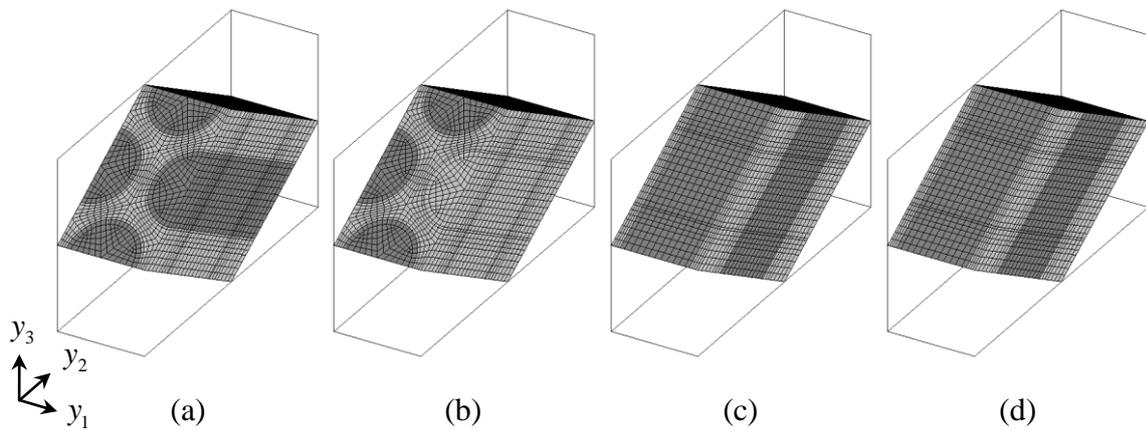


Fig. 5.5 Finite element models of substructures for $[\pm 60]$ angle-ply CFRP laminate; (a) A_α , (b) A_1 , (c) B_1 and (d) B_α ($\alpha = 2, 3, \dots, 8$).

度 ($\dot{E}_{33} = 10^{-3}, 10^{-5}, 10^{-7} \text{ s}^{-1}$) で解析を行う。

5.3 アングルプライ CFRP 積層板の弾-粘塑性ポアソン比

5.3.1 巨視的応力-ひずみ関係

図 5.6 は解析により得られた $[\pm 30]$, $[\pm 45]$ および $[\pm 60]$ の巨視的応力-ひずみ関係を

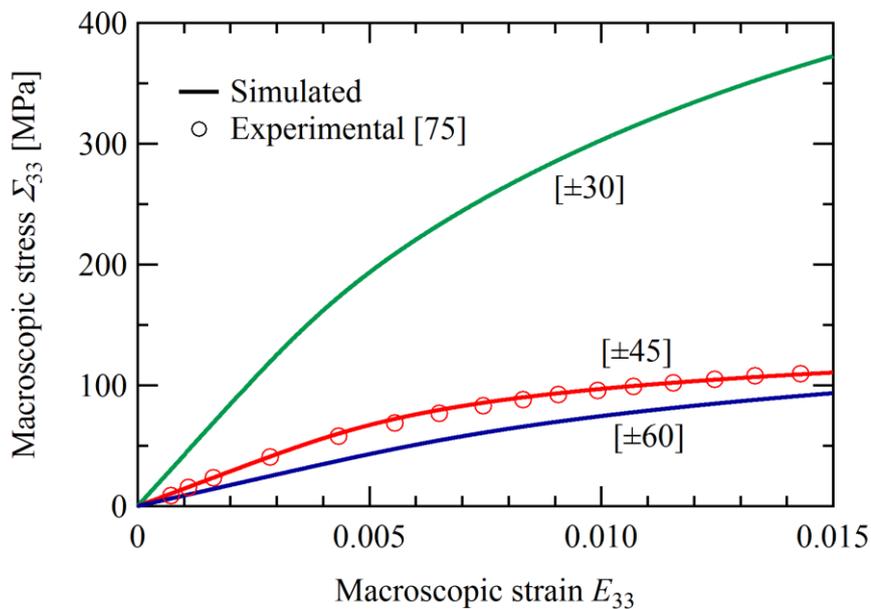


Fig. 5.6 Macroscopic stress-strain relationships of $[\pm 30]$, $[\pm 45]$ and $[\pm 60]$ angle-ply CFRP laminates ($\dot{E}_{33} = 10^{-5} \text{ s}^{-1}$).

示している. 3.2.3 節の結果と同様に, いずれの積層構成でも明確な非線形性が確認でき, アングルプライ CFRP 積層板の巨視的特性は顕著な積層構成依存性を有している. また, 図中には $[\pm 45]$ の実験結果[75]も示しており, 六方配列を仮定した CFRP 積層板に対しても, その巨視的挙動を精度良く予測可能であることがわかる.

5. 3. 2 弾-粘塑性ポアソン比

3 種類の積層構成 $[\pm 30]$, $[\pm 45]$ および $[\pm 60]$ の, 積層方向 (面外方向) および面内方向の弾-粘塑性ポアソン比 ν_{31}^{evp} , ν_{32}^{evp} と, 巨視的引張ひずみ E_{33} との関係を示したグラフが図 5.7 および図 5.8 である. ここで, ν_{31}^{evp} および ν_{32}^{evp} は, 各時間ステップの巨視的ひずみを用いて次式により算出した.

$$\nu_{31}^{\text{evp}} = -\frac{E_{11}}{E_{33}} \quad (5.1)$$

$$\nu_{32}^{\text{evp}} = -\frac{E_{22}}{E_{33}} \quad (5.2)$$

また, $E_{33} = 0$ の各点は, 弾性ポアソン比 ν_{31}^e , ν_{32}^e の値を示している. これらの結果よ

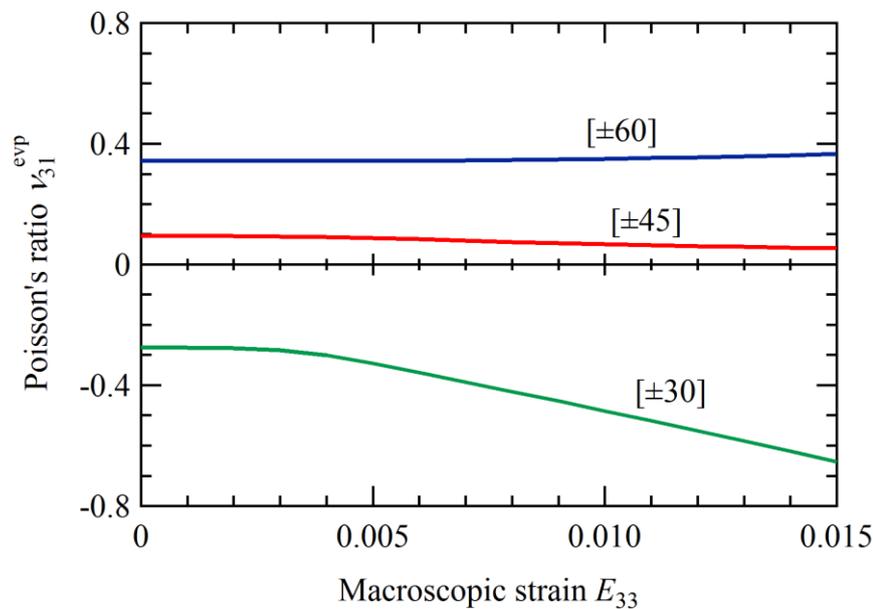


Fig. 5.7 Relationship between elastic-viscoplastic Poisson's ratio ν_{31}^{evp} and macroscopic strain E_{33} of $[\pm 30]$, $[\pm 45]$ and $[\pm 60]$ angle-ply CFRP laminates ($\dot{E}_{33} = 10^{-5} \text{ s}^{-1}$).

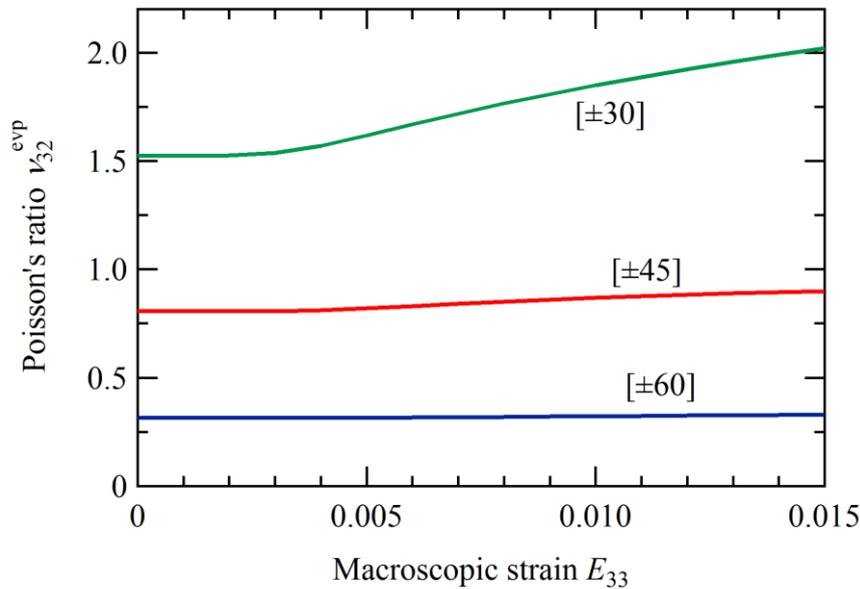


Fig. 5.8 Relationship between elastic-viscoplastic Poisson's ratio ν_{32}^{evp} and macroscopic strain E_{33} of [±30], [±45] and [±60] angle-ply CFRP laminates ($\dot{E}_{33} = 10^{-5} \text{ s}^{-1}$).

り、アングラプライ CFRP 積層板のポアソン比が、顕著な異方性および積層構成依存性を示すことが確認できる。

ここで図 5.7 に着目すると、[±30]の積層方向ポアソン比 ν_{31}^{evp} は、弾性域のみならず粘塑性域でも負の値を示しており、さらに引張ひずみの増加に伴い、その値は約-0.3から約-0.65へとその絶対値が増加している。これとは対照的に[±45]と[±60]では、積層方向ポアソン比は常に正の値であり、引張ひずみが増加してもその値はほぼ一定である。一方で図 5.8 では、面内方向ポアソン比 ν_{32}^{evp} は全ての積層構成で正の値となっている。また、[±30]の結果を見ると、引張ひずみが進展するにつれて、面内方向ポアソン比が約 1.5 から約 2.0 へと大きく増加していることがわかる。これと比較して[±45]および[±60]では、引張ひずみが増加しても、面内方向ポアソン比の変化量はわずかである。

上記のようなアングラプライ CFRP 積層板の弾-粘塑性ポアソン比と、積層構成との関係を図 5.9 および図 5.10 に示す。巨視的ひずみ $E_{33} = 0.015$ の際の、積層方向ポアソン比 ν_{31}^{evp} と積層構成[± θ]との関係が図 5.9、面内方向ポアソン比 ν_{32}^{evp} と積層構成[± θ]との関係が図 5.10 である。なお、これらの図中には比較のために弾性ポアソン比 ν_{31}^e ,

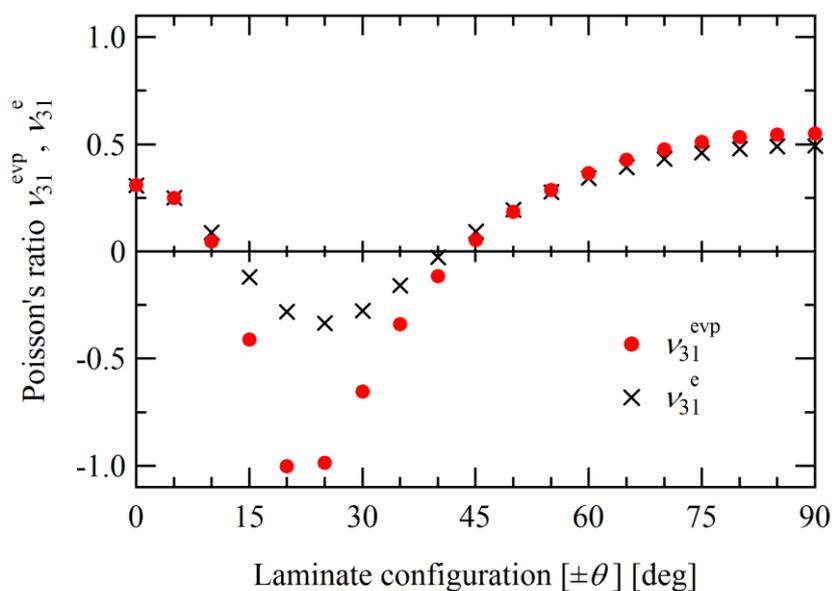


Fig. 5.9 Variation of elastic-viscoplastic Poisson's ratio ν_{31}^{evp} depending on laminate configuration $[\pm\theta]$ ($E_{33} = 0.015$, $\dot{E}_{33} = 10^{-5} \text{s}^{-1}$).

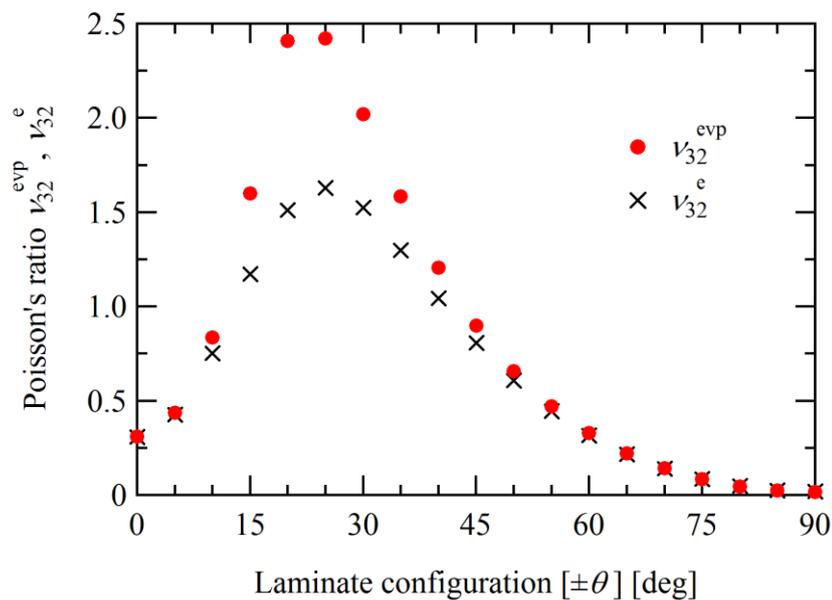


Fig. 5.10 Variation of elastic-viscoplastic Poisson's ratio ν_{32}^{evp} depending on laminate configuration $[\pm\theta]$ ($E_{33} = 0.015$, $\dot{E}_{33} = 10^{-5} \text{s}^{-1}$).

