情報数学III講義（第6回）

平成27年11月22日

2.17 前回の補題1

- スカラー場 φ の grad，rot を計算すると 0 となることを示せ．$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\boldsymbol{\varphi}) = 0$

- ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ の div，grad を計算すると 0 となることを示せ．$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\boldsymbol{f}) = 0$

- 極座標を用いて球を以下のように表した場合，$\left| \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial r} \; \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta} \; \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \varphi} \right| = \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial r} \cdot \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \varphi} \right)$ となることを示せ．

$$\boldsymbol{x} = \begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{cases}$$

2.18 古典的な解析と微分形式の対応関係

スカラー場やベクトル場と微分演算の対応関係は以下のように表せる．

$$\begin{array}{cccccccc} \text{古典的解析} & \text{スカラー場} & \xrightarrow{\mathrm{grad}} & \text{ベクトル場} & \xrightarrow{\mathrm{rot}} & \text{ベクトル場} & \xrightarrow{\mathrm{div}} & \text{スカラー場} \\ & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ \text{微分形式} & 0\text{次} & \xrightarrow{d} & 1\text{次} & \xrightarrow{d} & 2\text{次} & \xrightarrow{d} & 3\text{次} \end{array}$$

今までは交代形式を用いて，積分定理が成り立つように grad を定義し，Stokes の定理が成り立つように rot を定義し，Gauss の発散定理が成り立つように div を定義した．今回は，特に rot に対応する微分形式について説明する．

1次の微分形式は，$f_i : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R}$ に対して $w = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$ と表される．これを微分すると，

$$
\begin{aligned}
dw &= d(f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz) \\
&= df_1 \wedge dx + df_2 \wedge dy + df_3 \wedge dz
\end{aligned}
$$

となる．各項を具体的に計算すると，

$$
\begin{aligned}
df_1 \wedge dx &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}dy + \frac{\partial f_1}{\partial z}dz\right) \wedge dx \\
&= \frac{\partial f_1}{\partial x}dx \wedge dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}dy \wedge dx + \frac{\partial f_1}{\partial z}dz \wedge dx \\
&= -\frac{\partial f_1}{\partial y}dx \wedge dy + \frac{\partial f_1}{\partial z}dz \wedge dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
df_2 \wedge dy &= \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}dx + \frac{\partial f_2}{\partial y}dy + \frac{\partial f_2}{\partial z}dz\right) \wedge dy \\
&= \frac{\partial f_2}{\partial x}dx \wedge dy + \frac{\partial f_2}{\partial y}dy \wedge dy + \frac{\partial f_2}{\partial z}dz \wedge dy \\
&= \frac{\partial f_2}{\partial x}dx \wedge dy - \frac{\partial f_2}{\partial z}dy \wedge dz
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
df_3 \wedge dy &= \left(\frac{\partial f_3}{\partial x}dx + \frac{\partial f_3}{\partial y}dy + \frac{\partial f_3}{\partial z}dz\right) \wedge dz \\
&= \frac{\partial f_3}{\partial x}dx \wedge dz + \frac{\partial f_3}{\partial y}dy \wedge dz + \frac{\partial f_3}{\partial z}dz \wedge dz \\
&= \frac{\partial f_3}{\partial x}dx \wedge dz + \frac{\partial f_3}{\partial y}dy \wedge dz
\end{aligned}
$$

となり，

$$
\left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dx \wedge dy
$$

のようにまとめられ，各項の係数が rot の各係数と等しいことがわかる．

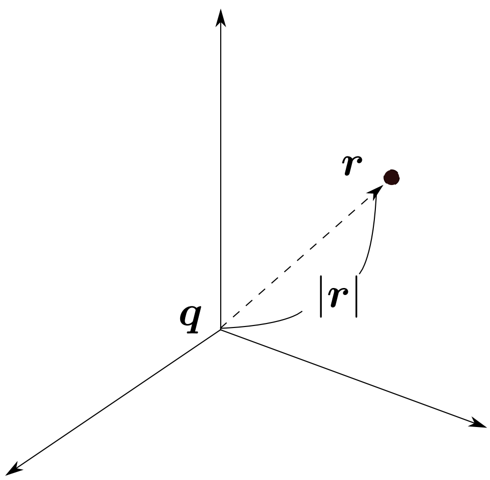
2.19 前回の補題2

- 3次の微分形式の各項の係数が div に対応することを示せ．

2.20　逆 2 乗の法則

電磁気学にクーロンの法則というものがある．距離 r だけ離れたところに q_1, q_2 の電荷を持った点電荷があるとき，その間には $k\frac{q_1 q_2}{r^2}$ で表される力が働く（k は定数）．このように r^2 に反比例している法則を，逆 2 乗の法則という．この逆 2 乗の法則には面白い性質がある．

