

ジャンプ・モデルにおけるオプション価格評
価の高速化とリスク管理への応用

筑波大学審査学位論文（博士）

佐久間貴之

筑波大学大学院
ビジネス科学研究科 企業科学専攻

目次

第 1 章 序論	1
1.1 研究の背景	1
1.2 本論文の目的および構成	2
第 2 章 サーベイ	5
2.1 概要	5
2.2 既存研究のサーベイ	5
2.2.1 オプションの概要と基本モデルに関するサーベイ	6
2.2.2 拡張モデルに関するサーベイ	8
2.2.3 ジャンプ・モデルにおける解析法に関するサーベイ	15
2.2.4 ジャンプ・モデルにおける PDE 法に関するサーベイ	21
2.3 まとめ	26
第 3 章 解析法におけるホモトピー解析法を用いた評価の高速化	29
3.1 概要および本章の構成	29
3.2 原資産過程	30
3.3 ホモトピー解析法	31
3.4 ホモトピー解析法によるヨーロッパ・オプション評価	32
3.5 ホモトピー解析法によるバリア・オプション評価	35
3.6 数値実験	38
3.7 第 3 章のまとめ	42
第 4 章 PDE 法における改良高速ガウス変換を用いた評価の高速化	43
4.1 概要	43
4.2 本章の背景及び構成	43
4.3 改良高速ガウス変換	45

4.4	1次元 Merton 型ジャンプ拡散モデル	47
4.5	数値実験	48
4.6	2次元 マートン型ジャンプ拡散モデル	54
4.7	第4章のまとめ	58
付録 4.A	SVCJ モデルにおける IFGT の適用	59
付録 4.B	Kou 型ジャンプ拡散モデル	60
付録 4.C	2次元 マートン型ジャンプ拡散モデルにおける IFGT の適用	61
第5章	PDE法におけるカルテシアン・ツリー法を用いた評価の高速化	63
5.1	概要	63
5.2	本章の背景及び構成	63
5.3	カルテシアン・ツリー法	64
5.4	PDE法への適用	65
5.5	数値実験	67
5.6	第5章のまとめ	69
付録 5.A	CGMY モデルにおける多重極展開係数	70
第6章	総括と今後の研究展望	75

表目次

2.1 オプションの分類	7
2.2 既存研究における基本モデルおよび拡張モデルの分類	10
2.3 既存研究におけるジャンプ・モデルの分類	13
2.4 ジャンプ・モデルにおける解析法の分類および本研究の位置付け	19
2.5 ホモトピー解析法における既存研究	20
2.6 ジャンプ・モデルにおける PDE 法および本研究の位置付け	25
4.1 IFGT 法および FFT 法におけるヨーロッパン・コール評価	50
4.2 IFGT 法および FFT 法におけるデジタル・コール評価	51
4.3 IFGT 法におけるヨーロッパン・コールの Max error 値 ($M = 8066$, $N = 1600$)	52
4.4 IFGT 法におけるデジタル・コールの Max error 値 ($M = 8066$, $N = 1600$) . . .	52
4.5 IFGT および FFT 法におけるバスケット・コール評価	56

目 次

3.1	ヨーロピアン・コールのクローズド・フォーム (ホモトピー解析法) と参照価格の比較	40
3.2	ダウン・アンド・アウト・コールのクローズド・フォーム (ホモトピー解析法) と参照価格の比較	41
4.1	IFGT 法によるデジタル・コール価格および感応度	53
4.2	IFGT 法によるスプレッド・コール価格および感応度	57
5.1	カルテシアン・ツリー法および FFT 法におけるヨーロピアン・コール評価 (GCMY モデル)	71
5.2	カルテシアン・ツリー法および FFT 法におけるヨーロピアン・コール評価 (GCMY モデル)	72
5.3	CGMY モデルおよびバリアンス・ガンマ・モデルにおけるヨーロピアン・コール: プライスおよびデルタ。	73

第1章 序論

1.1 研究の背景

近年金融派生商品(デリバティブ)取引が急速に拡大し続けているが、特に金融危機後においてこれらの商品に対するリスク管理の重要性が以前より増している。これらのリスク管理においては、デルタおよびガンマなどのリスク指標が精度高くかつ効率的に算出することが必要だが、これは同時に金融派生商品の価格が精度良くかつ効率的に算出される必要があることも意味している。一般的にオプション価格を求めるのに使用されるスタンダードなモデルはBlack-Scholesモデル[12, 101]であるが、この場合ヨーロッパオプションなどの標準的なオプション価格は比較的シンプルな数式(クローズド・フォーム)で表すことができ、同様にデルタやガンマなどのリスク指標もクローズド・フォームで表すことができるのでリスク管理を効率的に行うことができる。その反面、Black-Scholesモデルは現実の市場の動きを十分に反映できないという点が指摘されている。例えば、国内外における株式および為替市場において原資産価格の収益率の分布がファット・テイルとなる事や、非対称となるスキューが観察され必ずしも正規分布に従っていないという事象が確認されている。また市場がBlack-Scholesモデルに従っていた場合、行使価格を変化させてもオプション価格からBlack-Scholesモデルにより逆算して算出されたインプライド・ボラテリティは一定となるはずだが、スマイルおよびスキューと呼ばれる、インプライド・ボラテリティが一定とならない現象が観察されている。これらはBlack-Scholesモデルにおけるさまざまな前提の不十分さを物語っており、このモデルを用いてオプション価格を算出することはリスク管理の視点からも大きな問題となる。また、ブラック・マンデー後のスタンダード・アンド・プアーズ500・インデックス・オプションのインプライド・ボラテリティにおけるスキューが顕著に確認されることが指摘されており、その原因としてオプション価格に将来の原資産のジャンプ・リスクに対するプレミアムが含まれていると述べられている[117](他のジャンプ・リスクのプレミアムに関する研究は、例えば[47, 109]を参照)。よってBlack-Scholesモデルを拡張し、原資産におけるジャンプの挙動が考慮されたジャンプを考慮したモデル(以下ジャンプ・モデルと呼ぶ)を用いることが望ましいことは明らかである。しかしジャンプ・モ

デルの場合、ジャンプの確率過程を考慮するために理論および数値計算が Black-Scholes モデルと比較して複雑となるため、精度の高いオプション価格およびリスク指標を実務に耐えうる計算時間で算出することが、特にエキゾチック・オプションの場合に非常に困難となる。これが実務においてジャンプ・モデルが敬遠される理由となっているが、現実の市場の挙動に沿ったリスク管理を考えた場合ジャンプモデルを用いる必要があるため、ジャンプ・モデルにおけるオプション価格の効率的計算手法の開発が重要となってくる。

一般的に、実務において用いられるオプション評価の方法については、大きく3つに分類できる。まずオプション価格をクローズド・フォームとして表して計算する方法であり、本論文では解析法と呼ぶことにする。次に、オプション価格を解として持つ偏微分(積分)方程式を数値計算を用いて解く手法であり、本論文ではPDE法と呼ぶことにする。三つ目は金融工学の分野では最も一般的な手法であるモンテカルロ法で、原資産のランダムな挙動を実際にコンピュータで再現しシミュレーションを繰り返し行いサンプルパスを作ることでオプション価格を求める方法である。モンテカルロ法は一般的にどのタイプのオプションに対しても使用可能であり、特に高次元の場合に有効な手法となる。一方モンテカルロ法の欠点としては、精度の高いオプション価格およびリスク指標を算出するには多くのサンプルパスが必要となり計算負荷が大きい点が挙げられる。よって実務において有効な手法は解析法およびPDE法であり、更にオプション価格が求めればリスク指標もシンプルに算出することが可能となるため、特にリスク指標の計算において収束度の問題が顕著になるモンテカルロ法と比較しても有効な手法である。よって、解析法およびPDE法における高速かつ精度の高い数値計算法が開発されて実務で普及することにより、金融機関におけるリスク管理の向上に多大な貢献となる事が期待できる。

1.2 本論文の目的および構成

ジャンプ・モデルは従来の Black-Scholes モデルより実際の市場挙動を正確に反映できる一方で、理論も実際の計算も複雑になるため実務での使用は敬遠されているのが現状である。本論文ではジャンプ・モデルにおけるオプション価格評価の高速化の観点から、解析法における効率的手法を1つ、PDE法における効率的手法を2つ提案している。これらの手法が実務におけるジャンプ・モデルの普及へとつながり、結果的に金融機関における更なるリスク管理の向上に貢献することが狙いである。本論文の構成は以下の通りである。

第1章では、研究の背景および目的について述べている。序論では現在実務において最も

用いられる Black-Scholes モデルにおける問題点及び原資産におけるジャンプの挙動を考慮したジャンプ・モデルの重要性が述べられている。ジャンプ・モデルは Black-Scholes モデルより実際の市場の挙動をより正確に表現することに成功できている一方、理論および計算の複雑性から実務では敬遠される傾向があり、効率的手法の早急な普及がリスク管理向上のために望まれる。

第2章では、原資産モデルおよびオプション評価法に関するサーベイがまとめられている。その結果、ジャンプ・モデルにおける解析法に関しては、ヨーロピアン・オプションなどの非経路依存型オプションの価格計算に対して解析法は有効となるものの、経路依存型オプションに関しては一部のジャンプ・モデルにおいて、バリア・オプションなど一部のタイプのオプションにのみクローズド・フォームが得られることが確認されている。更にクローズド・フォームが得られるとしても、実際には計算コストのかかる数値計算が必要となり、実務において効率的な手法とは言い難い。一方ジャンプ・モデルにおける PDE 法のサーベイの結果では、高速フーリエ変換を用いた FTT 法を効率的な手法として用いる論文が多いことが確認された。しかしこの手法を直接用いるには等間隔の空間における格子点が必要である事や、各時間離散点ごとに2回の高速フーリエ変換が必要などの問題点が残る。よって本論文の中核となる以降の章では、ホモトピー解析法を用いたジャンプ・モデルにおける解析法、改良高速ガウス変換を用いた PDE 法、そしてカルテシアン・ツリー法を用いた PDE 法を提唱していく。