ν_{32}^e の値もプロットしており、また $\theta = 0^\circ$, 90° の値はそれぞれ一方向 CFRP の繊維軸方向, 繊維軸直交方向の結果を示している. これらの結果より, 特に $\theta < 60^\circ$ の範囲で,

ν_{31}^{evp} , ν_{32}^{evp} ともに積層構成に応じて大きく変化しており, それぞれ ν_{31}^{evp} は $\theta=20^\circ$ で最小値約 -1.0 , ν_{32}^{evp} は $\theta=25^\circ$ で最大値約 2.5 となる. また図 5.9 を見ると, おおむね $\theta=15^\circ\sim 40^\circ$ の範囲で, 積層方向ポアソン比は負の値となっている. この範囲では, ν_{31}^e と比較して ν_{31}^{evp} の絶対値は大きく増加している. 一方で図 5.10 より, ν_{32}^{evp} は積層構成によらず常に正の値であり, ν_{31}^{evp} と同様に ν_{32}^{evp} も, $\theta=15^\circ\sim 40^\circ$ の範囲で ν_{32}^e と比較して高い値を示している. このような弾性ポアソン比 ν^e と弾-粘塑性ポアソン比 ν^{evp} の差についても積層構成依存性があり, $\theta=20^\circ\sim 25^\circ$ でその差は最大となる. 対照的に, $\theta<15^\circ$ および $45^\circ<\theta$ の範囲では, 両者の差はごくわずかである.

5. 3. 3 弾-粘塑性ポアソン比のひずみ速度依存性

図 5.11 および図 5.12 は, 3 種類のひずみ速度 ($\dot{E}_{33}=10^{-3}, 10^{-5}, 10^{-7}\text{s}^{-1}$) で解析した際の, 積層方向および面内方向弾-粘塑性ポアソン比 ν_{31}^{evp} , ν_{32}^{evp} と巨視的引張ひずみ E_{33} との関係を示したものである. なお, 実線で示された $\dot{E}_{33}=10^{-5}\text{s}^{-1}$ の結果は, 図 5.7 および図 5.8 で示した結果とそれぞれ対応している. これらの結果より, $[\pm 30]$ では,

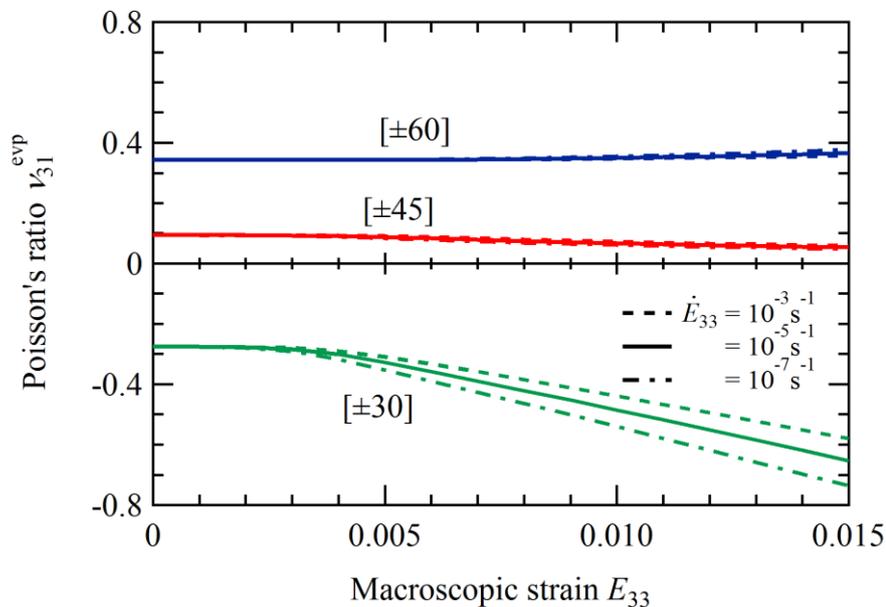


Fig. 5.11 Relationship between elastic-viscoplastic Poisson's ratio ν_{31}^{evp} and macroscopic strain E_{33} of $[\pm 30]$, $[\pm 45]$ and $[\pm 60]$ angle-ply CFRP laminates at $\dot{E}_{33}=10^{-3}, 10^{-5}$ and 10^{-7}s^{-1} .

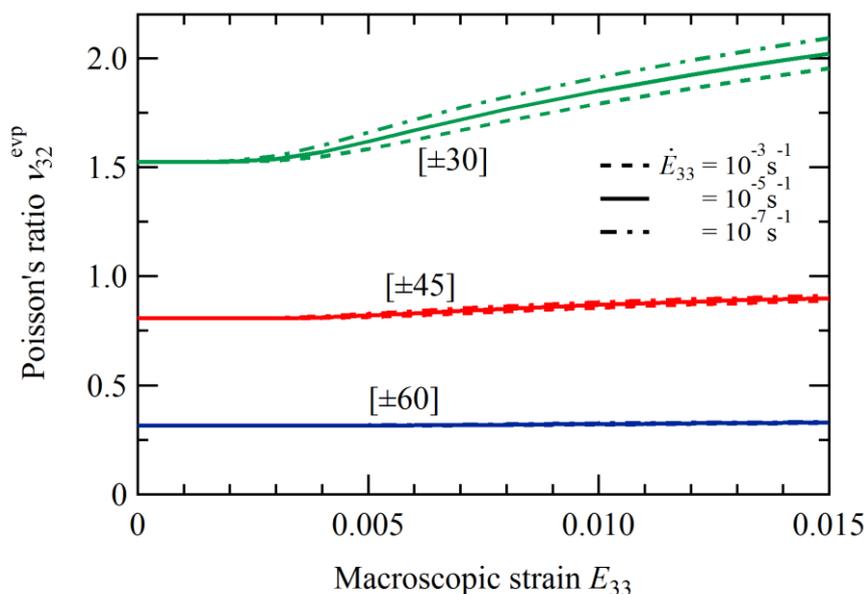


Fig. 5.12 Relationship between elastic-viscoplastic Poisson's ratio ν_{32}^{evp} and macroscopic strain E_{33} of [±30], [±45] and [±60] angle-ply CFRP laminates at $\dot{E}_{33} = 10^{-3}$, 10^{-5} and $10^{-7} s^{-1}$.

ν_{31}^{evp} , ν_{32}^{evp} とともに明瞭なひずみ速度依存性が確認でき、ひずみ速度が低下するにつれて、弾-粘塑性ポアソン比の絶対値は増加することがわかる。また、粘塑性変形が進展するに伴い、それぞれのひずみ速度で発現するポアソン比の差は増加する傾向にあることがわかる。対照的に[±45]および[±60]では、 ν_{31}^{evp} , ν_{32}^{evp} とともにひずみ速度による影響はわずかである。

5. 4 負の積層方向ポアソン比に関する微視的メカニズム

本節では、積層構成が $\theta = 15^\circ \sim 40^\circ$ の範囲で積層方向ポアソン比が負となり、また粘塑性変形の進行に伴ってその絶対値が増加するメカニズムを、各ラミナの平均応力および微視的応力分布に着目し明らかにする。

5. 4. 1 ラミナ平均応力

表 5.1 は[±30], [±45]および[±60]の、 $+\theta$ -ラミナおよび $-\theta$ -ラミナそれぞれに作用するラミナ平均応力の非零成分 $\Sigma_{33}^{(+\theta)}$, $\Sigma_{23}^{(+\theta)}$, $\Sigma_{33}^{(-\theta)}$, $\Sigma_{23}^{(-\theta)}$ の値を示したものである。これらの値は、各ラミナにおける微視的応力 σ_{33} および σ_{23} の体積平均を取ることによって算出した。表 5.1 の各成分を見ると、 $\Sigma_{33}^{(+\theta)}$ と $\Sigma_{33}^{(-\theta)}$ は等しい値となっており、これらの値

Table 5.1 Nonzero components of lamina average stress with respect to y_i coordinates ($E_{33} = 0.015$, $\dot{E}_{33} = 10^{-5} \text{s}^{-1}$).

Laminate configuration	$\Sigma_{33}^{(+\theta)}$ [MPa]	$\Sigma_{23}^{(+\theta)}$ [MPa]	$\Sigma_{33}^{(-\theta)}$ [MPa]	$\Sigma_{23}^{(-\theta)}$ [MPa]
[± 30]	372.5	-211.6	372.5	211.6
[± 45]	110.5	-49.1	110.5	49.1
[± 60]	93.4	-5.9	93.4	5.9

は図 5.6 に示す $E_{33} = 0.015$ の際の Σ_{33} と一致する. 対照的に $\Sigma_{23}^{(+\theta)}$ と $\Sigma_{23}^{(-\theta)}$ は, 正負が反対で絶対値が等しく, 巨視的に見ると互いに打ち消し合い零となることがわかる. このようなせん断応力は, $+\theta$ -ラミナと $-\theta$ -ラミナの相互作用により引き起こされるものである. 特に, [± 30]ではその絶対値は約 210MPa に達しており, 非常に強い相互作用が生じていることを示唆している. 一方, [± 45]および[± 60]に発生する各ラミナの平均せん断応力を見ると, [± 45]は比較的低い値を示しており (約 50MPa), さらに [± 60]ではほぼ零である. これらの結果より, 各ラミナに生じる相互作用は, 積層構成によって大きく変化すると言える.

ここで, y_1 軸を回転軸として $y_2 - y_3$ 座標系を回転し, 繊維軸方向を L 方向, 繊維軸直交方向を T 方向とする $T-L$ 座標系を導入する (図 5.13). これと対応して, y_i 座標系の平均応力 $\Sigma_{33}^{(+\theta)}$, $\Sigma_{23}^{(+\theta)}$ を, $T-L$ 座標系の平均応力 $\Sigma_T^{(+\theta)}$, $\Sigma_L^{(+\theta)}$ および $\Sigma_{TL}^{(+\theta)}$ へと変

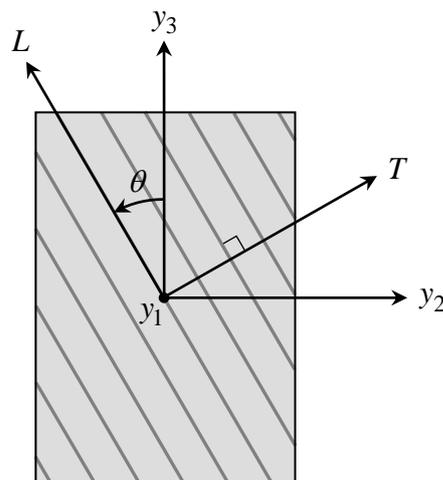


Fig. 5.13 $T-L$ rectangular coordinates with rotation angle θ for $+\theta$ -lamina.

換した値を表 5.2 に示す. この表を見ると, $[\pm 30]$ では約 -90MPa にも及ぶ繊維軸直交方向応力 $\Sigma_T^{(+\theta)}$ が作用していることがわかる. 対照的に, $[\pm 45]$ の $\Sigma_T^{(+\theta)}$ は低い引張応力(約 6MPa), さらに $[\pm 60]$ では比較的高い引張応力(約 65MPa)として $\Sigma_T^{(+\theta)}$ が作用している.

5. 4. 2 ラミナ内部微視的応力分布

巨視的引張ひずみ $E_{33} = 0.015$ の際の, $[\pm 30]$, $[\pm 45]$ および $[\pm 60]$ の層間より最も離れたサブストラクチャ A_8 における繊維軸直交方向微視的応力 σ_T の分布を図 5.14 に示す. これらの分布図より, $[\pm 30]$ では, 表 5.2 に示した $\Sigma_T^{(+\theta)}$ に対応して, A_8 では T 軸方向に非常に高い圧縮応力が生じていることがわかる. このような T 軸方向の圧縮応力により, これに直交する方向である積層方向(y_1 軸方向)および繊維軸方向(L 軸方向)に正のひずみが誘発される. しかし, 繊維軸方向への変形は炭素繊維により阻害されるため, 積層方向に顕著な正のひずみが発生し, $[\pm 30]$ では負の積層方向ポアソン比が発現する. さらに粘塑性域では, エポキシの粘塑性変形によって, 弾性域と比較してより大きな正の積層方向ひずみが発生する. このため $[\pm 30]$ では, 積層板の粘塑性変形の進展に伴い負の積層方向ポアソン比 ν_{31}^{ep} の絶対値が増加する. このメカニズムに従うと, エポキシの粘塑性変形がより顕著となる低ひずみ速度引張では, $[\pm 30]$ で発現する負の積層方向ポアソン比の絶対値が増加することとなり, これは図 5.11 で見られた $[\pm 30]$ のポアソン比のひずみ速度依存性をうまく説明している.

対照的に, $[\pm 45]$ の A_8 ではこのような圧縮応力は発生せず, わずかに引張応力が分布している. さらに $[\pm 60]$ の A_8 では, 全体的に高い引張応力が発生することがわかる.

Table 5.2 Nonzero components of lamina average stress in $+\theta$ -lamina with respect to $T-L$ coordinates ($E_{33} = 0.015$, $\dot{E}_{33} = 10^{-5}\text{s}^{-1}$).