まず原点に電荷 q を置き，電荷 q から点 R が受ける力について考える．点 R の



位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ とすると，大きさは $|\boldsymbol{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ と表せるので，電場 $\boldsymbol{f}$ は以下の式で表せる．

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{f} &= k\frac{q}{|\boldsymbol{r}|^2}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} \\
&= kq\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}
\end{aligned}
$$

この電場の発散を計算すると，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}\boldsymbol{f} &= kq\left\{\frac{\partial}{\partial x}x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}\right. \\
&\qquad \left.+\frac{\partial}{\partial y}y(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + \frac{\partial}{\partial z}z(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}\right\} \\
&= kq\{3(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} - 3(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}(x^2 + y^2 + z^2)\} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

と 0 になることがわかる．これは逆 2 乗の法則に従うときのみである．万有引力の法則も逆 2 乗の法則であるので，こちらも発散が 0 になる．

今度は次のような式を考える．

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} (x^2+y^2+z^2)^l$$

先程は $l=-\dfrac{3}{2}$ だったが，距離が離れていくほど力が弱まるとすると，逆 3 乗や逆 2.5 乗でも良い気がする．この発散を計算し，$l=-\dfrac{3}{2}$ でないと発散が 0 にならないことを確認せよ．

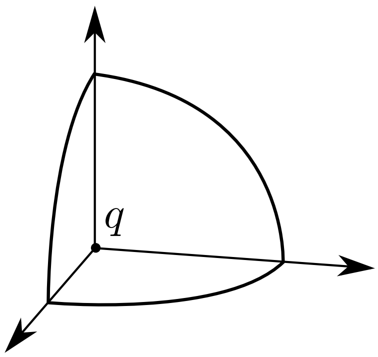
2.21　ガウスの発散定理の条件

閉曲面 Σ で囲まれた領域 Ω に電場 $\boldsymbol{f}$ があったとき，ガウスの発散定理が使えた．

$$\int_\Sigma \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{S} \ = \ \int_\Omega (\mathrm{div}\boldsymbol{f})dV$$

左辺が面積分，右辺が体積分を表している．例えば．ある場所に電荷をおいたときの位置 $\boldsymbol{r}$ における面積分は，右辺の体積分を計算すれば得られる．

前節までは，発散が 0 になるという話をしてきたが，今回は原点に電荷 q を置いたときに，原点中心に半径 a の球面を考える．

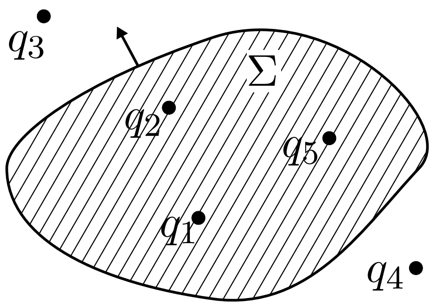


そうすると，球面の点は原点に置いた電荷から等距離であるため，力の大きさは球面のどの点でも同じであり，向きは接平面に垂直となる．この面積分は，球面の表面積 $4\pi a^2$ と力の大きさ $f=\dfrac{kq}{a^2}$ なので，$4\pi kq$ となることがわかる．しかし，ガウスの発散定理を使うと 0 になるのに対して，この場合は $4\pi kq$ となり明らかに 0 にならない．

実は，ガウスの発散定理を使うためには非常に重要な条件がある．それは，ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ は空間全体で定義されなくても良いが，少なくとも曲面内部ではベクトル場が定義されていなければならないというものである．今回の場合は，球面内部にある電荷が置いてある場所（原点）においてベクトル場が定義されていな

