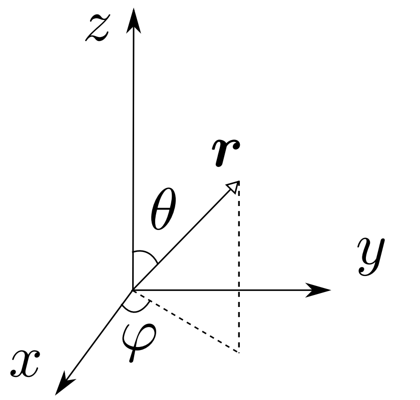
情報数学III講義（第5回）

平成27年11月18日

2.12　極座標を用いた球の体積の計算

空間における極座標は，図のように原点から頂点までの距離 r と，動径と z 軸の正の方向のなす角 θ，頂点から xy 平面への正射影と x 軸の正の方向のなす角 φ で (r,θ,φ) と表す．ただし，$0 \le r, 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \phi \le 2\pi$ とする．

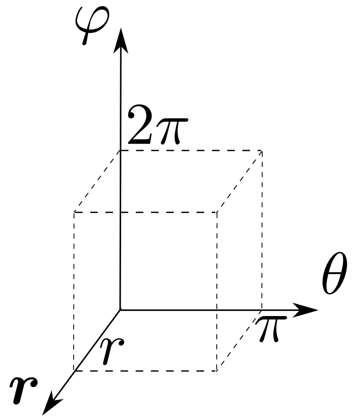


原点 O を中心とした半径 r の球の体積を極座標を用いて求める。頂点の座標を (x,y,z) とすると，直交座標と極座標の関係式は以下のように表せる．

$$
\begin{aligned}
x &= r\sin\theta\cos\theta \\
y &= r\sin\theta\sin\phi \\
z &= r\cos\theta
\end{aligned}
$$

この極座標のパラメータが作る空間は図のようになり，この空間を細分して積分することで体積を求める．各パラメータと座標を対応させる写像を Ω とすると，空間を細分化した平行六面体の体積は $\frac{\partial\Omega}{\partial r}, \frac{\partial\Omega}{\partial\theta}, \frac{\partial\Omega}{\partial\phi}$ というベクトルを並べた行列の行列式で表せる．

$$
\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\Omega}{\partial r} & \dfrac{\partial\Omega}{\partial\theta} & \dfrac{\partial\Omega}{\partial\phi} \end{vmatrix}
$$



この平行六面体の足し合わせたものが球の体積となるため，以下の式で表せる．

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r}\left|\frac{\partial\Omega}{\partial r}\quad\frac{\partial\Omega}{\partial\theta}\quad\frac{\partial\Omega}{\partial\varphi}\right|drd\theta d\varphi$$

実際に計算すると，行列式は以下のようになる．

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial\Omega}{\partial r}\quad\frac{\partial\Omega}{\partial\theta}\quad\frac{\partial\Omega}{\partial\varphi}\right| &= \begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi\\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0\end{vmatrix}\\ &= r^2\sin\theta\end{aligned}$$

この値を用いて積分すると，球の体積が求まる．

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r} r^2\sin\theta\ drd\theta d\varphi = \frac{4}{3}\pi r^3$$

2.13　ストークスの定理

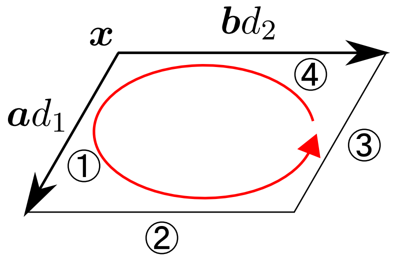
次の定理をストークスの定理という．

ストークスの定理

閉曲線 γ を境界とする曲面 Σ に対して，ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ があるとき，以下の等式が成り立つ．

$$\int_\gamma \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} \ = \ \int_\Sigma (\mathrm{rot}\boldsymbol{f})\cdot d\boldsymbol{S}$$

曲線を境界とする曲面では，曲面の表に旗を立てて旗が左手に見えるように回る方向を正とした．



点 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ が張る空間と，ベクトル場 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を考える．無限小のレベルでストークスの定理が成り立つように $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{f}$ を決めたいので $d_1, d_2 \in D$ を導入する．

定理の左辺（線積分）について計算する．2 つのベクトルで張られる曲面は平行四辺形であるため，図のように 4 つに分けられる．それぞれの線積分を計算すると以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{a}d_1 + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}d_1) \cdot \boldsymbol{b}d_2 - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}d_2) \cdot \boldsymbol{a}d_1 - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot d_2\boldsymbol{b} \\
&\quad = \{\underbrace{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}d_1) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}_{\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a}) \cdot d_1}\} \cdot \boldsymbol{b}d_2 - \{\underbrace{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}d_2) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}_{\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b})d_2}\} \cdot \boldsymbol{a}d_1 \\
&\quad = d_1 d_2 \{\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} - \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a}\}
\end{aligned}
$$