Lamina configuration	$\Sigma_T^{(+\theta)}$ [MPa]	$\Sigma_L^{(+\theta)}$ [MPa]	$\Sigma_{TL}^{(+\theta)}$ [MPa]
$[\pm 30]$	-90.2	462.7	55.5
$[\pm 45]$	6.1	104.3	55.2
$[\pm 60]$	64.9	28.5	43.4

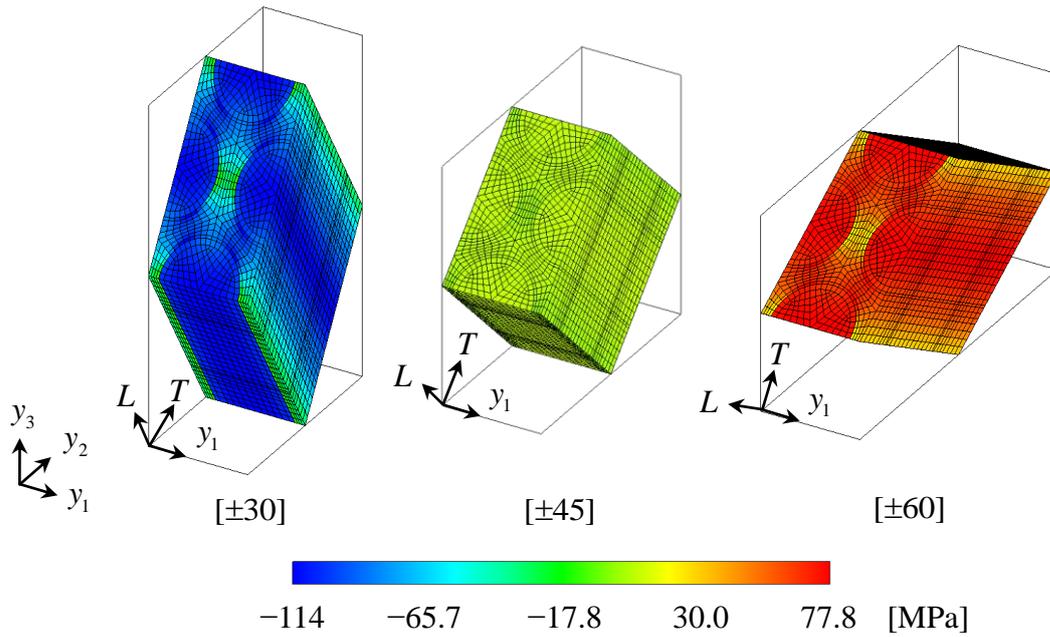


Fig. 5.14 Distributions of normal stress perpendicular to fiber, σ_T , in A_8 ($E_{33} = 0.015$, $\dot{E}_{33} = 10^{-5} \text{s}^{-1}$).

これらの応力分布は、表 5.2 に記した $\Sigma_T^{(+\theta)}$ と同様の結果であり、また図 5.7 および図 5.9 で示した、 $[\pm 45]$ でほぼ零、 $[\pm 60]$ では正の値となる ν_{31}^{vp} と対応している。

5.4.3 ラミナ内部エポキシの平均応力

5.4.1 節では各ラミナに生じる平均応力に着目したが、本節ではラミナ内部のエポキシのみを対象に、これに発生する平均応力を考える。 $+\theta$ -ラミナのエポキシに作用する σ_T の平均応力 $\Sigma_{T_{\text{epoxy}}}^{(+\theta)}$ と、積層構成との関係をプロットした結果が図 5.15 である。この図より、 $\theta = 5^\circ \sim 40^\circ$ の領域で $\Sigma_{T_{\text{epoxy}}}^{(+\theta)}$ は圧縮応力（負の値）となり、 $\theta = 20^\circ$ で圧縮応力の最大値を示す（約 -100MPa ）。前節で述べたように、この圧縮応力が負の積層方向ポアソン比 ν_{31}^{vp} の増加に寄与している。また図 5.15 には、エポキシに作用する σ_L の平均応力 $\Sigma_{L_{\text{epoxy}}}^{(+\theta)}$ についてもプロットしており、 $\Sigma_{T_{\text{epoxy}}}^{(+\theta)}$ と比較して低い値ではあるが、 $\theta = 15^\circ \sim 40^\circ$ の領域で $\Sigma_{L_{\text{epoxy}}}^{(+\theta)}$ も圧縮応力となることが見て取れる。これはすなわち、この領域ではエポキシの正の繊維軸方向ひずみが、炭素繊維により阻害されていることを意味しており、このため $\Sigma_{L_{\text{epoxy}}}^{(+\theta)}$ は圧縮応力となる。この $\Sigma_{L_{\text{epoxy}}}^{(+\theta)}$ の圧縮応力もまた、負の積層方向ポアソン比に影響を及ぼす。最後に、図 5.15 に示したこれら平均応力の和である $\Sigma_{T_{\text{epoxy}}}^{(+\theta)} + \Sigma_{L_{\text{epoxy}}}^{(+\theta)}$ に着目すると、 $\Sigma_{T_{\text{epoxy}}}^{(+\theta)} + \Sigma_{L_{\text{epoxy}}}^{(+\theta)}$ は $\theta = 10^\circ \sim 40^\circ$ の領域で負の値となり、

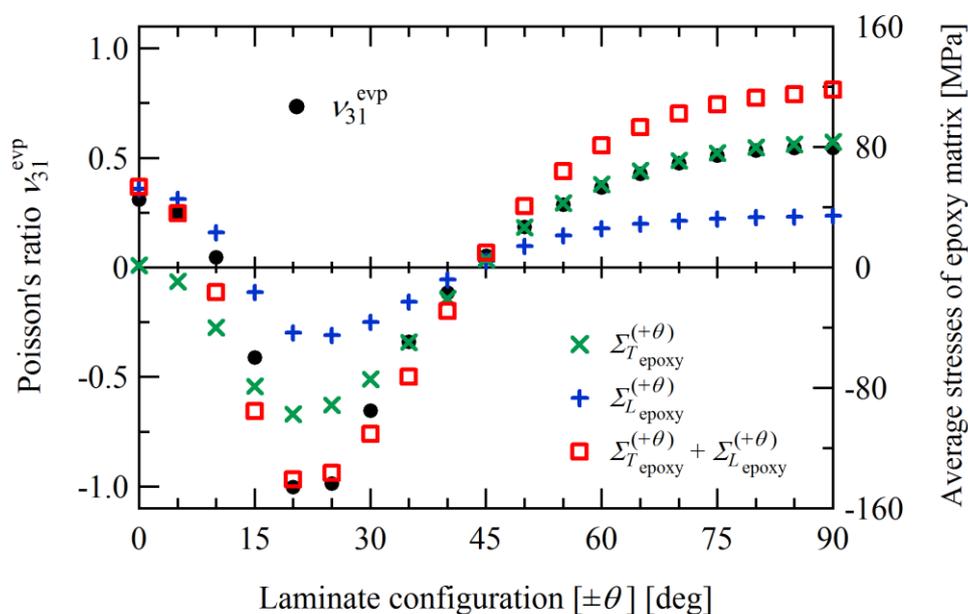


Fig. 5.15 Dependence of average stresses in epoxy matrix in $+\theta$ -lamina, $\Sigma_{T_{\text{epoxy}}}^{(+\theta)}$, $\Sigma_{L_{\text{epoxy}}}^{(+\theta)}$ and $\Sigma_{T_{\text{epoxy}}}^{(+\theta)} + \Sigma_{L_{\text{epoxy}}}^{(+\theta)}$, on laminate configuration $[\pm\theta]$ ($E_{33} = 0.015$, $\dot{E}_{33} = 10^{-3} \text{ s}^{-1}$).

$\theta = 20^\circ$ で負の最大値を示す。これらの傾向は、図中に示した ν_{31}^{evp} の傾向と良く一致している。

5.5 まとめ

本章では、アングルプライ CFRP 積層板の負の積層方向ポアソン比に関する弾-粘塑性挙動を、巨視的・微視的双方の観点から調査した。本解析では、炭素繊維とエポキシから構成されるアングルプライ CFRP 積層板の微視構造を考慮したモデル化を行い、時間依存材料に関する均質化理論に基づき解析を実施した。解析の結果、積層構成がおおよそ $[\pm 15]$ から $[\pm 40]$ の領域で、積層方向ポアソン比は負の値となり、また積層板の粘塑性変形が進展するにつれて、負の積層方向ポアソン比の絶対値は増加することが明らかとなった。積層方向ポアソン比が負となる理由は、 $+\theta$ -ラミナと $-\theta$ -ラミナの相互作用により、各ラミナにおいて繊維軸直交方向に大きな圧縮応力が生じ、その結果、ラミナに正の積層方向ひずみが発生するからであった。さらに粘塑性域では、上記の圧縮応力がエポキシの粘塑性変形を引き起こすことで、正の積層方向ひずみを増大させるため、結果として負の積層方向ポアソン比の絶対値は増加することと

なった．このメカニズムに従うと，エポキシの粘塑性変形がより顕著となる低ひずみ速度引張で，負の積層方向ポアソン比の絶対値が大きくなるという，ポアソン比のひずみ速度依存性が説明された．このような負の積層方向ポアソン比に関する粘塑性挙動やメカニズムは，先行研究では扱われておらず，本手法を用いることで初めて明らかにされた内容であり，本手法の有用性を裏付けるものである．

第6章

等価材料モデルを用いた計算コストの低減方法^[92]

1章で述べたように、Matsuda *et al.*[78]は繊維と母材からなる微視構造を考慮したクロスプライ CFRP 積層板を対象として、層間を含むユニットセルを定義し、均質化理論に基づき微視的層間応力分布の3次元弾性解析を実施した。その結果、層間ではラミナ内部とは大きく異なる微視的応力場が生じるが、層間の影響が及ぶ範囲は極めて局所的であるとの知見を得た。一方で、上記の手法は均質化理論に基づいていることから、層間を含む大規模ユニットセルを用いなければならず、計算負荷が大きくなるという問題を有していた。この解決策として、上記の知見を利用し、層間の影響が及ばない領域を、ラミナと等価な一様材料（以後等価材料と呼ぶ）に置き換えてモデリングすることで、ラミナ内部の要素分割を大幅に簡略化でき、計算効率を大きく改善できる可能性がある。そこで本章では、CFRP 積層板の微視的層間応力解析を効率良く行うための新規手法として、ラミナ内部を部分的に等価材料に置換するモデリングを用いた手法を提案する。

6.1 等価材料を用いたクロスプライ CFRP 積層板のモデル化

Matsuda *et al.*[78]は、積層方向に16本の繊維を含むラミナからなるクロスプライ CFRP 積層板（図 6.1(a)）を考え、均質化理論に基づき微視的弾性層間応力解析を実施した。その結果、クロスプライ CFRP 積層板では、層間が微視的に影響を及ぼす範

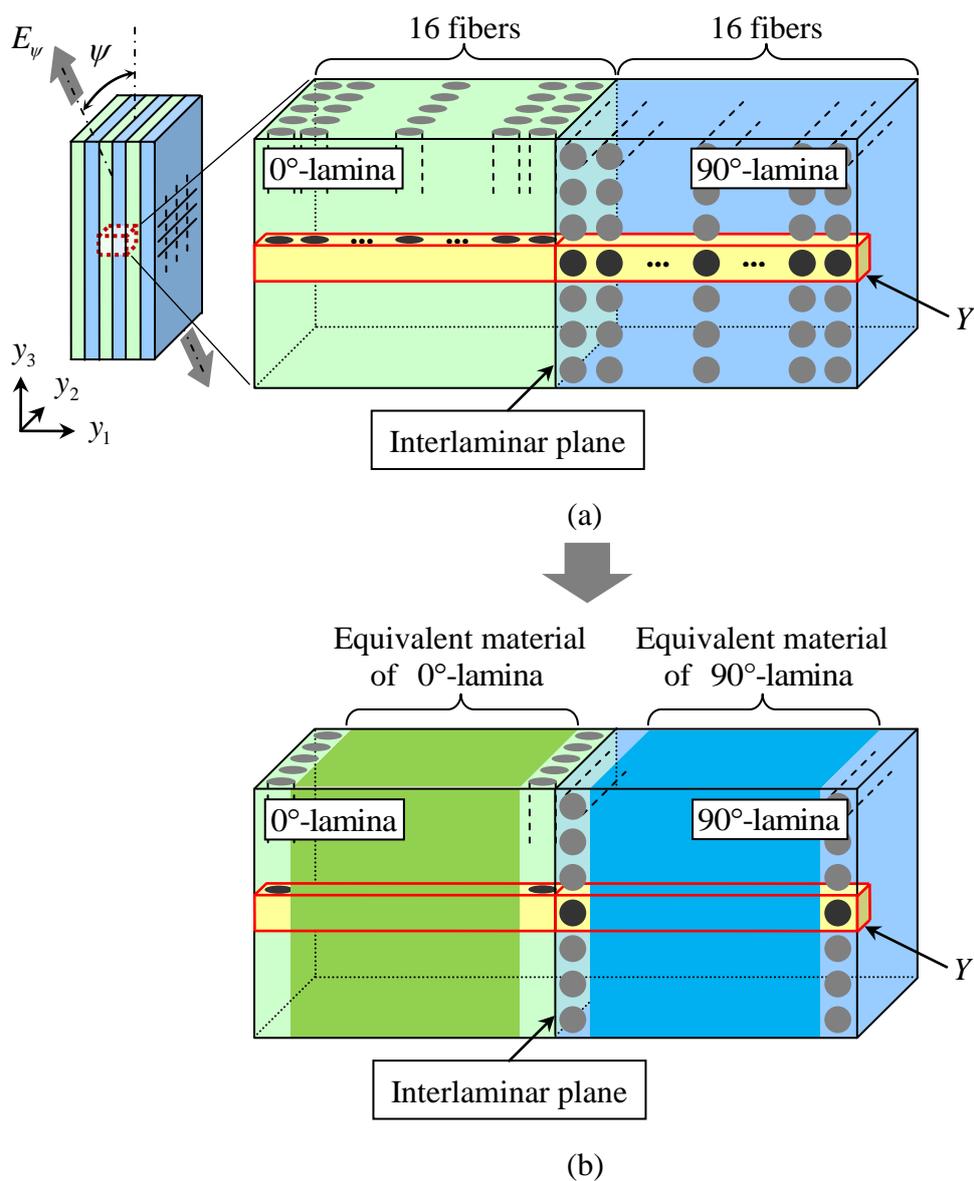


Fig. 6.1 Cross-ply CFRP laminate and its unit cell Y ; (a) laminae consisting of fibers and matrix, (b) internal regions of laminae are replaced by equivalent materials.