い．このような点を数学では特異点と呼ぶ．ガウスの発散定理は閉曲面内に特異点が存在しないという制約のもとで成立する定理なのである．

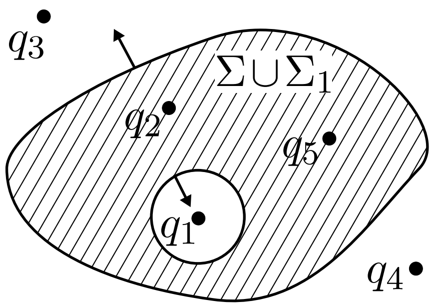
今度は空間の中に閉曲面 Σ があり，この空間の中に電荷が散らばっているとする．



この 5 つの電荷によって生じる電場 $\boldsymbol{f}$ は，q_1 によって生じる電場 $\boldsymbol{f}_1$ と q_2 によって生じる電場 $\boldsymbol{f}_2$ と $\cdots$ と定義すると，$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{f}_3 + \boldsymbol{f}_4 + \boldsymbol{f}_5$ のように表せる．したがって，この面積分は分解したそれぞれの面積分を計算すれば良い．

$$\int_\Sigma \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{S} \;=\; \sum_{i=1}^{5} \int_\Sigma \boldsymbol{f}_i \cdot d\boldsymbol{S}$$

ここで，q_3 と q_4 に関しては特異点が閉曲面の中にないので，ガウスの発散定理を使って 0 になることがわかる．しかし，他の電荷に関しては閉曲面の内部に特異点が存在してしまうため，ガウスの発散定理をそのまま使うことができない．そこで，特異点がある部分 q_1 を小さな球面 Σ_1 で囲って隔離する．



2 つの閉曲面を合体させた $\Sigma \cup \Sigma_1$ を考えると，電荷 q_1 に対する特異点がこの合体させた閉曲面の外になるため，ガウスの発散定理が使える．閉曲面の場合は外向きを表とするため，曲面の向きに注意すると以下のような関係が得られる．

$$\int_{\Sigma \cup \Sigma_1} \boldsymbol{f}_1 \cdot d\boldsymbol{S} - \int_{\Sigma_1} \boldsymbol{f}_1 \cdot d\boldsymbol{S} \;=\; 0$$

したがって，この 2 つの面積分は等しいので，電荷 q_1 を中心とした半径 a の球面を考えると，

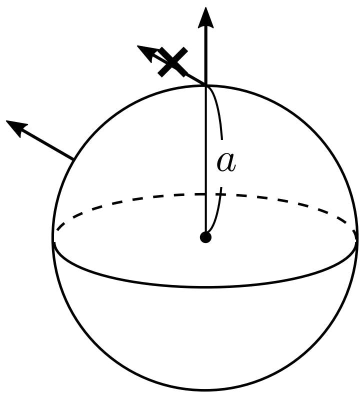
$$\int_{\Sigma} \boldsymbol{f}_1 \cdot d\boldsymbol{S} \;=\; \int_{\Sigma_1} \boldsymbol{f}_1 \cdot d\boldsymbol{S} \;=\; 4\pi k q_1$$

ということがわかる．q_2 と q_5 も同様なので，

$$\int_{\Sigma} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{S} \;=\; 4\pi k(q_1 + q2 + q_5)$$

が得られる．要するに，複数の電荷がある場合の面積分は，閉曲面で囲まれた中の電荷を足し合わせれば良いということである．これをガウスの法則と呼ぶ．このようなことが言えるのは，クーロンの法則が逆 2 乗の関係になっているからにほかならない．

先程までは，クーロンの法則が成り立つものとしてガウスの法則を導いたので，次はその逆を考える．いま，電荷 q がある点を中心に半径 a の球を考える．そうすると，生じる電場は接平面に垂直になるはずである．また，球は対称であるため，回転しても球面上で電場の大きさが変化することはない．