ここで，$\varphi(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} - \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a}$（$\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$）とおくと，二重線型性が成り立っていることがわかる．また，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を入れ替えると，

$$
\varphi(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) \;=\; \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a} - \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} \;=\; -\varphi(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})
$$

となり，2 次の交代形式であるということがわかる．2 次の交代形式全体は 3 次元の線形空間で $\varphi(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{g} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$（$\exists! \boldsymbol{g} \in \mathbb{R}^3$）のように表せる．

それでは，$\boldsymbol{g}$ の x 成分を計算するために，$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_3$ とする．このとき，$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$（$f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$）のように成分ごとに分解でき，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) &= \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x}(\boldsymbol{x})dx + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial y}(\boldsymbol{x})dy + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial z}(\boldsymbol{x})dz \\
dx : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} &\mapsto a_1 \quad dy : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \mapsto a_2 \quad dz : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \mapsto a_3
\end{aligned}
$$

であることを思い出すと，

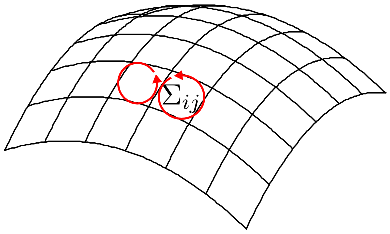
$$
\begin{aligned}
d_1 d_2 \{\boldsymbol{g} \cdot (\underbrace{\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3}_{\boldsymbol{e}_1})\} &= d_1 d_2 \{\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{e}_2) \cdot \boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{e}_3) \cdot \boldsymbol{e}_2\} \\
&= d_1 d_2 \left\{ -\frac{\partial f_2}{\partial z}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial f_3}{\partial y}(\boldsymbol{x}) \right\}
\end{aligned}
$$

となり，$\boldsymbol{g}$ の x 成分が得られる．同様に，y 成分と z 成分についても導出すると以下のようになる．

$$\boldsymbol{g} \;=\; \left(\frac{\partial f_3}{\partial y}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(\boldsymbol{x}),\ \frac{\partial f_1}{\partial z}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial f_3}{\partial x}(\boldsymbol{x}),\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(\boldsymbol{x})\right)$$

これが rot である．このようにして，無限小のレベルでストークスの定理が成り立つように $\mathrm{rot}\boldsymbol{f}$ を決めた．

先程は無限小のレベルで定理が成り立つように決めたので，閉曲線 γ で囲まれる曲面 Σ について，曲面を細分して考える．そうすると，ストークスの定理より，



$$\begin{aligned}\int_\Sigma (\mathrm{rot}\boldsymbol{f})d\boldsymbol{S} \;&=\; \sum_{i,j}\int_{\Sigma_{ij}}(\mathrm{rot}\boldsymbol{f})d\boldsymbol{S}\\ &=\; \sum_{i,j}\int_{\gamma_{ij}}\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} \;=\; \int_\gamma \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}\end{aligned}$$

となる．細分した微小な領域 Σ_{ij} に対しての線積分を図で見てみると，隣の領域との接している辺に関する線積分が相殺されることがわかる．これを加え合わせると，打ち消し合わない縁の部分が残り，境界 γ のみが出てくる．したがって，ストークスの定理が成り立つことがわかる．これは微積分学の基本定理と同じ論法である．

2.14 ガウスの発散定理

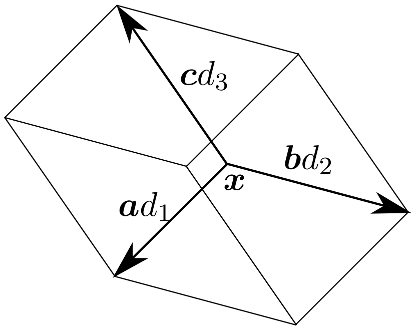
次の定理をガウスの発散定理という．

ストークスの定理

閉曲面 Σ を境界とする領域 Ω に対して，ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ があるとき，以下の等式が成り立つ．

$$\int_\Sigma \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{S} \;=\; \int_\Omega (\mathrm{div}\boldsymbol{f})dV$$

点 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ に対して 3 つのベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^3$ が張る平行六面体と，ベクトル場 $\boldsymbol{f}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ を考える．無限小のレベルでガウスの発散定理が成り立つように $\mathrm{div}\boldsymbol{f}$ を決めたいので $d_1,d_2,d_3\in D$ を導入する．