図は、層間から繊維 1 本分程度であることを見出した。このことは、層間から繊維 1 本分程度より離れた領域は、等価材料への置き換えが可能であることを示唆している。そこで本章では、図 6.1(b)に示すように、層間に最も近い繊維とその周辺の母材のみ微視構造を考慮し、それ以外の領域は等価材料に置き換えるモデル化を行う。なお、このモデル化の妥当性に関しては 6.4 節で検証する。このようなラミナ内部を等価材

料で置き換えたクロスプライ CFRP 積層板の解析モデルに対して、ユニットセルを図 6.1(b)中に示す Y のように定める。さらに、 Y の点対称性を考慮して半ユニットセル \tilde{Y} を導入し、サブストラクチャ A_α と B_α ($\alpha=1, 2, \dots, 8$)に分割した上で (図 6.2), サブストラクチャ法を用いて解析を実施する。

6.2 解析条件

本解析で用いたサブストラクチャ A_α , B_α の有限要素モデルを図 6.3-6.5 に示す。図 6.3 に示すように、層間を有するサブストラクチャ A_1 および B_1 は、炭素繊維とエポキシからなる微視構造を考慮し、詳細な有限要素分割を行う(節点数 4381, 要素数 3744)。なお、繊維体積率は 56%である。これに対して、 A_2 および B_2 以降のサブストラクチャは等価材料として、微視構造を考慮せず、粗い有限要素分割を施す。図 6.4 に示す A_2 および B_2 は、要素分割が詳細な領域と粗い領域の接続部となるため、やや要素分割数が多いが(節点数 897, 要素数 644), $A_3 \sim A_8$ および $B_3 \sim B_8$ は、図 6.5 のように節点数 27, 要素数 8 と非常に粗い要素分割とする。

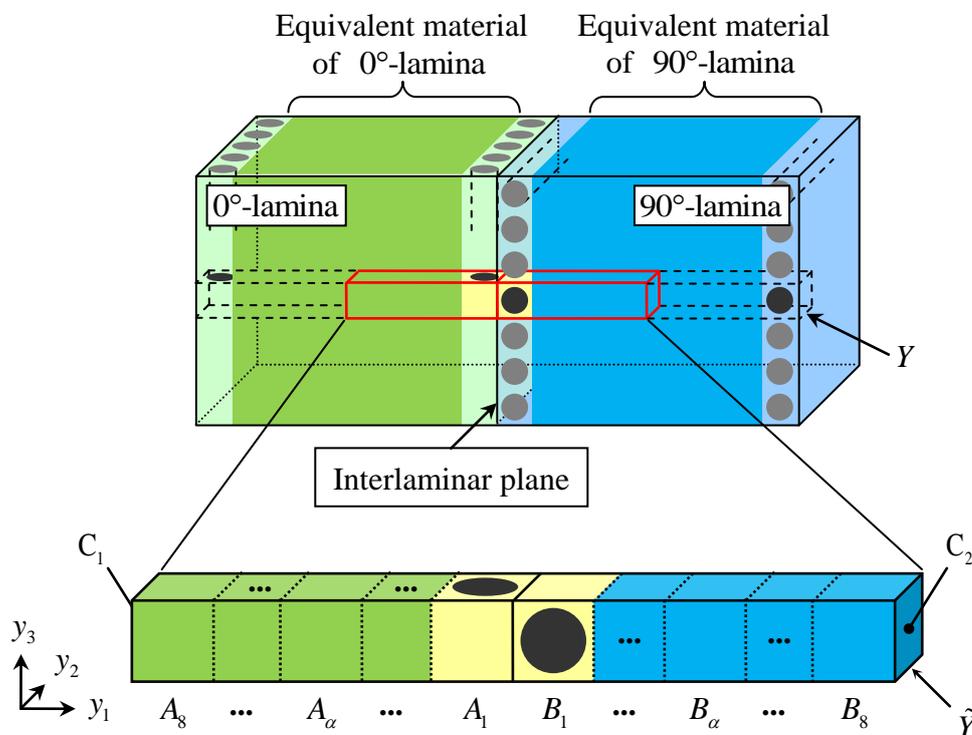


Fig. 6.2 Semiunit cell \tilde{Y} divided into substructures A_α and B_α ($\alpha=1, 2, \dots, 8$).

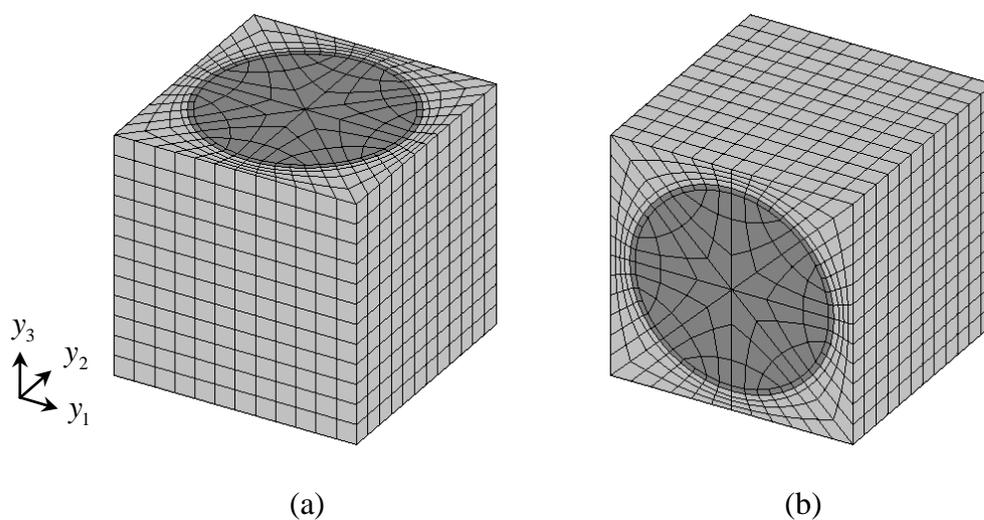


Fig. 6.3 Finite element models of substructures for cross-ply CFRP laminate;
(a) A_1 and (b) B_1 .

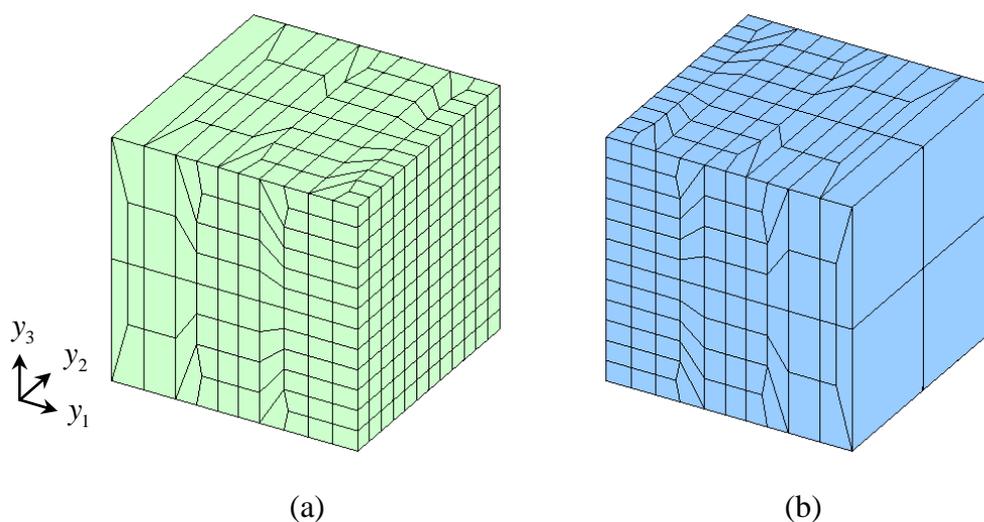


Fig. 6.4 Finite element models of substructures for cross-ply CFRP laminate;
(a) A_2 and (b) B_2 .

構成材料である炭素繊維およびエポキシの材料定数は表 3.1 の値を用いるが、本解析は弾性解析であるから、エポキシは弾性パラメーターのみを使用する。また、 $A_2 \sim A_8$ および $B_2 \sim B_8$ には、 A_1 (あるいは B_1) をユニットセルとし、弾性変形の均質化理論により算出される等価材料物性 (一方向強化ラミナの均質化材料定数) を使用する。

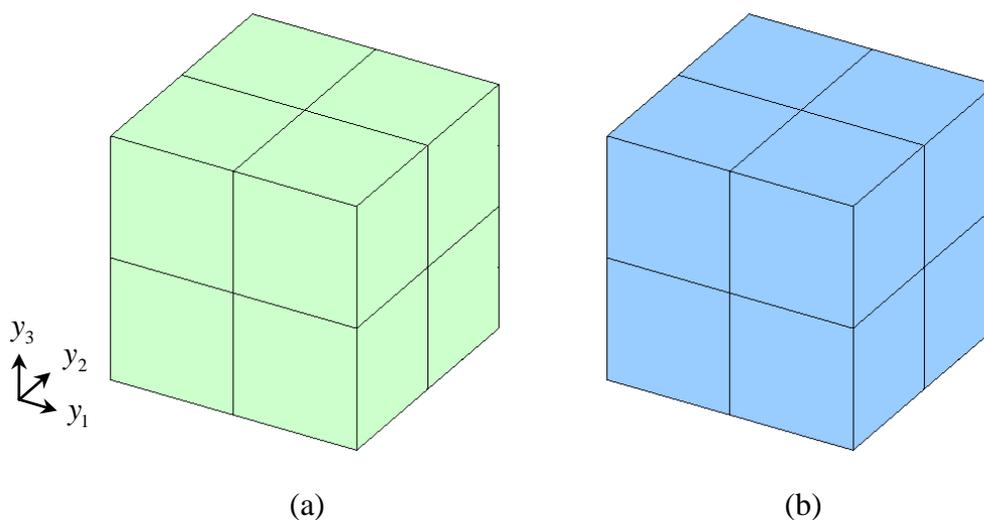


Fig. 6.5 Finite element models of substructures for cross-ply CFRP laminate;
 (a) A_α and (b) B_α ($\alpha = 3, 4, \dots, 8$).

この等価材料物性値を表 6.1 に示す.

負荷条件として, $y_2 - y_3$ 面内で y_3 軸方向との成す角 ψ の方向に, 巨視的弾性単軸引張ひずみ $E_\psi = 0.005$ を与える. 負荷方向は $\psi = 0^\circ, 45^\circ$ とする.

6.3 比較解析

本手法 (解析 A とする) の妥当性・有効性を検証するため, 文献[78]と同じく, ラミナ全体にわたって微視構造を考慮した場合, すなわち, 全ての A_α ($\alpha = 1, 2, \dots, 8$) に対して図 6.3(a)の A_1 を, 全ての B_α ($\alpha = 1, 2, \dots, 8$) に対して図 6.3(b)の B_1 を適用した場合の解析 (解析 B とする) も実施する. 解析 A および解析 B の, 弾性境界値問題 (2.50) の自由度を表 6.2 に示す. この表より, 解析 A の自由度は, 解析 B と比較して 1/5 程度に抑えられており, 計算負荷を大幅に低減することが可能であると予想される.

Table 6.1 Material constants for equivalent material of laminae.

Equivalent material of laminae	$E_{LL}^{\text{UD}} = 136 [\text{GPa}]$	$\nu_{TT}^{\text{UD}} = 0.46$
	$E_{TT}^{\text{UD}} = 8.2 [\text{GPa}]$	$\nu_{LT}^{\text{UD}} = 0.31$
	$G_{LT}^{\text{UD}} = 40.6 [\text{GPa}]$	

Table 6.2 Degrees of freedom (DOFs) for boundary value problem.

	Analysis A	Analysis B
DOF	9051	50091

6. 4 解析結果

6. 4. 1 微視的層間応力分布

まず、 $\psi = 45^\circ$ の際の、解析 A（本解析）によって得られた A_1 の微視的層間合成せん断応力 $(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2)^{1/2}$ のベクトル分布を図 6.6(a)に示す。この図を見ると、3.1 節で示した結果と同様に、クロスプライ CFRP 積層板の層間では、繊維回転に起因する顕著な微視的せん断応力が発生していることがわかる。この解析結果を、解析 B の結果である図 6.6(b)と比較すると、両者は定性的・定量的に精度良く一致していることがわかる。例えば、解析 A の最大値は 9.065MPa、解析 B の最大値は 9.083MPa であり、誤差は 0.2%程度に抑えられている。

つづいて、解析 A により得られた微視的層間面外垂直応力 σ_{11} の分布を図 6.7(a)に示す。この結果に関しても、3.1 節の結果と同様に、積層板には巨視的引張負荷のみを与えているにもかかわらず、微視的には面外方向に複雑な引張・圧縮応力が生じており、 $\psi = 45^\circ$ 方向に沿って圧縮応力が、 $\psi = -45^\circ$ 方向に沿って引張応力が発生していることがわかる。このような応力分布は、解析 B の結果である図 6.7(b)と非常に良く

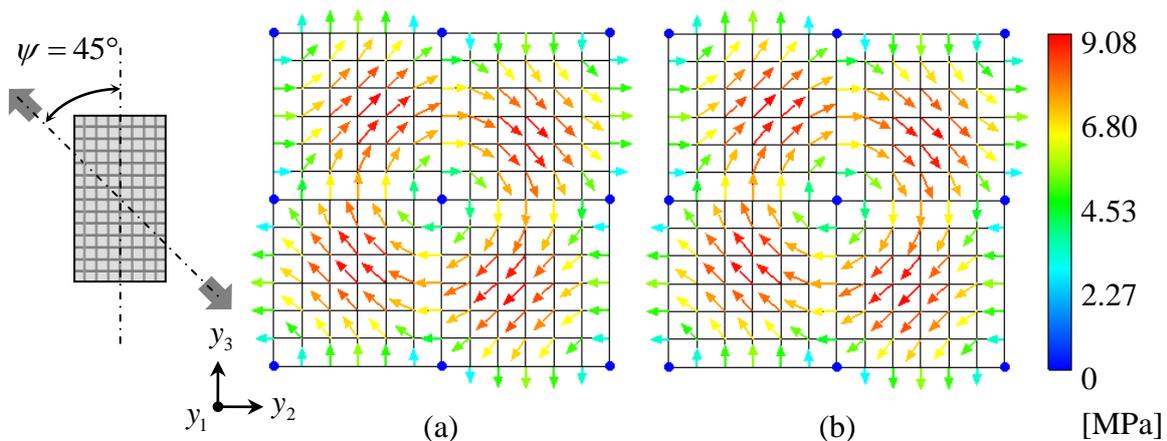


Fig. 6.6 Vector distributions of interlaminar resultant shear stress $(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2)^{1/2}$; (a) analysis A and (b) analysis B ($\psi = 45^\circ$, $E_\psi = 0.005$).

