

# 情報数学III講義（第7回）

平成 27 年 12 月 1 日

## 3.2 4 次の交代形式

これまで古典的なベクトル解析と微分形式の対応を考える際に、0~3 次の交代形式を考えた。この延長として4 次の交代形式も定義できるが、3 次元空間においては考える必要が無いことを示す。

$\varphi: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  を 4 次の交代形式とする。

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3,$$
$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2 + c_3 \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = d_1 \mathbf{e}_1 + d_2 \mathbf{e}_2 + d_3 \mathbf{e}_3$$

を用いて

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) &= \varphi(a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3, \dots) \\ &= \sum_{1 \leq i, j, k, l \leq 3} a_i b_j c_k d_l \cdot \varphi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) \end{aligned}$$

このとき、 $\varphi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l)$  のうちの 2 つの基底が重複して常に 0 となる。そのため 4 次の交代形式を考える必要は無い。

## 3.3 複素関数論の基礎

以下では実数より広い複素数の世界について説明する。2 次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  を解くための公式  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  を使う際に、 $b^2 - 4ac < 0$  の場合に対処するため虚数単位  $i$  ( $i^2 = -1$  となる数) を用いる。複素数  $z$  とはこの虚数単位  $i$  と 2 つの実数  $x, y$  を用いて  $z = x + iy$  と表される数である。

これまでの講義で、1 変数の微分では比例定数  $f'$  が、多変数の微分では線形関数が出てくることを学んだ。例えば  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  の微分は、 $f': \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$ ,

$dx : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x, dy : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto y$  と定義していた．同様に，複素数から複素数の関数  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  で複素数の微分を定義したい．

まず， $u, v : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  という関数を用いて  $f = u + iv$  と表す．これを微分すると，以下のようになる．

$$\begin{aligned} df &= du + idv \\ &= \left( \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) + i \left( \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) \end{aligned} \quad (1)$$

1 変数の微分において  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  なら  $df = f' dx$  と表せた．同様に，複素数  $z$  が  $dz = dx + idy$  と書けるとすると微分が  $df = g dz$  と表せるような  $g$  が存在するための条件を調べてみる． $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, g = w_1 + iw_2, w_i : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  と表せるとすると，

$$\begin{aligned} g dz &= (w_1 + iw_2)(dx + idy) \\ &= (w_1 dx - w_2 dy) + i(w_2 dx + w_1 dy) \end{aligned} \quad (2)$$

この式 (1) と (2) を比較すると，以下の条件が得られる．

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

この条件をコーシーリーマンの方程式という．またコーシーリーマンの方程式が成り立つとき，その関数を正則関数や解析関数と呼ぶ．複素関数論で対象とするのはこの方程式が成り立つ関数のみである．

例として以下の関数が正則であることを確かめる．

- $f(z) = c$  (定数関数)  
 $c = c_1 + ic_2$  とする． $u = c_1, v = c_2$  より以下が成り立つ．

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

したがってコーシーリーマンの方程式が成り立つので，定数関数は正則で  $f'(z) = 0$  ．

- $f(z) = z$  (恒等関数)  
 $z = x + iy$  とする． $u = x, v = y$  より以下が成り立つ．

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

したがってコーシーリーマンの方程式が成り立つので，定数関数は正則で  $f'(z) = 1$  ．

正則関数の性質を以下に示す.

正則関数の性質

- (1)  $(f + g)' = f' + g'$
- (2)  $(\alpha f)' = \alpha f'$
- (3)  $(fg)' = f'g + fg'$
- (4)  $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad (g \neq 0)$
- (5)  $(z^n)' = nz^{n-1}$

$g, f$  を正則関数だとする. 微分を  $df = f'(z)dz$  と表すと,

$$d(f + g) = df + dg = f'dz + g'dz = (f' + g')dz$$

となる. したがって,  $g, f$  が正則なら  $f+g$  も正則であり, なおかつ,  $(f+g)' = f'+g'$  が言える. また性質 (2) についても,

$$d(\alpha f) = \alpha df = \alpha f'dz$$

であるため,  $(\alpha f)' = \alpha f'$  が言える. 同様に,

$$d(fg) = (df)g + f(dy) = (f'dz)g + f(g'dz) = (f'g + fg')dz$$

から関数の積も正則であり,  $(fg)' = f'g + fg'$  が成り立つことがわかる. これらから, 定数関数や恒等関数も正則関数であるので,

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$$

という多項式の微分は,

$$f'(z) = na_n z^{n-1} + (n-1)a_{n-1} z^{n-2} + \cdots$$

となる. 三角関数や指数関数についても無限次の多項式で定義されているだけなので, これらも正則関数である.