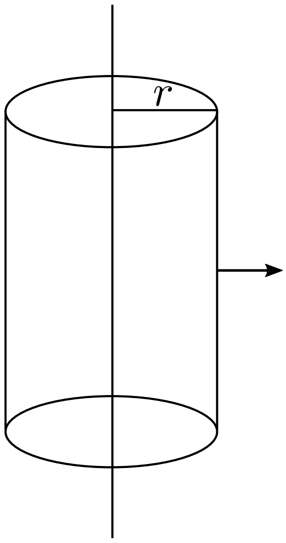


ガウスの法則が成り立つので面積分を計算すると，どんな電場が生じているかわからないが $4\pi kq$ が得られる．また，表面積は $4\pi a$ であるため力の大きさ f とすると $4\pi kq \;=\; 4\pi a^2$ が成り立つ．したがって，$f = \dfrac{kq}{a^2}$ となり，クーロンの法則を導くことができた．

2.22　様々な応用

§ 無限に伸びた針金

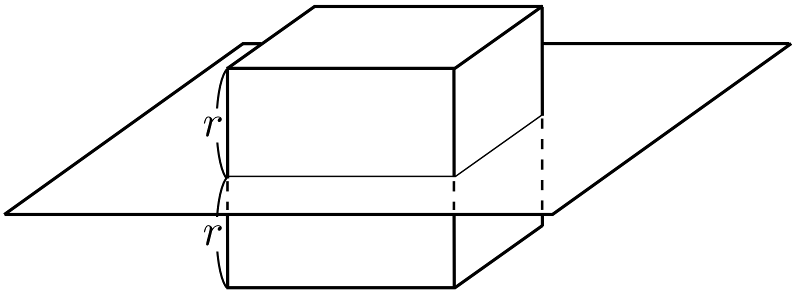
無限に伸びた針金（直線）に電荷を一様に分布させたとき，単位長さあたり σ の電荷になったとする．針金から距離 r にある点の電場を求めよ．



ひとつのやり方は，クーロンの法則にしたがって，小さな領域からそれぞれどういう力を受けるかを計算して針金全体から受ける力を計算する方法がある．もうひとつは，ガウスの法則があるので，図のように針金を中心とした半径 r の円柱を考える．これは閉曲面であり，円柱で切り取られた部分の内部の電荷について計算すれば良い．この場合，電場は針金に直交しているので，上下底面の面積分は 0 になることが容易にわかる．

§ 無限に伸びた平面

無限に伸びた平面に対して，電荷を単位面積あたり σ となるよう一様に分布させる．このとき，平面から距離 r 離れたところの電場を求めよ．



電場の方向は平面に直交しているため，今度は一辺の長さが $2r$ の立方体を考えれば良い．

3 複素関数論

これからやる複素関数論は，$\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ となるような関数を扱っていく．例えば，複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して z^2 を対応させるような関数 $f(z) = z^2$ などがある．

3.1 関数の定義

テイラー展開を用いると，$x \in \mathbb{R}$ に対して e^x という指数関数は以下のように書き表せる．

$$e^x \;=\; 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \cdots$$

これは実関数の場合であるが，無限次の多項式のようになっている．これを $z \in \mathbb{C}$ で置き換えて，e^z という関数を定義する．

$$e^z \;=\; 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} \cdots$$

他にも，三角関数 $\cos z$, $\sin z$ についてもテイラー展開を用いて以下のように定義する．

$$\begin{aligned} \cos z \;&=\; 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} \cdots \\ \sin z \;&=\; z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} \cdots \end{aligned}$$

このように複素関数を定義する場合，指数法則 $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ が成り立つことを証明せよ．

証明は両辺をテイラー展開して，それぞれの係数を比較すれば良い．

$$\begin{aligned} \text{左辺} \;&=\; 1 + (z_1 + z_2) + \frac{1}{2}(z_1 + z_2)^2 + \frac{1}{3!}(z_1 + z_2)^3 + \cdots \\ \text{右辺} \;&=\; \{1 + z_1 + \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{3!}z_1^3 \cdots\}\{1 + z_2 + \frac{1}{2}z_2^2 + + \frac{1}{3!}z_2^3 \cdots\} \end{aligned}$$

これは，z_1 と z_2 の多項式のようなものである．このとき，z_1^k, z_2^l として，係数がいくつかになるか考えると，左辺の方で $\dfrac{1}{k!}\dfrac{1}{l!}$ となることがわかる．$n = k + l$ と置いてやると，これが右辺で出てくるのは z_1 および z_2 を n 乗した時に出てくるため，二項定理を参考にすれば簡単に証明できる．