第3章ではまず、ジャンプ・モデルにおいてホモトピー解析法を用いた手法を提唱している。最初にジャンプ・モデルにおけるオプション価格を満たす偏微分積分方程式をフーリエ変換を用いて常微分方程式に変換し、そしてこの常微分方程式に対してホモトピー解析法を適用することにより、ジャンプ・モデルの一例としてバリアンス・ガンマ・モデルにおけるヨーロピアン・オプション及びバリア・オプションであるダウン・アンド・アウト・コールのクローズド・フォームが導出されている。また数値実験からこの無限数列和で表されたクローズド・フォームは高速に収束し実務の利用における有効性も確認された。更にこの手法は characteristic exponent が解析的に得られるジャンプ・モデルに対しても適用可能であり、また Black-Scholes モデルでクローズド・フォームが存在するタイプのオプションであれば、この手法を用いることによりジャンプ・モデルにおいても同様にクローズド・フォームを求めることができる。そして得られたオプション価格のクローズド・フォームを直接微分することにより、各リスク指標のクローズド・フォームも求める事ができるため、ジャンプ・モ

デルにおけるリスク管理の効率性向上にもつながる。

第4章ではジャンプ・モデルの一種であるジャンプ拡散モデルに焦点をあて、改良高速ガウス変換を用いたPDE法が提唱されている。ジャンプ・モデルにおけるPDE法の場合、Black-Scholesモデルと違い偏微分方程式に積分作用素が現れるため、この数値計算の負担が実務において問題となる。本章では数値実験により、この積分作用素の数値計算に改良高速ガウス変換を用いた場合、従来使用されている高速フーリエ変換を用いた手法よりも効率的であることが確認されている。また各格子点のオプション価格を用いて各リスク指標を数値計算する事ができるため、解析法同様にジャンプ・モデルにおけるリスク管理の効率性向上にもつながる。

第5章ではカルテシアン・ツリー法を用いたPDE法が提唱されている。第4章で用いられた改良高速ガウス変換はMerton型ジャンプ拡散モデルにのみ適用可能であるため、他のジャンプ・モデルにおけるFFT法の代替案として、本章ではカルテシアン・ツリー法を用いる。従来の高速フーリエ変換と計算量は同等であるが、高速フーリエ変換を用いた手法のように各時間格子点において2回使用する必要がなく、空間格子点が均一に配置されなくてはいけないという制限もないため、より柔軟に用いることができるのが利点である。また各格子点のオプション価格を用いて各リスク指標を数値計算する事ができるため、解析法同様にジャンプ・モデルにおけるリスク管理の効率性向上にもつながる。

最後に第6章では、本論文における総括および今後の研究課題について考えを述べている。解析法は最も有効な計算手法であるものの、一般的に全てのタイプのオプションに関してクローズド・フォームを導出することは困難であり、たとえ導出する事ができたとしても実務上計算負荷の大きい複雑な数式となることが予想される。よって現実的にはPDE法における効率化手法が有効と考えられるが、数値計算の対象となる偏微分方程式が高次元の場合PDE法では計算負荷が大きくなるため、高次元におけるPDE法の効率化手法を開発する事が今後の課題と考えられる。本論文における結果が、実務におけるジャンプ・モデルを用いたオプション計算及びリスク指標の普及に貢献できればと考えている。

第2章 サーベイ

2.1 概要

本章では研究の位置付けを明確化するために、これまでの関連研究におけるサーベイ結果を述べることにする。具体的には、まずオプションの概要と基本モデルに関するサーベイ結果を述べる。次に拡張モデルである確率ボラテリティ・モデルおよびジャンプ・モデルに関するサーベイ結果を述べる。そしてジャンプ・モデルの下で実務において好まれるオプション評価手法として、解析法およびPDE法に関するサーベイ結果を述べることにする。最後にまとめとして、先行研究のサーベイによって明らかになった点、本研究の焦点および位置付けについて述べる。

2.2 既存研究のサーベイ

本章では研究の位置付けを明確化するために、これまでの関連研究におけるサーベイ結果を述べることにする。具体的には、まず本研究で取り扱う金融オプションに関する概要を説明する。そしてオプションの売買、権利行使時点そして原資産の経路の観点からオプションの種類を分類していく。次に、オプション価格評価のために必要となる、原資産モデルの観点からサーベイを行う。具体的にはBlack-Scholesモデル、局所ボラテリティ・モデル、確率ボラテリティ・モデルそしてジャンプ・モデルに関するサーベイ結果について述べる。特にジャンプ・モデルは、他のモデルと違い原資産のジャンプが考慮されるので実際の市場で観察される原資産の挙動をより精密に表すことが可能となる。このようにオプション価格を評価するためにジャンプ・モデルは魅力的であるが、このモデルの下でオプション評価を行うための方法を指定する必要がある。より一般的な評価方法であるモンテカルロ法は収束が遅いため、実務におけるリスク管理の視点からも解析法およびPDE法は歓迎される手法である。よって最後に、ジャンプモデルの下での解析法およびPDE法に関するサーベイ結果を述べることにする。

2.2.1 オプションの概要と基本モデルに関するサーベイ

金利スワップ、為替フォワードなど市場で取引されている金融派生商品は数多く存在するが最もスタンダードな商品としてオプションが挙げられる。オプションの価格計算は他の金融派生商品の価格計算にも適用可能であるため、金融工学においても主要な研究対象となっている。ここではオプションの概要について説明し、基本モデルとして知られる Black-Scholes モデルおよび局所ボラテリティ・モデルを紹介する。

金融オプションの概要

金融オプションの詳細は [72] に述べられているが、時点 t における原資産価格を S_t とすると、一般的にオプションとは「特定の時点 T (満期日) において S_T をあらかじめ定められた価格 K (行使価格) で売買する権利」と定義できる。更に満期日 T のみに権利が行使できるオプションはヨーロピアン・オプションと呼ばれ、また買う権利のオプションをコール、売る権利のオプションをプットと呼ぶ。例えばヨーロピアン・コール・オプションを保有した場合の満期 T 時点における利益 (ペイオフ) は

$$\max[S_T - K, 0]$$

であり、ヨーロピアン・プット・オプションの満期日時点 T における利益は

$$\max[K - S_T, 0]$$

となる。 \max という表現が使われているのは満期日 T において利益が 0 以下となる場合は権利を行使する意味がないため購入したオプションの権利を放棄する、という事を示唆している。

このようにオプションはプットまたはコールという売買の権利から分類する事が可能であるが、行使日時点によっても分類される。満期日 T のみに権利が行使できるオプションをヨーロピアン・オプションと呼ばれる事を明記したが、このオプションの場合満期日までの $t (< T)$ においては権利を行使することができないため、早期行使条件なしのオプションと呼ぶこともできる。一方、早期行使条件付のオプションも存在し、満期日 T までの $t (< T)$ においても、いつでも行使可能なオプションをアメリカン・オプション、満期日 T の限られた時点 $t_1, t_2, \dots (< T)$ のみで行使可能となるオプションはバミューダン・オプションと呼ばれる。

更に、満期日 T のみにおける原資産価格のみならず、満期日 T までの原資産価格の挙動にペイオフが依存するかないかに焦点をあててオプションを分類する事も可能である。例

例えばヨーロッパ・オプションのペイオフは満期日時点 T のみの原資産価格 S_T で決定されるため、非経路依存型オプションと呼ばれる。一方、例えばアジアン・コール・オプションのペイオフは、満期日 T までの原資産価格 S_t の平均値を $S_{ave}(T)$ とすると、

$$\max[S_{ave}(T) - K, 0]$$

と表すことができる。またバリア・オプションのように満期日 T までの $t(\leq T)$ において原資産価格 S_t がある価格 B (バリアと呼ばれる) に達するとただちに権利が消滅してしまうオプションもある。アジアン・オプションやバリア・オプションのように満期日までの原資産の経路にペイオフが依存するオプションのことを経路依存型オプションと呼ぶ。更に、原資産の種類 (株、為替、金利) なども考慮すると市場で取引されている全てのオプションを列挙することは困難であるが、これまでの議論をまとめるとオプションは概ね以下のように分類される。

表 2.1: オプションの分類

コール/プット	非経路依存型	経路依存型
早期行使条件なし	ヨーロッパ	バリア、アジアン、ルックバック他
早期行使条件付	バミューダン、アメリカン	アメリカン・バリア、アメリカン・アジアン、アメリカン・ルックバック他

Black-Scholes モデル

最も簡潔で実務で用いられている代表的なモデルは Black-Scholes モデル [12, 101] であり、リスク中立測度のもと原資産 S_t はブラウン運動 W_t を用いて以下の確率過程に従うものと仮定される。

$$dS_t = rS_t + \sigma S_t dW_t$$

ここで r はリスク・フリー・レート、 σ はブラウン項のボラティリティである。このモデルの下ヨーロッパ・オプションの価格は以下のように解析的に算出可能となる。満期日 T および行使価格 K のコール・オプションの t 日 ($t < T$) における価格は

$$S_t \cdot N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} \cdot N(d_2)$$

と表される。ここで

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma(T-t)^{\frac{1}{2}}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma(T-t)^{\frac{1}{2}}$$

であり、 $N(y)$ は標準正規分布の累積確率密度関数である。またプット・オプションの場合は

$$Ke^{-r(T-t)} \cdot N(-d_2) - S_t \cdot N(-d_1)$$

と表される。更にこのモデルの場合スタンダードなヨーロッパ・オプションのみならず、バリア・オプションなど一部のエキゾチック・オプションに対してもクローズド・フォームが存在するため、これらの価格評価においても実務で多く用いられている。

局所ボラテリティ・モデル

Black-Scholes モデルではボラテリティ σ が時間及び原資産、行使価格に依存せず一定であるとしているが、これは実際のオプション市場で観測されるスキューおよびスマイル現象と矛盾している。そのため Black-Scholes モデルの拡張版として、まずボラテリティを時間および原資産の関数と仮定する、以下の局所ボラテリティ・モデル [3, 35, 37, 40] が提唱された。

$$dS_t = rS_t + \sigma(S_t, t)S_t dW_t$$

一例として、例えば CEV モデル [35] の場合は以下のように表される。

$$dS_t = rS_t + \sigma S_t^\beta dW_t$$

また2次ボラテリティ・モデル [3] の場合は、以下のように表される。

$$dS_t = (\alpha + \beta S_t + \gamma S_t^2) dW_t$$

2.2.2 拡張モデルに関するサーベイ

前節ではオプションの種類および基本モデルについてサーベイ結果を述べたが、ここでは既存研究で紹介されている、基本モデル以外の拡張モデルに焦点をあてたサーベイの結果を述べる。