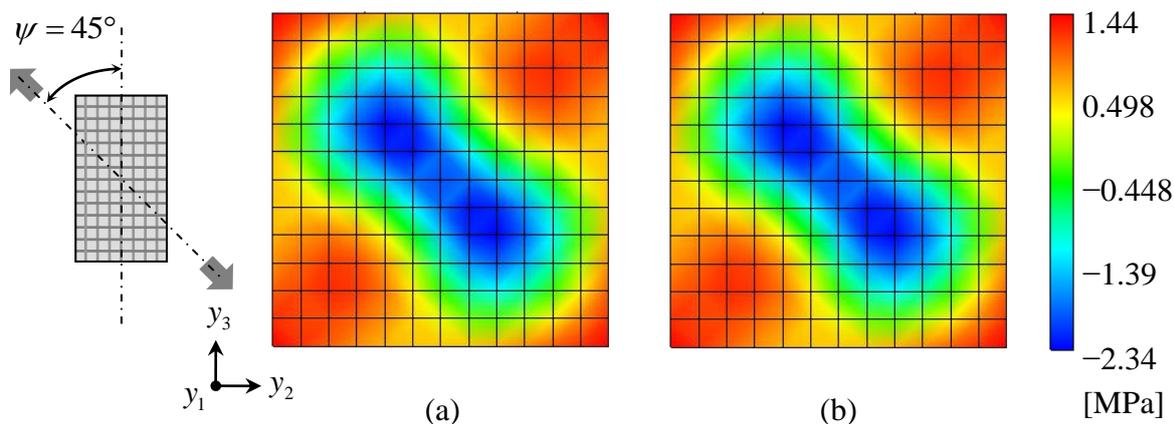


Fig. 6.7 Distributions of interlaminar out-of-plane normal stress σ_{11} ;
 (a) analysis A and (b) analysis B ($\psi = 45^\circ$, $E_\psi = 0.005$).

一致している. 上述したせん断応力の場合と同様に比較すると, 引張応力の最大値は, 解析 A で 1.444MPa, 解析 B で 1.441MPa, 圧縮応力の最大値は, 解析 A で -2.340MPa, 解析 B で -2.341MPa となっており, それぞれの誤差は 0.2% および 0.03% 程度である.

次に, $\psi = 0^\circ$ の解析結果として, 同様に合成せん断応力 $(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2)^{1/2}$ および面外垂直応力 σ_{11} の分布をそれぞれ図 6.8, 図 6.9 に示す. いずれの解析結果も, 解析 A と解析 B とで精度の良い一致を示している. 両手法により得られる結果の誤差は, それぞれ図 6.8 の最大せん断応力で約 0.12%, 図 6.9 では最大引張応力で約 0.13%, 最大圧縮

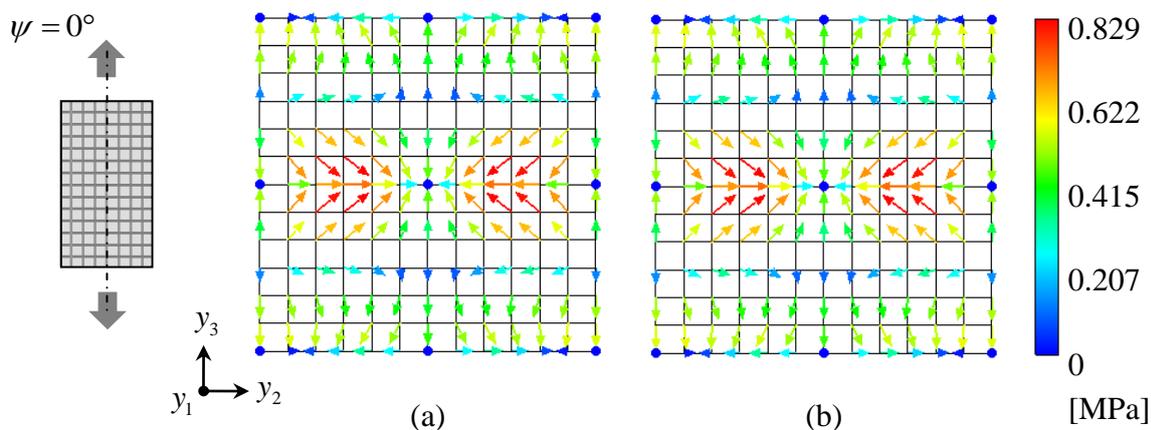


Fig. 6.8 Vector distributions of interlaminar resultant shear stress $(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2)^{1/2}$;
 (a) analysis A and (b) analysis B ($\psi = 0^\circ$, $E_\psi = 0.005$).

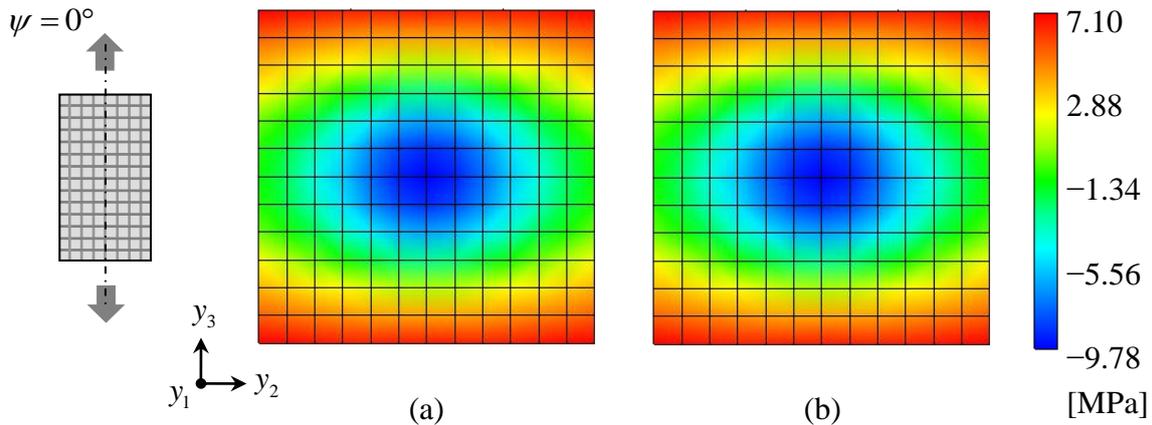


Fig. 6.9 Distributions of interlaminar out-of-plane normal stress σ_{11} ;
 (a) analysis A and (b) analysis B ($\psi = 0^\circ$, $E_\psi = 0.005$).

応力で約 0.25%である.

以上の結果から、クロスプライ CFRP 積層板の微視的層間応力分布を解析する手法として、本手法は妥当であると言える。

6. 4. 2 計算効率の検討

本手法の計算効率を検討するため、境界値問題(2.50)の求解に要した時間を、解析 A および解析 B の場合に対してそれぞれ表 6.3 に示す。なお、解析にはワークステーション (AMD Opteron 6168) を使用し、境界値問題(2.50)の求解には LU 分解法 (Intel MKL 11.0) を用いた。この結果から、本手法を用いた解析 A は、解析 B と比べて計算時間が約 1/165 に短縮されており、極めて計算効率が上昇していることがわかる。

上述した結果より、本手法は、全領域にわたって微視構造を考慮した解析と同等の解析精度を達成しつつ、高い計算効率を提供する手法であると言える。

Table 6.3 Computational time.

	Analysis A	Analysis B
Time [s]	79.9	13186

6.5 まとめ

本章では、クロスプライ CFRP 積層板の微視的層間応力解析を効率的に行う手法を新規に開発し、これを用いて、面内引張負荷を受けるクロスプライ CFRP 積層板の微視的層間応力分布を解析した。解析を行うにあたって、層間の影響範囲内では炭素繊維と母材からなる微視構造を考慮し、一方で、層間の影響が及ばないラミナ内部は、一方向強化ラミナと等価な一様材料への置き換えを行うというモデル化を実施した。本手法を用いた解析により得られた、面内単軸引張負荷を受けるクロスプライ CFRP 積層板の、層間における顕著なせん断応力分布および複雑な面外引張・圧縮応力分布は、積層板全体にわたり微視構造を考慮した場合の解析結果と非常に良く一致しており、本手法の妥当性が示された。さらに、解析に要する計算時間は約1/165となり、計算コストの大幅な低減が可能であることが明らかとなった。

上述のように本手法は、解析の精度を保ちつつ、高い計算効率を実現し得るから、クロスプライ積層板よりもさらに内部構造が複雑な、アングルプライ積層板や擬似等方積層板などの層間応力解析も効率良く実施できると予想される。また本手法では、層間近傍においてのみ微視構造を考えればよいため、層間近傍でランダムに繊維が配列された微視構造を採用することで、より現実に即した層間応力解析が比較的 low コストで実現できると考えられる。なお本章では、本手法の妥当性を検討するため、有限要素分割が詳細な領域と粗い領域とを接続するための有限要素モデルを使用した。重合メッシュ等の手法を用いると、要素分割の粗さが異なるモデル同士を直接接続することも可能である[93-96]。さらに本手法は、計算効率が高いことから、増分計算が必要となる非弾性層間応力解析への展開も期待できる。これらは今後の研究課題である。

第7章

結 言

本研究では、微視構造を有する材料の特性解析に有用な手法である均質化理論に基づき、ラミナ層間やフリーエッジといった周期構造不連続面を有する3次元ユニットセルを定義することで、周期構造不連続面を考慮したCFRP積層板の弾-粘塑性マルチスケール解析を実施した。本研究の結果は以下のようにまとめられる。

まず2章では、本研究で使用した時間依存材料に関する均質化理論について解説した。さらに、ユニットセルの点対称内部構造を利用した解析領域の半減方法を述べるとともに、解析に要する計算コストの低減を目的として、サブストラクチャ法を本理論に導入した。

つづいて3章では、3種類のCFRP積層板を対象として、層間を有する3次元ユニットセルを定義し、均質化理論に基づき弾-粘塑性層間応力解析を実施した。解析の結果、CFRP積層板の層間では、炭素繊維とエポキシからなる微視構造に起因して、複雑な微視的層間応力分布が発生することが明らかとなった。特に、CFRP積層板が非主軸方向負荷を受ける際には、繊維回転によって層間では顕著な微視的せん断応力が発生した。これらの解析結果は、本研究のようにCFRP積層板の微視構造を考慮することで初めて得られる結果であり、本手法の有用性が示された。

4章では、従来は周期構造を有する無限体を対象に理論展開されてきた均質化理論を、境界積分項を検討することで、フリーエッジ問題に対しても適用可能な形式へと

発展させた。また、解析領域としてフリーエッジを有するユニットセル（半ユニットセル）を定義し、提案手法を用いて一方向およびクロスプライ CFRP 積層板のフリーエッジ解析を実施した。その結果、CFRP 積層板のフリーエッジでは、積層板内部とは大きく異なる特徴的な微視的応力・ひずみ分布が発生し、異種材料境界面およびその近傍では顕著な応力集中が確認された。一方で、フリーエッジからわずかに離れたところのような応力集中は消失することから、フリーエッジが微視的に影響を及ぼす範囲は極めて局所的であることが示された。

5章では、弾-粘塑性変形を受けるアングルプライ CFRP 積層板の負の積層方向ポアソン比を、巨視的・微視的双方の観点からマルチスケールの調査した。解析の結果、積層構成がおおよそ $[\pm 15]$ から $[\pm 40]$ の領域で積層方向ポアソン比は負となり、さらに粘塑性域では負の積層方向ポアソン比の絶対値が増加することを見出した。積層方向ポアソン比が負となる理由は、 $+\theta$ -ラミナと $-\theta$ -ラミナの相互作用により、各ラミナにおいて繊維軸直交方向に大きな圧縮応力が生じ、その結果、ラミナに正の積層方向ひずみが発生するからであった。さらに粘塑性域では、上記の圧縮応力がエポキシの粘塑性変形を引き起こし、正の積層方向ひずみを増大させるため、負の積層方向ポアソン比の絶対値が増加した。

6章では、クロスプライ CFRP 積層板の微視的層間応力解析を効率的に行うための手法を提案し、従来手法との比較解析を実施することで、提案手法の有効性を検討した。提案手法では、CFRP 積層板のモデル化に際し、層間の影響範囲内では炭素繊維とエポキシからなる微視構造を考え、一方で層間の影響を受けないラミナ内部は、一方向強化ラミナと等価な一様材料へと置換することで、ラミナ内部の要素分割を大幅に簡略化した。比較解析の結果、提案手法を用いて得られた微視的層間応力分布は、従来手法による結果と精度良く一致した。このことから、提案手法が解析精度を保ちつつ、高い計算効率を実現し得る手法であることが示された。