### 3.4 コーシーの積分公式

$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  に対して,  $f dz$  という 1 次の微分形式について考える. ここで,  $dz = dx + idy$  であり,  $f$  を先ほどと同じように分解すると次のようになる.

$$f dz = (u dx - v dy) + i(v dx + u dy)$$

これを微分して整理すると，

$$\begin{aligned} d(fdz) &= \frac{\partial u}{\partial y} dy \wedge dx - \frac{\partial v}{\partial x} dx \wedge dy + i \left( \frac{\partial v}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx \wedge dy \right) \\ &= \left\{ - \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + i \left( -\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right\} \end{aligned}$$

が得られる．このとき，実部と虚部が0のときに得られた変形式が0になることがわかる．これは，まさにコーシーリーマンの方程式が成り立つときである．したがって，複素平面上に閉曲線  $\gamma$  で囲まれる領域  $\Sigma$  に対して，正則関数  $f$  があるときに，閉曲線  $\gamma$  に沿って線積分すると，

$$\int_{\gamma} f dz = \int_{\Sigma} d(fdz)$$

という関係より，右辺が0になるため線積分が0であることがわかる．

次は，正則関数を  $f(z) = \frac{1}{z}$  とし，複素平面上で  $\gamma : [0, 2\pi] \mapsto a(\cos \theta + i \sin \theta)$  について線積分：

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a(\cos \theta + i \sin \theta)} \frac{dz}{d\theta} d\theta$$

を計算する． $\frac{dz}{d\theta} = -a \sin \theta + ia \cos \theta$  なので，

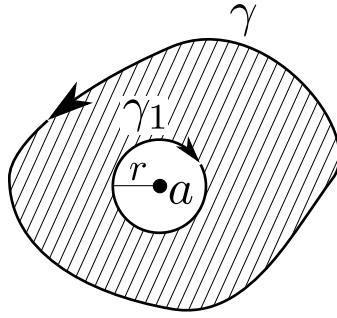
$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{dz}{z} &= \int_0^{2\pi} \frac{-\sin \theta + i \cos \theta}{\cos \theta + i \sin \theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} i d\theta = 2\pi i \end{aligned}$$

が得られる．先ほどは，正則関数について線積分をすると0になると述べたが，明らかに0にならないことがわかる．これは，決して積分定理が破れたわけではなく，実は閉曲線内部で正則関数が定義されていなければならないという制約があることを意味する．電荷の周りの球面を考えたときに発散が0にならなかったというのと同じ話である．

今度は，閉曲線の内部に点  $a$  を取り，次のような線積分を考える．

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

このままでは積分定理を使えないので，点  $a$  の周りを半径  $r$  の小さな球で囲み，円周を  $\gamma_1$  と定義する．そして，以前やったことと同様に  $\gamma \cup \gamma_1$  を考えるわけだが，閉曲線は左手に内部が見えるように向きをつけるため，図のように  $\gamma$  と  $\gamma_1$  の方向が異なることに注意する．



このように囲むことで， $\gamma \cup \gamma_1$  の内部で囲まれた領域には特異点がなくなるため，

$$\int_{\gamma \cup \gamma_1} \frac{f(z)}{z-a} dz = 0$$

が得られる．これについて， $\gamma_1$  の向きに注意して分解してやると，

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz - \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z-a} dz = 0$$

となる．ここで，点  $a$  を囲んだ球の半径  $r$  をどんどん小さくする．つまり， $r \rightarrow 0$  なので  $f(z) \rightarrow f(a)$  となり定数に近づく．荒っぽく話を進めると， $f(z)$  を定数  $f(a)$  と見なすことができるので，

$$f(a) \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z-a}$$

を計算すれば良いことになる．これは先ほど， $a$  を原点として計算したときに，半径に依存せず  $2\pi i$  になることがわかっている．したがって，

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

が言える．これをコーシーの積分公式と呼ぶ．これを使って何が言えるかというと，今度は点  $a$  を中心とした半径  $r$  の円の中に点  $w$  を取るとコーシーの積分公式より次のように表せる．

$$\begin{aligned} f(w) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-w} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a) - (w-a)} dz \end{aligned}$$

いま， $z$  は  $\gamma$  上を動いている点であり， $w$  は円周の内部の点であるため， $|z-a| = R > |w-a|$  という関係になる．ここで，等比級数の和の公式を思い出すと  $\left| \frac{w-a}{z-a} \right| < 1$

より,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-a) - (w-a)} &= \frac{1}{(z-a) \left(1 - \frac{w-a}{z-a}\right)} \\ &= \frac{1}{z-a} \left\{ 1 + \frac{w-a}{z-a} + \left(\frac{w-a}{z-a}\right)^2 + \left(\frac{w-a}{z-a}\right)^3 + \dots \right\}\end{aligned}$$

のような無限級数の和で表すことができる。したがって,

$$\begin{aligned}f(w) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) \left\{ \frac{1}{(z-a)} + \frac{(w-a)}{(z-a)^2} + \frac{(w-a)^2}{(z-a)^3} + \dots \right\} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz + (w-a) \int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z-a)^2} + (w-a)^2 \int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z-a)^3} + \dots \right\}\end{aligned}$$

となる。前節では、三角関数や指数関数のように冪級数で書けるものは正則であると述べたが、いま得られた結果から、複素平面全体ではないが、正則であれば少なくともこの円周の内部では  $(w-a)$  の冪級数で表現できることを示せた。