確率ボラテリティ・モデル

局所ボラテリティ・モデルはボラテリティを原資産および時間に依存した関数で表現しているため、Black-Scholes モデルよりは改善されているものの、原資産のボラテリティは特定の関数というよりもランダムな挙動である、という実際に観測される挙動をとらえることができない。この挙動をとらえるために、ボラテリティを確率過程そのものとしてモデル化したのが確率ボラテリティ・モデルであり、一般的な形式は正の関数 f を用いて以下のよう表される。

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t + \sigma_t S_t dW_{1t}, \\ \sigma_t &= f(V_t), \\ dV_t &= a(t, V_t)dt + b(t, V_t)dW_{2t}, \quad dW_{1t}dW_{2t} = \rho dt \end{aligned}$$

例えば Hull-White モデル [73] は、金融の分野において最初に提案された確率ボラテリティ・モデルであり、分散過程を幾何ブラウン運動として仮定している。また Stein-Stein モデル [124] は分散過程を OU 過程を用いることによりモデル化している。現在実務で最も用いられている確率ボラテリティモデルは SABR モデル [63] および Heston モデル [68] である。例えば、SABR モデルは以下のように表される。

$$\begin{aligned} dS_t &= \sigma_t S_t^\alpha dW_{1t}, \\ d\sigma_t &= \nu \sigma_t dW_{2t}, \quad dW_{1t}dW_{2t} = \rho dt \end{aligned}$$

このモデルの利点は、ヨーロピアン・オプションのインプライド・ボラテリティを近似解析的に算出する事が可能であり (詳細は [63] を参照)、オプション市場のキャリブレーションを効率的に行うことができるため実務でも使用しやすいモデルである。更に SABR モデルの拡張版である λ -SABR モデル [67] は、以下のように表される。

$$\begin{aligned} dS_t &= \sigma_t v_t S_t^\alpha dW_{1t}, \\ dv_t &= \lambda(v_t - \lambda')dt + \nu v_t dW_{2t}, \quad dW_{1t}dW_{2t} = \rho dt \end{aligned}$$

一方 Heston モデル [68] は、分散過程を CIR 過程を用いて以下のように原資産過程をモデル化している。

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t + \sigma_t S_t dW_{1t}, \\ \sigma_t &= (V_t)^{\frac{1}{2}}, \quad dV_t = \kappa(\theta - V_t)dt + \nu(V_t)^{\frac{1}{2}}dW_{2t}, \quad dW_{1t}dW_{2t} = \rho dt \end{aligned}$$

Heston モデルの場合もヨーロッパ・オプションの価格をクローズド・フォームを用いて計算する事ができるのでキャリブレーションを効率的に行うことができる。よって SABR モデルと同様に実務でよく使われるモデルである。

確率ボラティリティ・モデルの利点は、市場で観測されている原資産のボラティリティ変動を考慮する事ができるだけでなく、オプション・マーケットで観測されるスキューやスマイル現象を表現する事が可能となることである。また金利系デリバティブのプライシングモデルとして実務でよく用いられる LIBOR 型マーケット・モデルにも確率ボラティリティを考慮した拡張版が実務でも用いられている [5, 82, 111, 113, 114, 129]。更には近年、確率ボラティリティ・モデルに局所ボラティリティの要素を組み込んだ局所確率ボラティリティ・モデルも実務で用いられている (例えば、[94, 115])。以下に、基本モデルおよび拡張モデルを既存研究毎に分類した表を掲載しておく。このように Black-Scholes モデルの欠点を補うべく先行研

表 2.2: 既存研究における基本モデルおよび拡張モデルの分類

論文	ボラティリティ
Andersen [3]	局所ボラティリティ構造
Black and Scholes [12]、Merton 1973 [101]	定数
Cox [35]	局所ボラティリティ構造
Derman and Kani [37]	局所ボラティリティ構造
Dupire [40]	局所ボラティリティ構造
Hagan, Kumar, Lesniewski and Woodward [63, 64]	確率過程
Henry-Labordère [67]	確率過程
Heston [68]	確率過程
Sepp and Karasinski [122]	確率過程
Lipton [94]	確率過程かつ局所ボラティリティ構造
Ren, Madan and Qian [115]	確率過程かつ局所ボラティリティ構造

究においてさまざまな拡張がなされているが、どのモデルもランダムな原資産過程をモデルするためにブラウン運動のみが用いられている。しかしブラウン運動は連続的なパスのランダムな挙動しか表現できないため、株価が突然不連続にジャンプするなどの挙動をとらえる事ができない。よって現実に観察されるジャンプの挙動が考慮できないため精微なモデルといえず、特にリスク管理においてこれらのモデルを用いた場合ジャンプのリスクを見逃してしまう危険性がある。よってジャンプ・モデルを考慮した本研究の焦点を明確にするため、次節以降ではジャンプ・モデルにおける既存研究のサーベイに焦点をあてることとする。

ジャンプ・モデル

これまで紹介してきたモデルでは原資産のランダムな挙動を表すためにブラウン運動が用いられているが、ブラウン運動のみでは実際の市場で観測される原資産のジャンプを描写するには不十分である。そこで、近年ジャンプを考慮したジャンプ・モデルが注目されており、モデルもいくつか提唱されている [119]。

古典的なジャンプ・モデルは、1976年に Merton によって提唱された Merton 型ジャンプ拡散モデル [102] である。原資産 S_t を $S_t = S_0 e^{X(t)}$ と表した時に $X(t)$ は以下のように表される。

$$X(t) = (r - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda\kappa)t + \sigma W(t) + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

ここで r はリスクフリー・レート、 σ はブラウン項のボラテリティ、 $N(t)$ は強度 λ のポアソン過程である。また $\kappa = E[e^{Y_i}] - 1$ であり、ジャンプサイズ Y_i の対数は平均 μ 、分散 γ^2 の以下の正規分布 $f(x)$ に従うものと仮定される。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma^2}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\gamma^2}\right)$$

このモデルの利点は、ジャンプ過程が含まれているため Black-Scholes モデルよりも複雑なモデルであるにも関わらず、以下のようにヨーロピアン・オプション価格のクローズド・フォームが存在する事である。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda'(T-t)} (\lambda'(T-t))^n}{n!} [S_t \cdot N(d_1) - K e^{-r_n(T-t)} \cdot N(d_2)]$$

ここで

$$\begin{aligned} \lambda' &= \lambda(1+k), r_n = r - \lambda k + n \frac{\ln(1+k)}{(T-t)}, \sigma_n^2 = \sigma^2 + n\gamma^2/T, \\ d_1 &= \frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (r_n - \frac{1}{2}\sigma_n^2)(T-t)}{\sigma_n(T-t)^{\frac{1}{2}}}, d_2 = d_1 - \sigma_n(T-t)^{\frac{1}{2}}, \\ k &= \exp\left(\mu + \frac{\gamma^2}{2}\right) - 2 \end{aligned}$$

である。更に Andersen and Andreasen [4] は、ボラテリティを局所ボラテリティ構造に拡張して前進方程式を導出し、市場のボラテリティ構造にフィットさせる方法を提唱している [4]。また [23] では、より一般的なジャンプ・モデルに対して局所ボラテリティ構造を取り込んだモデル (局所レヴィ・モデル) が提唱されている。

Merton 型ジャンプ拡散モデルではジャンプサイズ Y_i の対数が正規分布に従うと仮定しているが、Kou 型ジャンプ拡散モデル [86] では以下の両側指数分布に従うと仮定されている。

$$f(x) = p\nu_1 e^{-\nu_1 x} 1_{x \geq 0} + q\nu_2 e^{-\nu_2 x} 1_{x < 0}$$

Kou 型ジャンプ拡散モデルの場合にも、Merton 型の場合と同様にヨーロピアン・オプション価格のクローズド・フォームが存在する [86]。

一方バリエンス・ガンマ・モデル [97] では、時間変動ブラウン運動 $W_{t'}$ (t' はガンマ分布に従う確率変数) を用いることにより、ジャンプを取り込んでいる。また NIG (Normal Inverse Gaussian) モデル [9, 41] では、 t' が逆ガウス分布に従うとした時間変動ブラウン運動 $W_{t'}$ を用いることにより、同様にジャンプの挙動を取り込んでいる。

また Carr and Wu [29] は、有限モーメントの対数安定過程 (LMLS 過程) を用いた原資産モデルを提唱している。

$$dS_t = rS_t + \sigma_t S_t dL_t^{\alpha, -1}$$

ここで r はリスクフリー・レート、 $L_t^{\alpha, \beta}$ はテール・インデックス α 、スキュー・パラメータ β の、標準 α 安定過程である。

これまで述べてきたジャンプ・モデルの欠点としては、オプションの満期が長期となる場合に多量のジャンプ過程の和が拡散過程として近似されるので Black-Scholes モデルと同様、インプライド・ボラテリティが行使価格に関して一定に近づいてしまう (スマイル・フラッティング)、という点が挙げられる [81]。しかしジャンプ過程に加えてボラテリティを確率過程とすることにより [11, 39, 121]、長期の満期においてもスマイルやスキュー・現象をある程度再現することが可能となる。例えば SVCJ モデル (stochastic volatility coherent jump model) [39] では原資産 $S_t = S_0 e^{X(t)}$ は以下のように表される。

$$\begin{aligned} X_t &= \left(u - \frac{1}{2}V_{t-}\right)dt + \sqrt{V_{t-}}dW_{1t} + dJ_t, \\ V_t &= \kappa(\theta - V_{t-})dt + \xi\sqrt{V_{t-}}dW_{2t} + dJ_t^v \end{aligned}$$