付 録

A. 1 有限要素法

本研究で使用した均質化理論に基づき解析を行う際には、特性関数 χ_i^{kl} , φ_i を求めるための境界値問題(2.13), (2.14)を解く必要がある。これは一般に有限要素法を用いて行われるので、ここでは有限要素法による境界値問題の解法とそれに関連する事項を述べる。

時間依存材料に関する均質化理論では、2.1節で述べたように、 χ_i^{kl} , φ_i を求めるための境界値問題がユニットセル Y に対して次のように導かれる。

$$\int_Y c_{ijpq} \chi_{p,q}^{kl} v_{i,j} dY = - \int_Y c_{ijkl} v_{i,j} dY \quad (\text{A.1})$$

$$\int_Y c_{ijpq} \varphi_{p,q} v_{i,j} dY = \int_Y c_{ijkl} \beta_{kl} v_{i,j} dY \quad (\text{A.2})$$

これらの式を Y -周期境界条件のもとに解くことで特性関数を得る。

上で述べた境界値問題を、一般的な有限要素法の手法に従ってマトリックス表記すると、次のようになる。

$$\left(\int_Y \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dY + \lambda \mathbf{L}^T \mathbf{L} \right) \boldsymbol{\chi}^{kl} = - \int_Y \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{kl} dY \quad (\text{A.3})$$

$$\left(\int_Y \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dY + \lambda \mathbf{L}^T \mathbf{L} \right) \boldsymbol{\varphi} = \int_Y \mathbf{B}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\beta} dY \quad (\text{A.4})$$

ここで $()^T$ は転置を表す。上式に含まれる各マトリックス、およびベクトルの詳細を以下に述べる。

□ \mathbf{B}

ひずみ-変位マトリックスを表す。すなわち、ユニットセル Y における座標系を y_i

($i=1,2,3$)とし、工学的ひずみを考えれば、

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \partial/\partial y_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial y_3 \\ \partial/\partial y_2 & \partial/\partial y_1 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y_3 & \partial/\partial y_2 \\ \partial/\partial y_3 & 0 & \partial/\partial y_1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

と書ける。なお \mathbf{B} は、形状関数 N_i を用いると、

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial y_1} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y_1} & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y_2} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y_2} & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y_3} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y_3} & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y_3} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y_2} & \frac{\partial N_1}{\partial y_1} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y_2} & \frac{\partial N_2}{\partial y_1} & 0 & \dots & \frac{\partial N_i}{\partial y_2} & \frac{\partial N_i}{\partial y_1} & \dots \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y_3} & \frac{\partial N_1}{\partial y_2} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y_3} & \frac{\partial N_2}{\partial y_2} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y_3} & \frac{\partial N_i}{\partial y_2} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y_3} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y_1} & \frac{\partial N_2}{\partial y_3} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y_1} & \frac{\partial N_i}{\partial y_3} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y_1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

と書くことができる。

□ \mathbf{C}

c_{ijkl} に基づく弾性剛性マトリックスであり、次式のように表される。

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & c_{1112} & c_{1123} & c_{1131} \\ c_{2211} & c_{2222} & c_{2233} & c_{2212} & c_{2223} & c_{2231} \\ c_{3311} & c_{3322} & c_{3333} & c_{3312} & c_{3323} & c_{3331} \\ c_{1211} & c_{1222} & c_{1233} & c_{1212} & c_{1223} & c_{1231} \\ c_{2311} & c_{2322} & c_{2333} & c_{2312} & c_{2323} & c_{2331} \\ c_{3111} & c_{3122} & c_{3133} & c_{3112} & c_{3123} & c_{3131} \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

ただし $c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{klij}$ の関係が成立するので、 \mathbf{C} は対称マトリックスである。

□ C^{kl}

kl に対応する C の列ベクトルであり,

$$C^{kl} = \{c_{11kl} \quad c_{22kl} \quad c_{33kl} \quad c_{12kl} \quad c_{23kl} \quad c_{31kl}\}^T \quad (kl = 11, 22, \dots, 31) \quad (\text{A.8})$$

と表される.

□ β

β_{ij} に基づく粘塑性ベクトルであり, 以下のように表される.

$$\beta = \{\beta_{11} \quad \beta_{22} \quad \beta_{33} \quad 2\beta_{12} \quad 2\beta_{23} \quad 2\beta_{31}\}^T \quad (\text{A.9})$$

なお, せん断成分は工学的表記を用いている.

□ χ^{kl}, φ

χ_i^{kl} および φ_i の節点値ベクトルであり, 求めるべき未知数である. これらは, 総節点数を N とすると, 次のように表される.

$$\chi^{kl} = \left\{ \begin{array}{c} {}^{(1)}\chi^{kl} \\ {}^{(2)}\chi^{kl} \\ {}^{(3)}\chi^{kl} \\ \vdots \\ {}^{(N)}\chi^{kl} \end{array} \right\} \quad (\text{A.10})$$

$$\varphi = \left\{ \begin{array}{c} {}^{(1)}\varphi \\ {}^{(2)}\varphi \\ {}^{(3)}\varphi \\ \vdots \\ {}^{(N)}\varphi \end{array} \right\} \quad (\text{A.11})$$

ここで, ${}^{(j)}\chi^{kl}$, ${}^{(j)}\varphi$ はそれぞれ j 番目の節点における χ_i^{kl} , φ_i の節点値ベクトルであり,

$${}^{(j)}\chi^{kl} = \{{}^{(j)}\chi_1^{kl} \quad {}^{(j)}\chi_2^{kl} \quad {}^{(j)}\chi_3^{kl}\}^T \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (\text{A.12})$$

$${}^{(j)}\varphi = \{{}^{(j)}\varphi_1 \quad {}^{(j)}\varphi_2 \quad {}^{(j)}\varphi_3\}^T \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (\text{A.13})$$

である.

□ λ

ペナルティ数を示し、一般に大きい実数である。なお、本研究では $10^8 \sim 10^{12}$ 程度の値を用いた。

□ L

ペナルティ法に基づく拘束マトリックスを表す。

A. 2 アイソパラメトリック要素

アイソパラメトリック要素とは、要素の変位分布を近似する関数と、要素の形状を表現する関数に同じ補間関数を使用する要素のことである。この補間関数は一般に形状関数と呼ばれる。図 A.2.1 に示すような、全体座標系 (x, y, z) における要素 V を考える。この V の 8 点の節点番号を、図中に示す順番で 1~8 とし、それぞれの節点座標を $(x_1, y_1, z_1) \sim (x_8, y_8, z_8)$ とする。さらに、この V を正規化された局所座標系 (ξ, η, ζ) へと写像した要素 V' を考える。この V' は、 $-1 \leq \xi, \eta, \zeta \leq 1$ の領域を占める一辺の長さが 2 の立方体である。これにより、 V 内部に含まれる座標 (x_p, y_p, z_p) の任意点は、局所座標系では座標 (ξ_p, η_p, ζ_p) へと写像される。ここで、任意点の座標 (x_p, y_p, z_p) は、形状

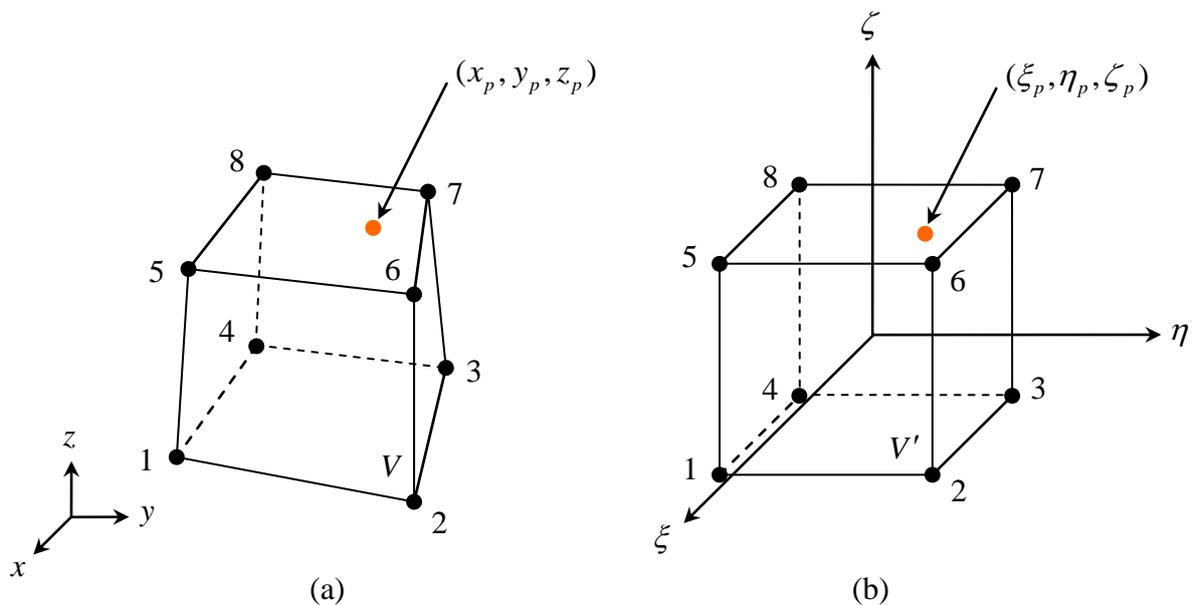


Fig. A.2.1 Two kinds of rectangular coordinates; (a) global coordinate and (b) local coordinate.

関数 N_i と、 V を構成する節点の座標 (x_i, y_i, z_i) を用いて、次のように表現される。

$$x_p = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi_p, \eta_p, \zeta_p) x_i \quad (\text{A.14})$$

$$y_p = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi_p, \eta_p, \zeta_p) y_i \quad (\text{A.15})$$

$$z_p = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi_p, \eta_p, \zeta_p) z_i \quad (\text{A.16})$$

また、任意点の変位 (u_p, v_p, w_p) は、節点1~8の変位 $(u_1, v_1, w_1) \sim (u_8, v_8, w_8)$ により

$$u_p = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi_p, \eta_p, \zeta_p) u_i \quad (\text{A.17})$$

$$v_p = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi_p, \eta_p, \zeta_p) v_i \quad (\text{A.18})$$

$$w_p = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi_p, \eta_p, \zeta_p) w_i \quad (\text{A.19})$$

と表すことができる。このように、節点の値を用いて、要素内部の任意の点における値を求めることは、一般に内挿と呼ばれる。なお、本研究で使用した8節点アイソパラメトリック要素に対する形状関数を以下に記す。

$$N_1 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \quad (\text{A.20})$$

$$N_2 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \quad (\text{A.21})$$

$$N_3 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta) \quad (\text{A.22})$$

$$N_4 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta) \quad (\text{A.23})$$

$$N_5 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \quad (\text{A.24})$$

$$N_6 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \quad (\text{A.25})$$

$$N_7 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta) \quad (\text{A.26})$$

$$N_8 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta) \quad (\text{A.27})$$

また、式(A.6)に示すように、ひずみ-変位マトリックス \mathbf{B} の構築には、形状関数 N_i を全体座標系 (x, y, z) で微分した項 (カーテシアン導関数) が必要となる。そこで、 N_i の ξ , η , ζ に関する微分を考えると、連鎖則に基づき以下のように表される。

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \quad (\text{A.28})$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta} \quad (\text{A.29})$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \zeta} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \quad (\text{A.30})$$

式(A.28)-(A.30)をマトリックス表記すると、次のように表される。

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.31})$$

ここで、 $[\mathbf{J}]$ はヤコビ行列と呼ばれており、これは

$$[\mathbf{J}] = \sum_{i=1}^8 \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} z_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} z_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} x_i & \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} y_i & \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} z_i \end{bmatrix} \quad (\text{A.32})$$

である。したがって、カーテシアン導関数は、

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.33})$$

と求めることができる。

A. 3 外挿法

有限要素法で算出される応力値は、要素内部に存在する応力評価点（ガウス点）の値であるから、各節点の応力値を得るためには、応力評価点で算出される応力値から、何らかの手法を用いて節点応力を計算する必要がある。本節では、節点応力の算出に際して、広く用いられる外挿法を解説する。

変位分布と同様に、要素内部の応力分布も形状関数に従うと仮定する。このとき、節点 i ($i=1, 2, \dots, 8$)の節点応力 σ_{kl}^i が既知であれば、 i に近接する応力評価点 G_i の応力 $\sigma_{kl}^{G_i}$ は、内挿により

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{kl}^{G_1} \\ \sigma_{kl}^{G_2} \\ \sigma_{kl}^{G_3} \\ \vdots \\ \sigma_{kl}^{G_8} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & \cdots & N_8 \\ N_1 & N_2 & N_3 & & N_8 \\ N_1 & N_2 & N_3 & & N_8 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ N_1 & N_2 & N_3 & \cdots & N_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{kl}^1 \\ \sigma_{kl}^2 \\ \sigma_{kl}^3 \\ \vdots \\ \sigma_{kl}^8 \end{Bmatrix} \quad (kl=11, 22, \dots, 31) \quad (\text{A.34})$$

のように計算される。外挿法により、応力評価点の応力値から節点応力を計算する場合は、式(A.34)の逆問題を解けば良いので、節点応力は次式で求めることができる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{kl}^1 \\ \sigma_{kl}^2 \\ \sigma_{kl}^3 \\ \vdots \\ \sigma_{kl}^8 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & \cdots & N_8 \\ N_1 & N_2 & N_3 & & N_8 \\ N_1 & N_2 & N_3 & & N_8 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ N_1 & N_2 & N_3 & \cdots & N_8 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_{kl}^{G_1} \\ \sigma_{kl}^{G_2} \\ \sigma_{kl}^{G_3} \\ \vdots \\ \sigma_{kl}^{G_8} \end{Bmatrix} \quad (kl=11, 22, \dots, 31) \quad (\text{A.35})$$