定理の左辺（面積分）について計算する．合計で 6 つの面を考えなければならないので，向きに注意して計算すると次のようになる．

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}d_1)\cdot(\boldsymbol{b}d_2\times\boldsymbol{c}d_3)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b}d_2\times\boldsymbol{c}d_3)\\
&\qquad+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}d_2)\cdot(\boldsymbol{c}d_3\times\boldsymbol{a}d_1)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{c}d_3\times\boldsymbol{a}d_1)\\
&\qquad\qquad+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}d_3)\cdot(\boldsymbol{a}d_1\times\boldsymbol{b}d_2)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a}d_1\times\boldsymbol{b}d_2)\\
=\;&\{\underbrace{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}d_1)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))}_{\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a})d_1}\}\cdot(\boldsymbol{b}d_2\times\boldsymbol{c}d_3)\\
&\qquad+\{\underbrace{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}d_2)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))}_{\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b})d_2}\}\cdot(\boldsymbol{c}d_3\times\boldsymbol{a}d_1)\\
&\qquad\qquad+\{\underbrace{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}d_3)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))}_{\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{c})d_3}\}\cdot(\boldsymbol{a}d_1\times\boldsymbol{b}d_2)\\
=\;&d_1d_2d_3\{\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\}
\end{aligned}
$$

ここで，$\varphi(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$（$\varphi:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$）とおくと，三重線型性が成り立っていることがわかる．また，例えば $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を入れ替えると，

$$
\begin{aligned}
&\varphi(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})\\
=\;&\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})+\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\\
=\;&-\varphi(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})
\end{aligned}
$$

となり，3 次の交代形式であるということがわかる．したがって，3 次の交代形式全体は 1 次元のベクトル空間で 3×3 の行列式を用いて，$\varphi(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\alpha dx\wedge dy\wedge dz$（$\exists!\alpha\in\mathbb{R}$）のように表せる．

それでは，α を求めるために，$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{c} = \boldsymbol{e}_3$ とする．そうすると，

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{e}_1)\cdot\underbrace{(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3)}_{\boldsymbol{e}_1}+\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{e}_2)\cdot\underbrace{(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1)}_{\boldsymbol{e}_2}+\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{e}_3)\cdot\underbrace{(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2)}_{\boldsymbol{e}_3}\\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} \end{pmatrix}\cdot\boldsymbol{e}_1 + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{pmatrix}\cdot\boldsymbol{e}_2 + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix}\cdot\boldsymbol{e}_3\\
&= \frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z}
\end{aligned}$$

となり，これが α である．このように，無限小のレベルで成り立つように div を決めた．

2.15 ハミルトン演算子

ハミルトンの演算子 ∇（ナブラ，nabla）というものを導入する．これは形式的に $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ で定義される擬似ベクトルとして表現される．∇ を用いて grad, div, rot を表すことができる．

スカラー場 $\varphi(x,y,z)$ に対して，

$$\nabla\varphi = \mathrm{grad}\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

によって定義されるベクトル場をスカラー場 φ の勾配という．また，ベクトル場 $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3)$ に対して，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{f} = \mathrm{div}\boldsymbol{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z}$$

によって定義されるスカラー場をベクトル場 $\boldsymbol{f}$ の発散という．同様に，

$$\nabla\times\boldsymbol{f} = \mathrm{rot}\boldsymbol{f} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)$$

によって定義されるベクトル場をベクトル場 $\boldsymbol{f}$ の回転という．

2.16 くさび形積

1 次の交代形式を持つ $\omega_1, \omega_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ に対して，

$$(\omega_1\wedge\omega_2)(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \omega_1(\boldsymbol{a})\omega_2(\boldsymbol{b}) - \omega_1(\boldsymbol{b})\omega_2(\boldsymbol{a})$$

は，二重線型かつ２次の交代形式である．また，dx, dy を用いて書いているときは，

$$\begin{aligned}
(dx \wedge dy) &= \underbrace{dx(\boldsymbol{a})}_{a_1}\underbrace{dy(\boldsymbol{b})}_{b_2} - \underbrace{dx(\boldsymbol{b})}_{b_1}\underbrace{dy(\boldsymbol{a})}_{a_2} \\
&= a_1 b_2 - b_1 a_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

のようになる．同様に dx, dy, dz に対して，$(\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3)$ は，

$$\begin{aligned}
&(dx \wedge dy \wedge dz)(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \\
&\quad = dx(\boldsymbol{a})dy(\boldsymbol{b})dz(\boldsymbol{c}) + dx(\boldsymbol{b})dy(\boldsymbol{c})dz(\boldsymbol{a}) + dx(\boldsymbol{c})dy(\boldsymbol{a})dz(\boldsymbol{b}) \\
&\qquad - dx(\boldsymbol{c})dy(\boldsymbol{b})dz(\boldsymbol{a}) - dx(\boldsymbol{b})dy(\boldsymbol{a})dz(\boldsymbol{c}) - dx(\boldsymbol{a})dy(\boldsymbol{c})dz(\boldsymbol{b}) \\
&\quad = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - b_1 a_2 c_3 - a_1 c_2 b_3 \\
&\quad = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

となる．