ここで (J_t, J_t^v) は 2次元ジャンプ過程、 W_{1t} および W_{2t} はブラウン運動を表す。 $dW_{1t}dW_{2t} = \rho dt$ であり、 κ は平均回帰パラメータ、 ξ は V_t のボラテリティ・パラメータを表す。一方 OTC 為替オプション市場において満期毎にインプライド・ボラテリティのスキューの符号が変化するという現象に着目し、これらの挙動を考慮した確率スキュー・モデルと呼ばれるモデルが提唱されている [30]。このモデルでもジャンプ過程に加え、ボラテリティが確率過程として表される。

以下にジャンプ・モデルを既存研究毎に分類した表を掲載しておく¹。一般的に、ジャンプ・

¹ 今回の研究対象ではないが、金利系デリバティブのプライシングモデルとして実務でよく用いられる LIBOR

表 2.3: 既存研究におけるジャンプ・モデルの分類

論文	ボラテリティ
Andersen and Andreasen [4]	局所ボラテリティ構造
Barndorff-Nielsen [9]	定数
Bates [11]	確率過程
Carr, Geman, Madan and Yor [22]	定数
Carr, Geman, Madan and Yor [23]	局所ボラテリティ構造
Carr and Wu [29]	定数
Carr and Wu [30]	確率過程
Carr and Cousot [20]	局所ボラテリティ構造
Carr and Crosby [21]	局所ボラテリティ構造
Duffie, Pan and Singleton [39]	確率過程
Eberlein and Keller [41]	定数
Kou 2002 [86]	定数
Madan, Carr and Chang [97]	定数
Merton [102]	定数
Pagliarani and Pascucci [107]	局所ボラテリティ構造
Pagliarani, Pascucci and Riga [108]	局所ボラテリティ構造
Scott [121]	確率過程

モデルはレヴィ過程と呼ばれる確率過程を用いて定式化する事ができる。具体的には原資産が $S_t = S_0 e^{X(t)}$ として表された場合、ジャンプ・モデルにおいて $X(t)$ は、以下のレヴィ-伊藤分解によって表されるレヴィ過程となる [118]。

$$X(t) = \mu t + \sigma W(t) + \int_0^t \int_{|y| \geq 1} y h(dy ds) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^t \int_{\epsilon \leq |y| < 1} y [h(dy \times ds) - \nu(dy ds)] \quad (2.1)$$

ここで μ はドリフト項、 σ はボラテリティ項、 $W(t)$ はブラウン運動、 $h(dy ds)$ はポアソン測度、 $\nu(dy ds)$ はコンペンセーターである。またジャンプ・モデルにおいて一般的に留意すべき点として、Black-Scholes モデルと違い市場モデルが非完備化するため、同値マルチンゲール測度を一つ選択する必要がある。アカデミックにおいては最小マルチンゲール測度 [120]、エッシャー・マルチンゲール変換 [83]、最小エントロピー・マルチンゲール測度 [54, 103] など様々提唱されているが、実務においては直接リスク中立測度におけるジャンプモデルを仮定し、市場のオプション価格情報などからキャリブレーションによりパラメータ値を求めるのが一般的である。

型マーケット・モデルにも、ジャンプ過程を考慮したモデルの研究が盛んとなりつつある (例えば、[10, 42, 43, 44, 45, 57, 58, 59, 110] を参照)。またジャンプ過程に用いられるパラメータ自体を、確率過程とするモデルも提唱されている [95]。

モンテカルロ法

以上のように、オプション価格を評価するための様々な原資産モデルの研究が先行研究においてなされているが、次に考慮すべき点はこれらのモデルを使うと仮定した後で、オプション価格をどのようにして評価するかである。オプション価格を計算するには期待値を計算する事が必要となるので、最も一般的な方法はモンテカルロ法となる。金融工学におけるモンテカルロ法の詳細は [56] に委ねるが、利点として挙げられる点は、どのモデルを用いても複雑な経路依存型やペイオフのデリバティブ商品进行评估する事が可能である、という事である。更にモンテカルロ法の場合は原資産の次元が増加した場合でも計算量は線形的に増加するだけであるが、他の計算手法を用いた場合期待値の計算を行うための重積分の計算が必要となるため計算量が幾何級数的に増加する懸念がある。一方モンテカルロ法の欠点としては、収束度が遅いため計算時間がかかる事であり、その対処法として分散減少法やLD列の使用が提唱されている [56]。また金融機関におけるリスク管理においてはオプションのデルタやガンマなどのリスク指標を正確かつ効率的に計算できる事が重要が、価格計算にモンテカルロ法を用いた場合収束度が遅いため、その変化量であるリスク指標を精度良く求める場合は更に計算時間がかかる。そのためモンテカルロ法を用いてリスク指標を計算する場合は、オプション価格の変化量から求めるのではなく、パスワイズ法および尤度法 [16] や、尤度法の拡張版であるマリアバン解析 [8, 36, 46, 104] を用いた手法など、直接リスク指標をモンテカルロ法により計算を求める手法が提唱されている。しかしこの場合、リスク指標を計算するためにこのようなシミュレーションを別途行う必要がある。一方解析法を用いた場合は、得られたオプション価格のクローズド・フォームを直接微分することにより、各リスク指標のクローズド・フォームも求める事ができるので高速に計算可能である。またPDE法を用いた場合でも、各格子点のオプション価格を用いることにより各リスク指標を容易に数値計算する事ができる。よって実務におけるリスク管理の視点からも解析法およびPDE法を用いたオプション評価法が歓迎されるため、ジャンプ・モデルにおいてもモンテカルロ法に関する研究はなされているものの (例えば [6, 33, 36, 75, 84, 85, 91, 99, 116])、次節以降のオプション評価手法に関するサーベイでは、ジャンプ・モデルにおける解析法およびPDE法のサーベイに焦点をあてることにする。

2.2.3 ジャンプ・モデルにおける解析法に関するサーベイ

解析法はオプション価格をクローズド・フォームで表す手法であるが、これはPDE法やモンテカルロ法と違い複雑な数値計算を必要としない。よって計算負荷を高めることなく精度の高い価格およびリスク指標を算出することができるので、実務でも最も歓迎される評価手法である。またエキゾチック・オプションの価格を評価する場合には、計算に用いるモデルのパラメータ値を算出するために市場で取引されているヨーロピアン・オプションの情報をキャリブレーションにより取得する必要があるが、クローズド・フォームが存在すればこのキャリブレーションを高速に行うことが可能となる。

ヨーロピアン・オプションに対する解法

ジャンプ・モデルにおいても、ヨーロピアン・オプションのクローズド・フォームが存在するモデルはいくつかある。例えば Merton 型ジャンプ拡散モデルにおけるヨーロピアン・オプション価格は [102] にて、Kou 型ジャンプ拡散モデルにおけるヨーロピアン・オプション価格は [86] でクローズド・フォームが導出されている。更には特性関数が解析的に得られるジャンプ・モデルにおける、ヨーロピアン・オプション価格のクローズド・フォームが Carr and Madan [26] により導出されている。[26] によれば、行使価格 K 、満期時点 T においてジャンプ・モデルにおける特性関数が ϕ とすると、ヨーロピアン・コール・オプション価格は以下のクローズド・フォームとして表される。

$$V(K, T) = \frac{e^{-\alpha_c \ln(K)}}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-i\omega \ln(K)} \frac{e^{-rT} \phi(\omega - (\alpha_c + 1)i)}{\alpha_c^2 + \alpha_c - \omega^2 + i(2\alpha_c + 1)\omega} d\omega$$

ここで $\alpha_c (> 0)$ は damping factor と呼ばれ、上記の式が積分可能となるような値に設定される。更に、このクローズド・フォームには高速フーリエ変換を用いることができる。よって複数のヨーロピアン・オプション価格を一度に高速に算出することを可能となるため、キャリブレーション時に特に有効となる。また [27] ではテイル確率を用いてヨーロピアン・コール・オプション価格を表すことにより、鞍点 (saddle point) 近似によるオプションの評価方法が提唱されている。また [51] では、フーリエ・コサイン展開を用いたヨーロピアン・オプション価格の算出方法が提唱されている。しかし、これら三つの手法はヨーロピアン・オプションの価格計算には有効であるが、バリア・オプションなど他のタイプのオプションの価格計算には適用することはできない。

経路依存型オプションに対する解析法

経路依存型オプションに関しては、Kou型ジャンプ拡散モデルにおいていくつかクローズド・フォームが発見されている。例えば [87] ではバリア・オプションおよびルックバック・オプション、更に [88] では永久型アメリカン・オプション価格のクローズド・フォームが得られている。また理論的には、一般的なジャンプ・モデルに対して、バリア・オプションおよびルック・バック・オプションの場合 Wiener-Hopf 要素を用いることにより、クローズド・フォームを得ることは可能とされている [14, 34]。しかし実際には Wiener-Hopf 要素が明示的に表現可能なジャンプ・モデルは限られており、たとえ明示的に表現可能であったとしても [34] にて指摘されているようにラプラス変換やフーリエ逆変換などの数値計算が必要となるので計算負荷は小さくはない。対処法として、例えば Jeannin and Pistorius [80] は超指数レヴィ密度関数という、比較的扱いやすい Wiener-Hopf 要素を持つジャンプ過程で近似を行いラプラス変換を用いてバリア・オプションのクローズド・フォームを算出している。しかしこの近似に必要なパラメータは二乗平均最小化アルゴリズムを用いて算出する必要があり、計算負荷は小さくない。また [15] では Wiener-Hopf 要素の近似およびラプラス変換における高速化手法が提唱されているが、バリア・オプションおよびルックバック・オプション以外のオプションに対しても同様に適用可能であるかは定かではない。