A. 4 フリーエッジ解析手法の妥当性の検証

本節では、4章で提案した均質化理論に基づくフリーエッジ解析手法の妥当性を検

証する．比較解析として，文献[19-21]の結果に基づき，フリーエッジを有するボロン繊維／エポキシ積層板が引張負荷を受ける際の微視的応力分布を解析する．解析モデルは図 A.4.1 に示すような半ユニットセルを使用する．図 A.4.1 に示すように，本モデルは x 軸および y 軸方向をフリーエッジ方向とした 2 方向フリーエッジ解析となっている．ボロン繊維およびエポキシ樹脂の材料定数を文献[19-21]と同じく表 A.4.1 のように定める．負荷条件は z 軸方向に巨視的弾性引張負荷 $\varepsilon_{zz} = 1$ を与え，平面ひずみ条件の下で解析を行う．

図 A.4.2 は図 A.4.1 中に示した A-A 境界面における微視的応力 σ_{yy} の分布を，本手法による解析結果と文献[20]の結果で比較したものである．なお，図中のグラフは文献

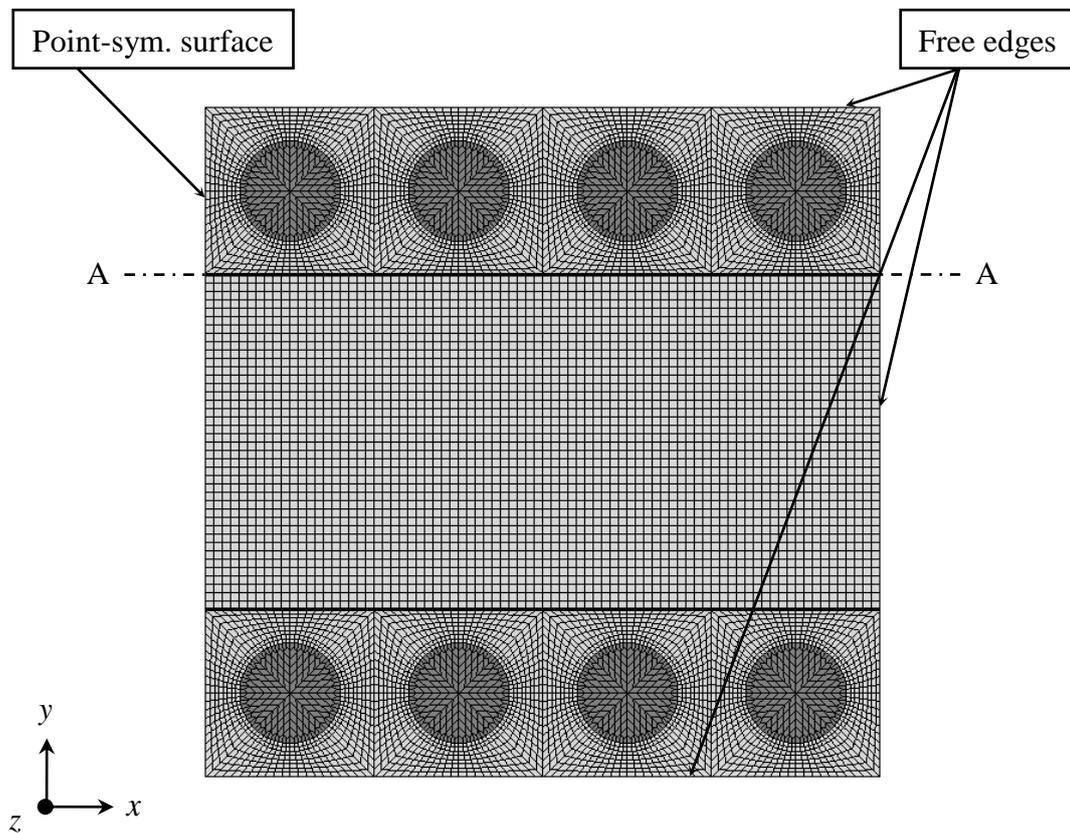


Fig. A.4.1 Analysis model of boron/epoxy laminate with free edges.

Table A.4.1 Material constants of boron fibers and epoxy matrix.

Boron fiber	$E_{bo} = 60 \times 10^6$ [psi]	$\nu_{bo} = 0.2$
Epoxy	$E_{ep} = 0.5 \times 10^6$ [psi]	$\nu_{ep} = 0.34$

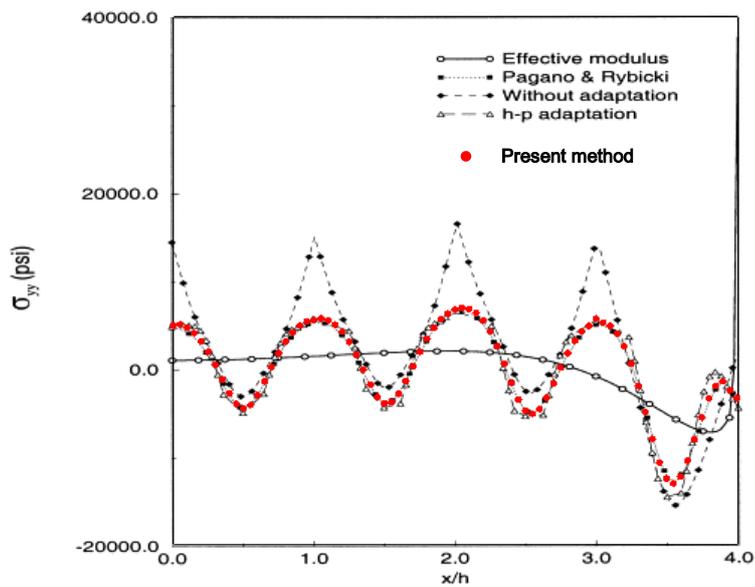


Fig. A.4.2 Distribution of σ_{yy} at section A-A.

より引用したもので、これに本手法による解析結果を重ねて描いている。図 A.4.2 より、本手法により得られた結果は、文献で示された結果とほぼ一致していることがわかる。したがって、本手法を用いることで、材料内部からフリーエッジにわたって精度の良い解析結果が得られることが示されたと言える。

参考文献

- [1] Y. Hu, Z. Xia, F. Ellyin, "Deformation behavior of an epoxy resin subject to multiaxial loadings. Part I: Experimental investigations", *Polymer Engineering and Science*, Vol.43 (2003), pp. 721-733.
- [2] Z. Xia, Y. Hu, F. Ellyin, "Deformation behavior of an epoxy resin subject to multiaxial loadings. Part II: Constitutive modeling and predictions", *Polymer Engineering and Science*, Vol. 43 (2003), pp. 734-748.
- [3] 小林誠一, 富井大介, 志澤一之, "クレイズの進展・消滅を考慮したポリマの破断予測モデルおよび大変形シミュレーション", *日本機械学会論文集 (A 編)*, Vol. 70 (2004), pp. 810-817.
- [4] A.R. Melro, P.P. Camanho, F.M. Andrade Pires, S.T. Pinho, "Micromechanical analysis of polymer composites reinforced by unidirectional fibres: Part I – Constitutive modelling", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 50 (2013), pp. 1897-1905.
- [5] M. Hojo, S. Matsuda, M. Tanaka, S. Ochiai, A. Murakami, "Mode I delamination fatigue properties of interlayer-toughened CF/epoxy laminates", *Composites Science and Technology*, Vol. 66 (2006), pp. 665-675.
- [6] T. Hobbiebrunken, M. Hojo, T. Adachi, C.D. Jong, B. Fiedler, "Evaluation of interfacial strength in CF/epoxies using FEM and in-situ experiments", *Composites: Part A*, Vol. 37 (2006), pp. 2268-2256.
- [7] L. Mishnaevsky Jr., P. Brøndsted, "Micromechanical modeling of damage and fracture of unidirectional fiber reinforced composites: A review", *Computational Materials Science*, Vol. 44 (2009), pp. 1351-1359.
- [8] M.R. Wisnom, "Modelling discrete failures in composites with interface elements", *Composites: Part A*, Vol. 41 (2010), pp. 795-805.
- [9] 藤田雄三, 倉敷哲生, "繊維配列のランダム性を考慮した一方向繊維強化複合材料の繊維直角方向の力学的特性評価手法に関する研究", *材料*, Vol. 60 (2011),

- pp. 402-407.
- [10] T. Okabe, M. Nishikawa, H. Toyoshima, "A periodic unit-cell simulation of fiber arrangement dependence on the transverse tensile failure in unidirectional carbon fiber reinforced composites", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 48 (2011), pp. 2948-2959.
- [11] A.R. Melro, P.P. Camanho, F.M. Andrade Pires, S.T. Pinho, "Micromechanical analysis of polymer composites reinforced by unidirectional fibres: Part II – Micromechanical analyses", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 50 (2013), pp. 1906-1915.
- [12] P. Prabhakar, A.M. Waas, "Micromechanical modeling to determine the compressive strength and failure mode interaction of multidirectional laminates", *Composites: Part A*, Vol. 50 (2013), pp. 11-21.
- [13] J. Koyanagi, Y. Sato, T. Sasayama, T. Okabe, S. Yoneyama, "Numerical simulation of strain-rate dependent transition of transverse tensile failure mode in fiber-reinforced composites", *Composites: Part A*, Vol. 56 (2014), pp. 136-142.
- [14] M. Arai, J. Hirokawa, Y. Hanamura, H. Ito, M. Hojo, M. Quaresimin, "Characteristic of mode I fatigue crack propagation of CFRP laminates toughened with CNF interlayer", *Composites: Part B*, Vol. 65 (2014), pp. 26-33.
- [15] T. Okabe, H. Imamura, Y. Sato, R. Higuchi, J. Koyanagi, R. Talreja, "Experimental and numerical studies of initial cracking in CFRP cross-ply laminates", *Composites: Part A*, Vol. 68 (2015), pp. 81-89.
- [16] A. Nosier, M. Maleki, "Free-edge stresses in general composite laminates", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 50 (2008), pp. 1435-1447.
- [17] R.B. Pipes, J. Goodsell, A. Ritchey, J. Dustin, J. Gosse, "Interlaminar stresses in composite laminates: Thermoelastic deformation", *Composites Science and Technology*, Vol. 70 (2010), pp. 1605-1611.
- [18] J. Goodsell, N.J. Pagano, O. Kravchenko, R.B. Pipes, "Interlaminar stresses in composite laminates subjected to anticlastic bending deformation", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 80 (2013), 041020 (7 pages).

- [19] N.J. Pagano, E.F. Rybicki, "On the significance of effective modulus solutions for fibrous composite", *Journal of Composite Materials*, Vol. 8 (1974), pp. 214-228.
- [20] P. Raghavan, S. Moorthy, S. Ghosh, N.J. Pagano, "Revisiting the composite laminate problem with an adaptive multi-level computational model", *Composites Science and Technology*, Vol. 61 (2001), pp. 1017-1040.
- [21] P. Raghavan, S. Ghosh, "Concurrent multi-scale analysis of elastic composites by a multi-level computational model", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 193 (2004), pp. 497-538.
- [22] 米山聡, "画像相関法の基本原理と面内変位・ひずみ分布測定手順", *日本複合材料学会誌*, Vol. 40 (2014), pp. 135-145.
- [23] P. Lecomte-Grosbras, B. Paluch, M. Brieu, G. De Saxcé, L. Sabatier, "Interlaminar shear strain measurement on angle-ply laminate free edge using digital image correlation", *Composites: Part A*, Vol. 40 (2009), pp. 1911-1920.
- [24] L.P. Canal, C. González, J.M. Molina-Aldareguía, J. Segurado, J. LLorca, "Application of digital image correlation at the microscale in fiber-reinforced composites", *Composites: Part A*, Vol. 43 (2012), pp. 1630-1638.
- [25] 張劍奇, 河井昌道, 斎藤覚, 肖毅, 八田博志, "一方向 CFRP の高温における非主軸引張・圧縮非線形挙動のひずみ速度依存性と粘塑性モデルの定式化", *日本複合材料学会誌*, Vol. 35 (2009), pp. 3-14.
- [26] M. Kawai, J.Q. Zhang, Y. Xiao, H. Hatta, "Modeling of tension-compression asymmetry in off-axis nonlinear rate-dependent behavior of unidirectional carbon/epoxy composites", *Journal of Composite Materials*, Vol. 44 (2010), pp. 75-94.
- [27] P.F. Liu, J.Y. Zheng, "Recent developments on damage modeling and finite element analysis for composite laminates: A review", *Materials and Design*, Vol. 31 (2010), pp. 3825-3834.
- [28] G.M. Vyas, S.T. Pinho, P. Robinson, "Constitutive modelling of fibre-reinforced composites with unidirectional plies using a plasticity-based approach", *Composites Science and Technology*, Vol. 71 (2011), pp. 1068-1074.
- [29] P. Prabhakar, A.M. Waas, "A novel continuum-decohesive finite element for modeling

- in-plane fracture in fiber reinforced composites", *Composites Science and Technology*, Vol. 83 (2013), pp. 1-10.
- [30] R.F. Almgren, "An isotropic three-dimensional structure with Poisson's ratio = -1 ", *Journal of Elasticity*, Vol.15 (1985), pp. 427-430.
- [31] R. Lakes, "Form structures with a negative Poisson's ratio", *Science*, Vol. 235 (1987), pp. 1038-1040.
- [32] K.E. Evans, M.A. Nkansah, I.J. Hutchinson, S.C. Rogers, "Molecular network design", *Nature*, Vol. 353 (1991), p. 124.
- [33] G.W. Milton, "Composite materials with Poisson's ratios close to -1 ", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 40 (1992), pp. 1105-1137.
- [34] Y. Prawoto, "Seeing auxetic materials from the mechanics point of view: A structural review on the negative Poisson's ratio", *Computational Materials Science*, Vol. 58 (2012), pp. 140-153.
- [35] C.T. Herakovich, "Composite laminates with negative through-the-thickness Poisson's ratios", *Journal of Composite Materials*, Vol.18 (1984), pp. 447-455.
- [36] L.N. McCartney, A. Kelly, "Effective thermal and elastic properties of $[+\theta/-\theta]_s$ laminates", *Composites Science and Technology*, Vol. 67 (2007), pp. 646-661.
- [37] E.H. Harkati, A. Bezazi, F. Scarpa, K. Alderson, A. Alderson, "Modelling the influence of the orientation and fibre reinforcement on the negative Poisson's ratio in composite laminates", *Physica Status Solidi (b)*, Vol. 244 (2007), pp. 883-892.
- [38] E.H. Harkati, A. Bezazi, W. Boukharouba, F. Scarpa, "Influence of carbon fibre on the through-the-thickness NPR behaviour of composite laminates", *Physica Status Solidi (b)*, Vol. 246 (2009), pp. 2111-2117.
- [39] J.F. Clarke, R.A. Duckett, P.J. Hine, I.J. Hutchinson, I.M. Ward, "Negative Poisson's ratios in angle-ply laminates: theory and experiment", *Composites*, Vol. 25 (1994), pp. 863-868.
- [40] 三木光範, "ポアソン比は負になるか?", *材料*, Vol. 37 (1988), pp. 354-355.
- [41] 三木光範, 福田武人, 元木信弥, 北條正樹, *機械システム入門シリーズ:8 複合材料*, 共立出版, 東京, (1997).