Black-Scholes モデルにおけるホモトピー解析法

これまでジャンプ・モデルにおける解析法について述べてきたが、もともと Black-Scholes モデルにおいても、全てのオプション価格についてクローズド・フォームが容易に求められるということではない。例えばアメリカン・オプションの価格を算出する場合、自由境界値問題を解く問題に帰着されるが、この解析解を求めることは非常に困難であり、偏微分方程式論においても今だに研究が活発な分野である。しかし近年 Zhu [134] により、ホモトピー解析法を用いてアメリカン・オプションの価格を積分の無限数列和として表すことに成功した。ホモトピー解析手法は最初に Ortega and Rheinboldt [106] によって提唱され、これまで非線形微分方程式において広く用いられてきた (例えば、[1, 98, 93, 105, 123, 127, 131, 135])。ホモトピー解析法はトポロジーの考えが起点となっており、例えばある関数 $V(x, t)$ を求めたい場合、シンプルな関数 $V_0(x, t)$ を初期関数として連続的に変形させていき、最終的に $V(x, t)$ に漸近させることで求める手法である。そのためには $F(x, t, p = 0) = V_0(x, t)$ 、 $F(x, t, p = 1) = V(x, t)$ を満たす連続過程 $F(x, t, p)$ を構築することが必要となるが、この手法を用いれば、 $p = 1$ に

における最終解 $V(x, t)$ は解析的に評価可能な関数の無限数列の和として表す事が可能となる。

具体的には以下のようなスキームを用いて求めていく。例えば、ある微分作用素 A が与えられた時、次の微分方程式を満たす関数 V を求めたいとする。

$$A(V(x, t)) = 0$$

最初に初期微分作用素 A_0 および初期関数 $\bar{V}_0(x, t)$ を設定する。そして以下の微分方程式系を満たす連続過程 $\bar{V}(x, t, p)$ を考える。

$$(1 - p)[A_0(\bar{V}(x, t, p)) - A_0(\bar{V}_0(x, t))] = -p \cdot A(\bar{V}(x, t, p)). \quad (2.2)$$

例えば $p = 0$ とすると、

$$A_0(\bar{V}(x, t, 0)) - A_0(\bar{V}_0(x, t)) = 0$$

となるので $\bar{V}(x, t, 0) = \bar{V}_0(x, t)$ であることがわかる。一方 $p = 1$ とすると

$$A(\bar{V}(x, t, 1)) = 0$$

となるので $V(x, t) = \bar{V}(x, t, 1)$ であることがわかり、当初の求めたい $V(x, t)$ と一致することがわかる。よって (2.2) を満たす $\bar{V}(x, t, p)$ を求めればよいが、そのためにパラメータ p に関する $\bar{V}(x, t, p)$ の Taylor 展開を考える。

$$\bar{V}(x, t, p) = V_0(x, t) + V_1(x, t)p + \frac{1}{2}V_2(x, t)p^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{V_n(x, t)}{n!} p^n \quad (2.3)$$

ここで $V_n(x, t) = \frac{\partial^n}{\partial p^n} \bar{V}(x, t, p)|_{p=0}$ であるが、これらの項を求めるために方程式 (2.2) の両辺を p に関して微分する。すると

$$-[A_0(\bar{V}(x, t, p)) - A_0(\bar{V}_0(x, t))] + (1 - p) \frac{\partial}{\partial p} A_0(\bar{V}(x, t, p)) + A(\bar{V}(x, t, p)) + p \cdot \frac{\partial}{\partial p} A(\bar{V}(x, t, p)) = 0$$

となる。この式に $p = 0$ と代入して

$$A_0(V_1(x, t)) + [A(V_0(x, t)) - A_0(V_0(x, t))] = 0$$

が得られるが、この時 $A_0(V_0(x, t)) = 0$ を満たす初期関数 $V_0(x, t)$ を選べば (3.5) を用いて再帰的に解くことで、 $n \geq 1$ に関して Taylor 係数 $V_n(x, t)$ は以下を満たすことがわかる。

$$A_0(V_n(x, t)) + n \cdot [A(V_{n-1}(x, t)) - A_0(V_{n-1}(x, t))] = 0 \quad (2.4)$$

よって各 Taylor 係数 $V_n(x, t)$ は (2.4) を再帰的に解いていくことで求められ、その結果 $\bar{V}(x, t, p)$ が得られる (そして $p = 1$ とすれば $\bar{V}(x, t, p = 1) = V(x, t)$ となる)。この手法を用いて Zhu[134]

はアメリカン・オプションの価格をクローズド・フォーム (積分の無限数列和) として表すことに成功した。更に Zhao and Wong[133] は同様の手法を用いて、ボラティリティが時間に依存する関数に拡張した場合の、Black-Scholes モデルにおけるアメリカン・オプションの価格を算出した。

アメリカン・オプションにおけるクローズド・フォームを算出したことは、Black-Scholes モデルの場合であるものの金融工学において大きな進展であり、更に算出に用いられたホモトピー解析法はシンプルで応用性が高い。よってこの手法を用いれば、ジャンプ・モデルにおけるエキゾチック・オプションもクローズド・フォームに近い式として表せるのではないかと期待されるものの、そのような先行研究はこれまで確認されていない。よって本研究では、ジャンプ・モデルにおける解析法としてホモトピー解析法を用いた手法を提案し、ジャンプ・モデルにおけるヨーロピアン・オプションおよびヨーロピアン・オプション以外のオプション価格のクローズド・フォームを算出していく。以下に、ジャンプ・モデルにおける解析法の既存研究および本研究の位置付け²を表 2.4 に、ホモトピー解析法が用いられた既存研究を表 2.5 にまとめた。

²表中の は、Black-Schole モデルと同様導出できる可能性が高いが本研究では対象としない、という意。

表 2.4: ジャンプ・モデルにおける解析法の分類および本研究の位置付け

論文	経路依存型	早期行使用あり
Boyarchenko and Levendorski [14]		×
Boyarchenko and Levendorski [15]		×
Carr and Madan [26]	×	×
Carr and Madan [27]	×	×
Fang and Oosterlee [51]	×	×
Jeannin and Pistorius [80]		×
Kou [86]	×	×
Kou [87]		×
Kou [88]		(永久型アメリカン・オプション)
Merton [102]	×	×
本研究 (ホモトピー解析法)		

表 2.5: ホモトピー解析法における既存研究

論文	内容
Abbasbandy [1]	修正 KdV 方程式の近似解析解を算出。
Mahmoudi and Kazemian [98]	Fornberg-Whitham 偏微分方程式の近似解析解を算出。
Nassar, revelli and Bowman [105]	半導体装置における Poisson-Boltzmann 方程式の近似解析解を算出。
Song and Zhang [123]	分数 KdV Burgers- Kuramoto 方程式の近似解析解を算出。
Vahdati, Tavassoli Kajani and Ghasemi [127]	SIR 伝染モデルを記述した常微分方程式システムの近似解析解を算出。
Yabushita, Yamashita and Tsuboi [131]	二次抵抗法則による放物運動の解析解を算出。
Zhao and Wong [133]	ポラテイリイが時間に依存する関数における Black-Scholes モデルでのアメリカン・オプションのクローズド・フォームを算出。
Zhu [134]	Black-Scholes モデルでのアメリカン・オプションのクローズド・フォームを算出。
Zurigat, Momani, Odibat and Alawneh [135]	非整数微分方程式システムの近似解析解を算出。

2.2.4 ジャンプ・モデルにおける PDE 法に関するサーベイ

偏微分方程式を数値計算で解く場合の手法としては、有限差分法、有限要素法および有限体積法が挙げられるが、その中でも有限要素法および有限体積法は流体力学など他の応用数学の分野でよく用いられる手法である。金融工学の分野では [100, 126] において有限要素法を用いたオプション価格評価の方法、また [136] において有限体積法を用いた方法が紹介されている。またジャンプ・モデルにおける有限要素法の例として [50] および [100] が挙げられる。特に [50] では、積分作用素を陽的に計算する一方他の拡散作用素には陰的に計算するという IMEX 手法および有限要素法を用いることにより、ジャンプ拡散モデルにおけるヨーロッパン、バリアおよびバミューダン・オプションの効率的計算手法を提唱している。しかしこの手法がアメリカン・オプションの場合に適用可能かは定かではない。一方 [100] では、ウェーブレット基底関数による有限要素法を用いてバリアンス・ガンマ・モデル [52, 70, 97] および CGMY モデル [22, 128] におけるアメリカン・オプションの価格計算方法が提唱されている。しかし金融工学においては有限差分法を用いるのが一般的であるため (有限差分法を用いたオプション評価方法の一般的な解説は [69, 125] を参照)、以下は有限差分法に焦点を当てて、ジャンプ・モデルにおける既存研究のサーベイを行っていく。

有限差分法

リスク中立測度のもと原資産 S_t は $S_t = S_0 e^{X(t)}$ と表され、 $X(t)$ は (2.1) を満たすものとする。このとき時刻 t におけるオプション価格を $v_t = E_t^Q[e^{-r(T-t)}\varphi]$ 、 r をリスクフリー・レート、 φ を満期 T におけるペイオフ関数とすると、ジャンプ・モデルにおける $e^{r(T-t)}v_t$ は以下の偏微分積分方程式 (PIDE) をみたす [34]。

$$\partial_\tau v + \mu \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \int_{\mathbb{R}} [v(x+y) - v(x) - y \frac{\partial v}{\partial x} 1_{|y|<1}] \nu(dy) = 0$$

一般的にこの方程式の解析解を導くことは困難であるものの、有限差分法を用いればアメリカン・オプションを含むさまざまな経路依存型のエキゾチック・オプションも容易に算出することが可能である。更にはデルタやガンマなどのリスク指標も容易に計算することができるので、特に次元の低いオプション価格の算出法においてはモンテカルロ法より効率的である。例えば [70] では、バリアンス・ガンマ・モデルにおけるアメリカン・オプションの価格が PDE 法により算出されている。また [52] でもバリアンス・ガンマ・モデルのもと同様の手法を用いているが、アメリカン・オプションだけでなくヨーロッパンおよびバリア・

オプションの価格計算も行っている。更に [70] で用いられた積分偏微分方程式の分割法は [2] において CGMY モデルの場合に応用されている。一方 [128] では、CGMY モデルにおけるヨーロピアン・オプションおよびアメリカン・オプションの価格を、高速フーリエ変換および Bi-CGSTAB 法を用いて陰解法により算出している。

しかし Black-Scholes モデルの場合と違い、ジャンプ・モデルにおけるオプション価格を満たすこの偏微分積分方程式には、積分作用素が含まれているため Black-Scholes モデルにおける PDE 法よりも計算量が大きくなる。この積分作用素を効率的に計算するために最も使用されている手法は高速フーリエ変換 (FFT) を用いた方法 [4, 65, 66, 125] である (以下、FFT 法と呼ぶ)。しかしこの手法にはいくつか欠点があり、まず空間方向における格子点が等間隔に分布していない場合に FFT 法を直接使うことはできない。また各時間ステップにおいて高速フーリエ変換を 2 回行う必要があり、更にラップ・アラウンド効果による影響を小さくするため、空間方向における計算区間を拡張する必要があるなど、実装における柔軟性に欠ける。

積分作用素を変換した計算手法

一方この積分作用素を直接計算せずに、別の形式に変換させて計算する方法がいくつか提唱されている。例えば [78, 79] では、フーリエ変換を用いて偏微分積分方程式を常微分方程式に変換して数値計算する手法が提唱されている。この場合でも同様に高速フーリエ変換を用いることができるため高速化が可能であるが、境界条件を反映させるため結局 FFT 法と同様に時間ステップ毎に 2 回の高速フーリエ変換を行う必要がある。また [76, 77] では、偏微分積分方程式を擬放物型方程式 (pseudo-parabolic equation) に変換して数値計算する手法が提唱されているが、数値実験がヨーロピアン・オプションおよびバリア・オプションに限定されており、アメリカン・オプションの価格計算においても適用可能であるかは明らかではない。一方 [28] では、偏微分積分方程式に表れる積分作用素がある微分方程式の解となる点に着目し、その微分方程式を解くことにより積分作用素を計算する手法を提唱している。しかし適用例がジャンプ拡散モデルのみに限定されており、この手法が他のジャンプ・モデルに対しても適用可能かは定かではない。更に数値実験がヨーロピアン・オプションのみに限定されており、他のタイプのオプションの価格計算においても適用可能であるかも明らかではない。また [31] では、ジャンプ・モデルにおけるオプション価格が非整数偏微分方程式 (fractional partial differential equation) を満たすことに着目し、この方程式を数値計算し

てバリア・オプション価格を算出しているが、他のPDE法と比較して効率的な手法であるかは定かではない。一方[89]では、Wiener-Hopf分解を有限差分法に取りこんだバリア・オプションおよびアメリカン・オプションの効率的な手法が提唱されている。

高速ガウス変換

一方、FFT法の代わりに積分作用素を効率的に計算する手法として、高速ガウス変換[62] (the fast Gauss transform, FGT) と呼ばれる手法がMerton型ジャンプ拡散モデルにおけるPDE法にて試みられた[66]。FGTとは高速多重極法[61] (Fast multipole method) と呼ばれる、計算物理学の分野で研究の活発な数値計算法の一つであり、例えば各点においてそれぞれ C_1, C_2, \dots, C_{M_1} のウェイトを持つ M_1 個のソースポイント x_1, x_2, \dots, x_{M_1} および指定されたカーネル関数 $K(x, y)$ が与えられた時、 M_2 個のターゲットポイント y_1, y_2, \dots, y_{M_2} に対して以下の計算を効率的に行う手法である。

$$F(y_j) = \sum_{i=1}^{M_1} C_i \cdot K(x_i, y_j)$$

このような計算は、例えば多数の粒子間におけるポテンシャルの相互作用を計測する場合など、計算物理学において頻繁に表れる。点の数が少ない場合は直接計算しても問題ないが、多くなるにつれ計算負荷が高まるため、その場合に高速多重極法などの効率的な手法の使用が求められる。基本的な考えとしては、低いランクの行列の和として行列を解析的に近似するというシンプルなものであるものの、理論的には高速多重極法の計算量は $O(M)$ となりFFT法における計算量 $O(M \ln M)$ よりも小さい。更にFFT法と違い、空間方向における格子点が等間隔でない場合も直接用いることが可能である。しかし、高速ガウス変換の金融工学におけるPDE法の使用は特段効率的にはならない、と[66]では指摘されている。その理由として、FFT法を用いた場合と同等の精度をFGTで達成するにはFFT法の場合より多くの空間格子点が必要となることが判明したためである。この結果により、FGTを含む高速多重極法の利用は金融工学のPDE法において実用的ではないという事が認知され、この論文以降PDE法における高速多重極法の利用例は確認されていない(多項格子モデルを用いた数値計算手法では、FGTの使用が効率化を向上させることが報告されている[17, 18])。しかし高速多重極法の研究自体は現在も活発であり、例えば高速ガウス変換の改良版である改良高速ガウス変換 (the improved fast Gauss Transform, IFGT) が近年開発された[112, 130]。また従来のFGTはMerton型ジャンプ拡散モデルのみにしか適用できないものの、近年において一般的なジャンプ・モデルに対し原則的に適用可能な高速多重極法がいく

つか開発されている [13, 60, 132]。PDE 法に対する FGT の適用は失敗に終わったものの、計算量が $O(M)$ で済むというのは計算物理学のみならず金融工学の分野においても実務上魅力的である。よって近年開発された改良高速ガウス変換を、マーティン型ジャンプ拡散モデルにおける PDF 法に対して再度試みる価値はあるように思える。

また高速多重極法と同様に、計算物理学の分野で用いられるメジャーな効率的計算法としてツリー法 [7] が挙げられる。ツリー法は FFT 法と同等の時間計算量 $O(M \ln M)$ であるにも関わらず、アルゴリズムが高速多重極法と比べてシンプルなため実装しやすい。また空間方向における格子点が等間隔でない場合も直接用いることが可能であり、更に FFT 法と違い各離散時間点ごとに 2 回のオペレーションを必要としない。更には近年、湯川ポテンシャルの場合の効率的手法としてカルテシアン・ツリー法が提唱された [92]。一方、ジャンプ・モデルであるバリアンス・ガンマ・モデル [52, 70, 97] や CGMY モデル [22, 128] のレヴィ密度関数は湯川ポテンシャルと同様の形式で表される。よってこれらのジャンプ・モデルに対してカルテシアン・ツリー法を用いて PDE 法を効率的に行うことは可能と思われるが、これまでそのような先行研究は確認されていない。よって本研究では改良高速ガウス変換およびカルテシアン・ツリー法を用いた PDE 法に焦点をあてることとする。以下にジャンプ・モデルにおける PDE 法に関する、既存研究の表を掲載しておく³。

³表中の は、可能であるが本研究の数値実験では対象としない、という意。

表 2.6: ジャンプ・モデルにおけるPDE法および本研究の位置付け

論文	非経路依存型	経路依存型	早期行使あり	ジャンプ・モデル
Andersen and Andreasen [4]	ヨーロッパ	×	×	Merton 型ジャンプ拡散モデル
Almendal [2]	ヨーロッパ	×	アメリカン	CGMY モデル
Carr and Mayo [28]	ヨーロッパ	×	×	Merton 型ジャンプ拡散モデル、 Kou 型ジャンプ拡散モデル
Cartea and del Castillo-Negrete [31]	×	バリア	×	FMLS モデル
Feng and Linetsky [50]	ヨーロッパ	バリア	バリュウダン	Merton 型ジャンプ拡散モデル、 Kou 型ジャンプ拡散モデル、バ リアンス・ガンマ・モデル、SVJJ モデル
Fiorani [52]	ヨーロッパ	バリア	アメリカン	バリアンス・ガンマ・モデル
d'Halluin, Forsyth and Labahn [65]	ヨーロッパ	×	アメリカン	Merton 型ジャンプ拡散モデル
d'Halluin, Forsyth and Vertzal [66]	ヨーロッパ	バリア	アメリカン	Merton 型ジャンプ拡散モデル
Hirsa and Madan [70]	×	×	アメリカン	バリアンス・ガンマ・モデル
Itkin and Carr [76]	×	バリア	×	確率スキュー・モデル
Itkin and Carr [77]	ヨーロッパ	×	×	確率スキュー・モデル
Jackson, Jaimungal and Surkov [78]	ヨーロッパ	×	アメリカン	Merton 型ジャンプ拡散モデル
Jackson, Jaimungal and Surkov [79]	ヨーロッパ、 ヨーロッパ、 スプレッド	バリア	アメリカン、 アメリカン、 スプレッド	Merton 型ジャンプ拡散モデル、 Kou 型ジャンプ拡散モデル、 CGMY モデル、バリアンス・ガ ンマ・モデル
Kudryavtsev [89]	×	バリア	アメリカン	KoBoL(CGMY) モデル
Matache, Nitsche and Schwab [100]	×	×	アメリカン	CGMY モデル、バリアンス・ガ ンマ・モデル
Wang, Wan and Forsyth [128]	ヨーロッパ	×	アメリカン	CGMY モデル
本研究(改良高速ガウス変換)	ヨーロッパ			Merton 型ジャンプ拡散モデル
本研究(カルテシアン・ツリー法)	ヨーロッパ			CGMY モデル、バリアンス・ガ ンマ・モデル

2.3 まとめ

サーベイにおける先行研究の現状を調べた結果、以下の点が明らかとなった。

1. ジャンプ・モデルにおける解析法に関しては、ヨーロピアン・オプションなどの非経路依存型オプションの価格計算に対して解析法は有効となるものの、経路依存型オプションに関しては一部のジャンプ・モデルに対し一部のタイプのオプションにのみ可能である。更に可能であるとしても実際には計算コストのかかる数値計算が必要となる場合が一般的で、実務において効率的な手法とは言い難い。
2. ジャンプ・モデルにおけるPDE法では、高速フーリエ変換を用いたFFT法が標準的に用いられているものの、この手法を直接用いるには等間隔の空間における格子点が必要となる事や、各時間離散点ごとに2回の高速フーリエ変換を必要とするなどの問題点がある。そのための代替案としてこの積分作用素を直接計算せずに、別の形式に変換させて計算する方法がいくつか提唱されているものの、一部のタイプのオプションのみ適用可能である。