- [42] D. Hull, T.W. Clyne 共著, 宮入裕夫, 池上皓三, 金原勲 共訳, 複合材料入門 [改訂版], 培風館, 東京, (2003).
- [43] 邊吾一, 石川隆司, 先進複合材料工学, 培風館, 東京, (2005).
- [44] J.C. Halpin, "Stiffness and expansion estimates for oriented short fiber composites", *Journal of Composite Materials*, Vol. 3 (1969), pp. 732-734.
- [45] J.D. Eshelby, "The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems", *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Section A*, Vol. 241 (1957), pp. 376-396.
- [46] T. Mori, K. Tanaka, "Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions", *Acta Metallurgica*, Vol. 21, pp. 571-574.
- [47] A. Bensoussan, J.L. Lions, G. Papanicolau, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North Holland, Amsterdam, (1978).
- [48] E. Sanchez-Palencia, *Non-homogeneous media and vibration theory*, *Lecture Notes in Physics*, Vol. 127, Springer-Verlag, Berlin, (1980).
- [49] P.M. Suquet, *Elements of homogenization for inelastic solid mechanics*. In: E. Sanchez-Palencia, A. Zaoui (Eds.), *Homogenization Techniques for Composite Media*, *Lecture Notes in Physics*, Vol. 272, Springer-Verlag, Berlin, (1987).
- [50] N. Bakhvalov, G. Panasenko, *Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht, (1984).
- [51] S. Ghosh, K. Lee, S. Moorthy, "Two scale analysis of heterogeneous elastic-plastic materials with asymptotic homogenization and Voronoi cell finite element model", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 132 (1996), pp. 63-116.
- [52] N. Takano, Y. Ohnishi, M. Zako, K. Nishiyabu, "The formulation of homogenization method applied to large deformation problem for composite materials", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 37 (2000), pp. 6517-6535.
- [53] K. Terada, N. Kikuchi, "A class of general algorithms for multi-scale analyses of heterogeneous media", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 190 (2001), pp. 5427-5464.
- [54] V. Carvelli, C. Poggi, "A homogenization procedure for the numerical analysis of woven

- fabric composites", *Composites: Part A*, Vol. 32 (2001), pp.1425-1432.
- [55] T. Matsuda, Y. Nimiya, N. Ohno, M. Tokuda, "Elastic-viscoplastic behavior of plain-woven GFRP laminates: Homogenization using a reduced domain of analysis", *Composite Structures*, Vol. 79 (2007), pp. 493-500.
- [56] K. Kaku, M. Arai, T. Fukuoka, T. Matsuda, "Evaluation of thermo-viscoelastic property of CFRP laminate based on a homogenization theory", *Acta Mechanica*, Vol. 214 (2010), pp. 111-121.
- [57] T. Matsuda, S. Kanamaru, N. Yamamoto, Y. Fukuda, "A homogenization theory for elastic-viscoplastic materials with misaligned internal structures", *International Journal of Plasticity*, Vol. 27 (2011), pp. 2056-2067.
- [58] 荒井政大, 諏訪貴昭, 長谷智行, 西村正臣, 松田哲也, "均質化法による一方向 CFRP 積層板の熱粘塑性特性の評価", *計算数理工学論文集*, Vol. 12 (2012), pp. 25-30.
- [59] T. Matsuda, S. Kanamaru, N. Honda, N. Ohno, "Macro/micro elastic-viscoplastic analysis of woven composite laminates with misaligned woven fabrics", *Advanced Structured Materials*, Vol. 19 (2013), pp. 251-261.
- [60] D. Tsalis, T. Baxevanis, G. Chatzigeorgiou, N. Charalambakis, "Homogenization of elastoplastic composites with generalized periodicity in the microstructure", *International Journal of Plasticity*, Vol. 51 (2013), pp. 161-187.
- [61] 荒井政大, 板垣大輔, 西村正臣, 島村佳伸, 小林和幸, "均質化法による CFRP 積層はりの減衰振動特性評価", *計算数理工学論文集*, Vol. 14 (2014), pp. 43-48.
- [62] K. Oide, T. Matsuda, "Macro/meso/micro elastic-viscoplastic analysis of plain-woven laminates using homogenization theory", *Key Engineering Materials*, Vol. 626 (2015), pp. 365-371.
- [63] N. Ohno, D. Okumura, H. Noguchi, "Microscopic symmetric bifurcation condition of cellular solids based on a homogenization theory of finite deformation", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 50 (2002), pp. 1125-1153.
- [64] Y. Tomita, W. Lu, "Characterization of micro- to macroscopic response of polymers containing voids under macroscopically uniform deformation", *International Journal of*

- Solids and Structures, Vol. 39 (2002), pp. 3409-3428.
- [65] D. Okumura, N. Ohno, H. Noguchi, "Elastoplastic microscopic bifurcation and post-bifurcation behavior of periodic cellular solids", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 52 (2004), pp. 641-666.
- [66] T. Asada, N. Ohno, "Fully implicit formulation of elastoplastic homogenization problem for two-scale analysis", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 44 (2007), pp. 7261-7275.
- [67] I. Watanabe, K. Terada, E.A. de Souza Neto, D. Perić, "Characterization of macroscopic tensile strength of polycrystalline metals with two-scale finite element analysis", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 56 (2008), pp. 1105-1125.
- [68] T. Asada, Y. Tanaka, N. Ohno, "Two-scale and full-scale analysis of elastoplastic honeycomb blocks subjected to flat-punch indentation", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 46 (2009), pp. 1755-1763.
- [69] N. Yamamoto, T. Matsuda, "Effects of laminate misalignment on elastic-viscoplastic properties of ultrafine plate-fin structures: analysis using time dependent homogenisation theory", *Materials Research Innovations*, Vol. 15, Suppl. 1 (2011), pp. s147-s150.
- [70] D. Paquet, P. Dondeti, S. Ghosh, "Dual-stage nested homogenization for rate-dependent anisotropic elasto-plasticity model of dendritic cast aluminum alloys", *International Journal of Plasticity*, Vol. 27 (2011), pp. 1677-1701.
- [71] D. Okumura, N. Ohno, K. Yamaguchi, "Plastic size effect analysis of lamellar composites using a discrete dislocation plasticity approach", *International Journal of Plasticity*, Vol. 27 (2011), pp. 2040-2055.
- [72] M. Uchida, N. Tada, "Micro-, meso- to macroscopic modeling of deformation behavior of semi-crystalline polymer", *International Journal of Plasticity*, Vol. 49 (2013), pp. 164-184.
- [73] T. Koda, T. Matsuda, "Analysis of elastic-viscoplastic behavior of honeycomb sandwich panels based on a homogenization theory for free edge analysis", *Key Engineering Materials*, Vols. 535-536 (2013), pp. 357-360.

- [74] Y. Yamanaka, T. Matsuda, "Effects of laminate misalignment on thermoelastoviscoplastic properties of ultrafine plate-fin structures", *Key Engineering Materials*, Vol. 626 (2015), pp. 301-306.
- [75] T. Matsuda, N. Ohno, H. Tanaka, T. Shimizu, "Homogenized in-plane elastic-viscoplastic behavior of long fiber-reinforced laminates", *JSME International Journal Series A*, Vol. 45 (2002), pp. 538-544.
- [76] T. Matsuda, N. Ohno, H. Tanaka, T. Shimizu, "Effects of fiber distribution on elastic-viscoplastic behavior of long fiber-reinforced laminates", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 45 (2003), pp. 1583-1598.
- [77] T. Matsuda, Y. Fukuta, "Multi-scale creep analysis of angle-ply CFRP laminates based on a homogenization theory", *Journal of Solid Mechanics and Materials Engineering*, Vol. 4 (2010), pp. 1664-1672.
- [78] T. Matsuda, D. Okumura, N. Ohno, M. Kawai, "Three-dimensional microscopic interlaminar analysis of cross-ply laminates based on a homogenization theory", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 44 (2007), pp. 8274-8284.
- [79] X. Wu, N. Ohno, "A homogenization theory for time-dependent nonlinear composites with periodic internal structures", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 36 (1999), pp. 4991-5012.
- [80] N. Ohno, X. Wu, T. Matsuda, "Homogenized properties of elastic-viscoplastic composites with periodic internal structures", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 42 (2000), pp. 1519-1536.
- [81] N. Ohno, T. Matsuda, X. Wu, "A homogenization theory for elastic-viscoplastic composites with point-symmetry of internal distributions", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 38 (2001), pp. 2867-2878.
- [82] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, *The Finite Element Method*, fifth ed., Butterworth-Heinemann, Oxford, (2000).
- [83] T. Matsuda, K. Goto, N. Kubota, N. Ohno, "Negative through-the-thickness Poisson's ratio of elastic-viscoplastic angle-ply carbon fiber-reinforced plastic laminates: Homogenization analysis", *International Journal of Plasticity*, Vol. 63 (2014), pp.

- 152-169.
- [84] J. Schröder, A numerical two-scale homogenization scheme: the FE^2 -method. In: J. Schröder, K. Hackl (Eds.), *Plasticity and Beyond*, Springer-Verlag, Berlin, (2014).
- [85] K. Goto, T. Matsuda, N. Kubota, "Fully-modeled unit cell analysis for macro/micro elastic-viscoplastic behavior of quasi-isotropic CFRP laminates", *Key Engineering Materials*, Vol. 626 (2015), pp. 512-517.
- [86] K. Goto, T. Matsuda, "Free edge stress analysis of unidirectional CFRP laminates based on a homogenization theory for time-dependent composites", *Key Engineering Materials*, Vols. 535-536 (2013), pp. 397-400.
- [87] T. Sawa, K. Ichikawa, Y. Shin, T. Kobayashi, "A three-dimensional finite element stress analysis and strength prediction of stepped-lap adhesive joints of dissimilar adherends subjected to bending moments", *International Journal of Adhesion & Adhesives*, Vol. 30 (2010), pp. 298-305.
- [88] M. Afendi, T. Teramoto, "Fracture toughness test of epoxy adhesive dissimilar joint with various adhesive thicknesses", *Journal of Solid Mechanics and Materials Engineering*, Vol. 4 (2010), pp. 999-1010.
- [89] 古口日出男, 齊藤裕一, "三次元異材接合体界面角部の特異応力場の評価 (応力 $\sigma_{\theta\theta}$ に関する最大強度の評価)", *日本機械学会論文集 (A 編)*, Vol. 77 (2011), pp. 101-113.
- [90] 倉橋貴彦, 石川晃広, 古口日出男, "エレメントフリーガラーキン法による三次元異材接合体の応力解析に基づく接合界面端角部における特異応力場の強さに関する評価 —界面幅および接合材料高さの特異応力場の強さの関係—", *日本複合材料学会誌*, Vol. 38 (2012), pp. 152-161.
- [91] J.S. Dustin, R.B. Pipes, "Free-edge singularities meet the microstructure: Important considerations", *Composites Science and Technology*, Vol. 72 (2012), pp. 933-937.
- [92] 後藤圭太, 松田哲也, 関根彬允, "クロスプライ CFRP 積層板の微視的層間応力解析手法の開発 (等価材料を用いたモデリングと解析の高効率化)", *計算数理工学論文集*, Vol. 12 (2012), pp. 97-102.
- [93] J. Fish, "The s -version of the finite element method", *Computers & Structures*, Vol. 43

(1992), pp. 539-547.

- [94] 鈴木克幸, 大坪英臣, 関勝載, 白石卓士郎, "重合メッシュ法による船体構造のマルチスケール解析", 日本計算工学会論文集, (1999), P19990020 (6 pages).
- [95] 高野直樹, 座古勝, "重合メッシュ法による不均質体のマイクロ応力解析", 日本機械学会論文集 (A 編), Vol. 67 (2001), pp. 603-610.
- [96] 山田貴博, 落合亮, 松井和己, "背景直交格子を用いた領域分割型重合メッシュ有限要素法", 土木学会論文集 A2 (応用力学), Vol. 67 (2011), pp. I_117-I-125.

謝 辞

まず、本研究を行うにあたり、松田哲也 准教授には、研究内容やその指針について、終始多大なるご教授を賜りました。また、研究活動を遂行する上で必須となる種々の技能や、研究者としての心得など、幅広い面にわたって丁寧なご指導を賜りました。心より感謝の意を表します。

つづいて、日頃より有益なご助言を賜りました 河井昌道 教授、渡部修 教授、寺本徳郎 教授、松田昭博 准教授に感謝いたします。

また、名古屋大学 大野信忠 教授には、研究内容に対し、鋭い洞察に基づく示唆に富むご意見を多数賜りました、厚く御礼申し上げます。ならびに、同大学 荒井政大 教授、奥村大 准教授には、以後の研究活動を遂行する上で指針となる、数多くのご忠言を賜りました。この場を借りて深く謝意を表します。

さらに、研究を行う上で、折に触れて協力頂いた 大出航平 君をはじめ、研究室の後輩一同、公私ともにご支援下さった友人諸君に感謝します。最後に、陰ながら支えてくれた両親・家族に感謝します。

2015年1月

後藤 圭太