一方、

1. 近年Zhu[134]がホモトピー解析手法を用いてBlack-Scholesモデルにおけるアメリカン・オプションのクローズド・フォームを導出することに成功した。Black-Scholesモデルにおいてはヨーロピアン・オプション以外のオプションに対してもクローズド・フォームが導出されていることから、ジャンプ・モデルにおいてもヨーロピアン・オプション以外のオプションに関してクローズド・フォームを導出できるのではないかという期待が持てる。また、ホモトピー解析法はスキーム自体がシンプルであるため計算コストの高い既存研究の手法とは違い、比較的容易に計算可能なクローズド・フォームが得られる可能性が高い。
2. 計算物理学の分野では、高速多重極法やツリー法など、高速フーリエ変換よりもフレキシブルで同等以下の計算量を持つ手法が使われている。これらの手法はFFT法とは違い空間方向における格子点が等間隔でない場合も直接用いることが可能であり、更にFFT法と違い2回のオペレーションを必要としない。よって金融工学の分野においてそれほど注目されてこなかったものの、効率的な手法であることが期待される。

これらサーベイ結果を踏まえ、本研究では以下の項目に焦点を当てる。

1. ホモトピー解析法を用いた、ジャンプ・モデルにおけるクローズド・フォームの導出。
本研究における学術的意義としては、Blacks-Schole モデルのみで注目されてきたホモトピー解析法を、ジャンプ・モデルにまで発展させて比較的計算コストの低いクローズド・フォームの導出することにより、金融工学においてホモトピー解析法を有効な手法として提唱する事である。
2. 高速多重極法的一种である改良高速ガウス変換を用いた、ジャンプ・モデルにおけるPDE法。
本研究における学術的意義としては、計算物理学の分野で有効性が認められてきた高速多重極法を金融工学においても有効なツールである事を示すことにより、金融工学の分野においても高速多重極法を効率的計算手法として提唱する事である。
3. ツリー法的一种であるカルテシアン・ツリー法を用いた、ジャンプ・モデルにおけるPDE法。
本研究における学術的意義としては高速多重極法の場合と同様、計算物理学の分野で有効性が認められてきたツリー法を金融工学においても有効なツールである事を示すことにより、金融工学の分野においてもツリー法を有効な効率的計算手法として提唱する事である。

第3章 解析法におけるホモトピー解析法を用いた評価の高速化

3.1 概要および本章の構成

サーベイの章で述べたように、ジャンプ・モデルの場合ヨーロッパ・オプションのクローズド・フォームは Carr and Madan[26] の特性関数を用いた手法により導出されているものの、この手法はバリア・オプションなど他のタイプのオプションに対しては適用する事ができない。別の手法としては PDE 法を用いて偏微分積分方程式を数値計算して求める手法があるものの、この方程式に現れる積分作用素の計算負荷が問題となる。本章では、ホモトピー解析法を用いたジャンプ・モデルにおけるクローズド・フォーム導出の新しいアプローチを提唱する。ホモトピー解析手法は最初に Ortega and Rheinboldt[106] によって提唱され、これまで非線形微分方程式において広く用いられてきた (例えば [1, 98, 93, 105, 123, 127, 131, 135] など)。しかし金融工学の分野では Zhu[134] により Black-Schole モデルの下、ホモトピー解析法を用いてアメリカン・オプションのクローズド・フォームが導出された。しかしジャンプ・モデルに対してはこれまでホモトピー解析法を用いたクローズド・フォームの導出はなされてなかった。具体的には以下のようにホモトピー解析法を用いて偏微分積分方程式を準解析的に解き、オプション価格のクローズド・フォームを導出する。

1. フーリエ変換を用いて積分偏微分方程式を常微分方程式に変換し、常微分方程式システムを構築する。
2. 常微分方程式システムにおける、常微分方程式の解析解を導出する。
3. 再帰的に 1 および 2 を行い各項が解析的に表される無限数列の和としてオプション価格を計算する。

数値実験ではバリアンス・ガンマ・モデルを例としてホモトピー解析法を用いたヨーロッパ・オプションおよびバリア・オプションであるダウン・アウト・アンド・コールの価格を算出する。数値実験の結果に示されているように、この無限数列の和は早く収束するので少数の項を用いて十分に精度のあるオプション価格を算出することが可能である。本論文では例と

してバリアンス・ガンマ・モデルを用いているものの、characteristic exponent が解析的に得られるジャンプ・モデルであれば原則的に適用可能である。そして得られたオプション価格のクローズド・フォームを直接微分することにより、各リスク指標のクローズド・フォームも求める事ができるため、ジャンプ・モデルにおけるリスク管理の効率性向上にもつながる。

以降の本章の構成は以下の通りである。3.2節では1次元ジャンプ過程として原資産をモデル化し、3.3節でホモトピー解析法を紹介する。3.4節ではバリアンス・ガンマ・モデルにおけるヨーロピアン・オプションに対してホモトピー解析法を適用し、3.5節ではバリア・オプションの一種であるダウン・アンド・アウト・コールに適用する。3.6節では数値実験結果を述べ、最後の3.7節では本章の総括を述べる。

3.2 原資産過程

リスク中立測度のもと原資産 S_t はジャンプ・モデルに従うものとし、 $S_t = S_0 e^{X(t)}$ として表される。ここで $X(t)$ は以下のレヴィ-伊藤分解によって表される1次元レヴィ過程である [118]。

$$X(t) = \mu t + \sigma W(t) + \int_0^t \int_{|y| \geq 1} y h(dy ds) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^t \int_{\epsilon \leq |y| < 1} y [h(dy ds) - \nu(dy ds)]$$

ここで μ はドリフト項、 σ はボラテリティ項、 $W(t)$ はブラウン運動、 $h(dy ds)$ はポアソン測度、 $\nu(dy ds)$ はコンペンセーターである。時刻 t におけるオプション価格を $v_t = E_t^Q [e^{-r(T-t)} \varphi]$ とする (r はリスクフリー・レート、 φ は満期 T におけるペイオフ関数)。この時 $e^{r(T-t)} v_t$ は以下の偏微分積分方程式 (PIDE) をみたす (導出の詳細は [34] を参照)。

$$\partial_\tau v + \mu \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \int_{\mathbb{R}} [v(x+y) - v(x) - y \frac{\partial v}{\partial x} 1_{|y| < 1}] \nu(dy) = 0 \quad (3.1)$$

また \mathbf{F} を以下のように定義されるフーリエ変換作用素とする。

$$\mathbf{F}v = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} v(x) dx$$

この時 (3.1) の両辺をフーリエ変換することにより、以下の常微分方程式 (ODE) が得られる。

$$\hat{\mathcal{A}}(\omega) \cdot \hat{v}(\omega, t) = 0, \quad (3.2)$$

$$\hat{v}(\omega, T) = \hat{\varphi}(\omega)$$

ここで $\hat{v}(\omega, t) := \mathbf{F}v$, $\hat{\varphi}(\omega) := \mathbf{F}\varphi$, $\hat{\mathcal{A}} := \partial_t + \Phi(\omega)$ であり、 $\Phi(\omega)$ は characteristic exponent と呼ばれる。本論文ではホモトピー解析法を (3.2) に適用し、オプション価格のクローズド・フォームを算出していく。

3.3 ホモトピー解析法

ホモトピー解析手法とは、ある関数 $V(x, t)$ を求めたい時にシンプルな関数 $V_0(x, t)$ を初期関数として連続的に変形させていき、最終的に $V(x, t)$ に漸近させることで求める手法である。そのためには $F(x, t, p = 0) = V_0(x, t)$ 、 $F(x, t, p = 1) = V(x, t)$ となるような連続過程 $F(x, t, p)$ を構築することが必要となるが、例えばある微分作用素 A が与えられた時、次の微分方程式を満たす関数 V を求めたいとする。

$$A(V(x, t)) = 0 \quad (3.3)$$

まず初期微分作用素 A_0 および初期関数 $\bar{V}_0(x, t)$ を設定する。そして以下の微分方程式系を満たす連続過程 $\bar{V}(x, t, p)$ を考える。

$$(1 - p)[A_0(\bar{V}(x, t, p)) - A_0(\bar{V}_0(x, t))] = -p \cdot A(\bar{V}(x, t, p)). \quad (3.4)$$

例えば $p = 0$ とすると、

$$A_0(\bar{V}(x, t, 0)) - A_0(\bar{V}_0(x, t)) = 0$$

となるので $\bar{V}(x, t, 0) = \bar{V}_0(x, t)$ であることがわかる。一方 $p = 1$ とすると

$$A(\bar{V}(x, t, 1)) = 0$$

となるので $V(x, t) = \bar{V}(x, t, 1)$ であることがわかり、当初の求めたい $V(x, t)$ と一致することがわかる。よって (3.4) を満たす $\bar{V}(x, t, p)$ を求めればよいが、そのためにパラメータ p に関する $\bar{V}(x, t, p)$ の Taylor 展開を考える。

$$\bar{V}(x, t, p) = V_0(x, t) + V_1(x, t)p + \frac{1}{2}V_2(x, t)p^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{V_n(x, t)}{n!} p^n \quad (3.5)$$

ここで $V_n(x, t) = \frac{\partial^n}{\partial p^n} \bar{V}(x, t, p)|_{p=0}$ であるが、これらの項を求めるために方程式 (3.4) の両辺を p に関して微分する。すると

$$-[A_0(\bar{V}(x, t, p)) - A_0(\bar{V}_0(x, t))] + (1 - p) \frac{\partial}{\partial p} A_0(\bar{V}(x, t, p)) + A(\bar{V}(x, t, p)) + p \cdot \frac{\partial}{\partial p} A(\bar{V}(x, t, p)) = 0$$

となる。この式に $p = 0$ と代入して

$$A_0(V_1(x, t)) + [A(V_0(x, t)) - A_0(V_0(x, t))] = 0 \quad (3.6)$$

が得られるが、この時 $A_0(V_0(x, t)) = 0$ を満たす初期関数 $V_0(x, t)$ を選べば、 $n \geq 1$ に関して Taylor 係数 $V_n(x, t)$ は以下を満たすことがわかる。

$$A_0(V_n(x, t)) + n \cdot [A(V_{n-1}(x, t)) - A_0(V_{n-1}(x, t))] = 0 \quad (3.7)$$

よって各 Taylor 係数 $V_n(x, t)$ は (3.7) を再帰的に解いていくことで求められ、その結果 $\bar{V}(x, t, p)$ が得られる (そして $p = 1$ とすれば $\bar{V}(x, t, p = 1) = V(x, t)$ となる)。初期微分作用素 A_0 および初期関数 V_0 は自由に設定することができるという意味で、ホモトピー解析法には柔軟性がある一方、不適切に選択をすると Taylor 展開 (3.5) の収束が遅くなる可能性があるため注意して選択する必要がある。また Taylor 展開 (3.5) の各 Taylor 係数を解析的に求めるには、(3.6) および (3.7) の解が解析的に得られるような微分作用素 A_0 を選ぶ必要がある。以下の例ではバリアンス・ガンマ・モデルを一例にしているが、ここで設定された初期微分作用素 A_0 および初期関数 V_0 を同様に用いれば characteristic exponent が解析的に求まるジャンプ・モデルにも原則的に適用可能である。しかし収束性が遅くなる可能性もあるため、実際にはモデル毎に初期微分作用素 A_0 および初期関数 V_0 の選び方を検討する必要があることを注記しておく。

3.4 ホモトピー解析法によるヨーロピアン・オプション評価

ここでは一例として、バリアンス・ガンマ・モデル [52, 70, 97] におけるヨーロピアン・コール・オプションのクローズド・フォームをホモトピー解析法を用いて求めていくが、同様に characteristic exponent が解析的に求まるジャンプ・モデルであれば同様に求めることが可能である。バリアンス・ガンマ・モデルの場合、(3.2) 式から以下の常微分方程式を解いていくことになる。

$$\hat{A}(\omega) \cdot \hat{v}(\omega, t) = 0, \quad \hat{v}(\omega, t = T) = \hat{\varphi}(\omega) \quad (3.8)$$

ここで $\hat{A} := \partial_t + \Phi_{VG}(\omega)$ であり、

$$\Phi_{VG}(\omega) := \gamma i \omega - \frac{1}{\kappa} \ln \left(1 - i \mu \kappa \omega + \frac{\sigma^2 \kappa \omega^2}{2} \right)$$

である。この時

$$\hat{\varphi}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} [S_0 e^x - K]^+ dx$$

であるが、 $[S_0 e^x - K]^+$ は可積分ではないため $\hat{\varphi}(\omega)$ を明示的に表すことができない。このままでは (3.8) を解くのは難しいので、[26] にて適用された変換法を用いることにする。まず $e^{\alpha x} v(x, t)$ のフーリエ変換が存在可能な実数 α を設定する。このとき

$$v(x, t) = e^{-\alpha x} \mathbf{F}^{-1}[\mathbf{F}[e^{\alpha x} v(x, t)]]$$

となり、 $\mathbf{F}e^{\alpha x}v(x, t)$ を求めればよいことになる。 $v(x, t) \rightarrow e^{\alpha x}v(x, t)$ の変換は $\hat{v}(\omega, t) \rightarrow \hat{v}(\omega + \alpha i, t)$ の変換に対応するので (3.8) の代わりに

$$\hat{A}(\omega + \alpha i) \cdot \hat{v}_S(\omega, t) = 0, \quad \hat{v}_S(\omega, T) = \hat{\varphi}(\omega + \alpha i)$$

を解いていけば良い。ここで $\hat{v}_S(\omega, t) = \hat{v}_n(\omega + \alpha i, t)$ 、 $\hat{\varphi}(\omega + \alpha i) = K \left(\frac{K}{S_0}\right)^\alpha \frac{e^{-i\omega \ln \frac{K}{S_0}}}{(-i\omega + \alpha + 1)(-i\omega + \alpha)}$ で、 α は $\alpha < -1$ をみたす実数である。この方程式の解は簡単に求めることができ、

$$\hat{v}_S(\omega, t) = e^{-\Phi_{VG}(\omega + \alpha i)(T-t)} \hat{\varphi}(\omega + \alpha i)$$

となる。そして

$$v(x, t) = \frac{e^{-r(T-t)} e^{-\alpha x}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} e^{\Phi_{VG}(\omega + \alpha i)(T-t)} \hat{\varphi}(\omega + \alpha i) d\omega \quad (3.9)$$

である。ヨーロッパ・オプションの場合このように直接求めることも可能であるが、ホモトピー解析法を用いてクローズド・フォームを導出すると以下のようなになる。まず初期関数 $\hat{v}_{S_0}(\omega, t)$ を、

$$\hat{A}_0(\omega + \alpha i) \cdot \hat{v}_{S_0}(\omega, t) = 0, \quad \hat{v}_{S_0}(\omega, T) = \hat{\varphi}(\omega + \alpha i).$$

を満たす関数として設定する。初期微分作用素 \hat{A}_0 は、 $\hat{v}_{S_0}(\omega, t)$ が解析的に表せるように、後程設定していく。次にパラメータ $p \in [0, 1]$ に関して以下のような微分方程式系を考える。

$$(1-p)[\hat{A}_0(\omega + \alpha i) \cdot \bar{V}_S(\omega, t, p) - \hat{A}_0(\omega + \alpha i) \cdot \bar{V}_{S_0}(\omega, t)] = -p \cdot \hat{A}(\omega + \alpha i) \cdot \bar{V}_S(\omega, t, p)$$

$$\bar{V}_S(\omega, T, p) = \hat{\varphi}(\omega + \alpha i)$$

ここで $\bar{V}_S(\omega, t, p)$ は $\bar{V}_S(\omega, t, 0) = \hat{v}_{S_0}(\omega, t)$ 、 $\bar{V}_S(\omega, t, 1) = \hat{v}_S(\omega, t)$ を満たす関数とする。更に $\bar{v}_S(x, t, p) := \mathbf{F}^{-1}\bar{V}_S(\omega, t, p)$ とする。前節より $n \geq 1$ に対し以下の再帰式が得られる。

$$\hat{A}_0(\omega + \alpha i) \cdot \hat{v}_{S_n}(\omega, t) = n \cdot [\hat{A}(\omega + \alpha i) - \hat{A}_0(\omega + \alpha i)] \cdot \hat{v}_{S_{n-1}}(\omega, t) \quad (3.10)$$

$$\hat{v}_{S_n}(\omega, T) = 0$$

ここで

$$\hat{v}_{S_n}(\omega, t) := \left. \frac{\partial^n \bar{V}_S}{\partial p^n} \right|_{p=0}$$

である。次に、各 n に対して再帰式を解析的に解くため $\hat{A}_0(\omega + \alpha i)$ を設定する。ここで

$$\ln \left(1 - i\mu\kappa(\omega + \alpha i) + \frac{\sigma^2\kappa(\omega + \alpha i)^2}{2} \right) = \ln \left[\left(1 + \mu\kappa\alpha - \frac{\sigma^2\kappa\alpha^2}{2} \right) + [\sigma^2\kappa\alpha - \mu\kappa]\omega i + \frac{\sigma^2\kappa\omega^2}{2} \right]$$

$$:= \ln(z_0 + z_1\omega i + z_2\omega^2)$$

の $\omega = 0$ における Taylor 展開は $\ln z_0 + \frac{z_1}{z_0}\omega i + \frac{1}{2} \left(\frac{2z_0z_2 + z_1^2}{z_0^2} \right) \omega^2 + \dots$ となることから、

$$\begin{aligned} \Phi_{VG}(\omega + \alpha i) &= \gamma(\omega + \alpha i) i - \frac{1}{\kappa} \left[\ln z_0 + \frac{z_1}{z_0}\omega i + \frac{1}{2} \left(\frac{2z_0z_2 + z_1^2}{z_0^2} \right) \omega^2 + \dots \right] \\ &= -\gamma\alpha - \frac{1}{\kappa} \ln z_0 + \left(\gamma - \frac{z_1}{\kappa z_0} \right) \omega i - \frac{1}{2\kappa} \left(\frac{2z_0z_2 + z_1^2}{z_0^2} \right) \omega^2 + \dots \\ &:= Z_0 + Z_1\omega i + Z_2\omega^2 + \dots \end{aligned}$$

と表せる。Black-Scholes モデルにおけるヨーロピアン・コール価格の解析解は拡散方程式を解析的に解くことにより得られることから、 $\Phi_{VG}(\omega + \alpha i)$ の拡散近似を用いて

$$\hat{A}_0(\omega + \alpha i) = \partial_t + (Z_0 + Z_1\omega i + Z_2\omega^2)$$

と選択することにする。更に

$$Z_0 + Z_1\omega i + Z_2\omega^2 = Z_2 \left(\omega + \frac{Z_1}{2Z_2}i \right)^2 + \frac{Z_1^2}{4Z_2} + Z_0 := A_1(\omega + A_2i)^2 + A_3$$

であるため、 $\hat{v}_{S_n}^c(\omega, t') := e^{A_3t'} \hat{v}_{S_n}(\omega - A_2i, t')$ 、 $t' = T - t$ と定義することにより $n = 0$ の場合は

$$[\partial_{t'} - A_1\omega^2] \cdot \hat{v}_{S_0}^c(\omega, t') = 0, \quad \hat{v}_{S_0}^c(\omega, 0) = \hat{\varphi}(\omega + \alpha i - A_2i) \quad (3.11)$$

となり、 $n \geq 1$ の場合は $G^c(\omega - A_2i) := \Phi_{VG}(\omega + \alpha i - A_2i) - A_1\omega^2$ として

$$[\partial_{t'} - A_1\omega^2] \cdot \hat{v}_{S_n}^c(\omega, t') - n \cdot [G^c(\omega - A_2i)] \cdot \hat{v}_{S_{n-1}}^c(\omega, t') = 0, \quad (3.12)$$

$\hat{v}_{S_n}^c(\omega, 0) = 0$ を解くことになる。(3.11) の解は

$$\hat{v}_{S_0}(\omega, t') = e^{A_1\omega^2 t'} \hat{\varphi}(\omega + \alpha i - A_2i)$$

となる。同様に (3.12) の解は

$$\hat{v}_{S_n}^c(\omega, t') = n \cdot \int_0^{t'} e^{A_1\omega^2(t'-\tau)} G^c(\omega - A_2i) \hat{v}_{S_{n-1}}^c(\omega, \tau) d\tau \quad (3.13)$$

となる。更に (3.13) は再帰的に解くことで

$$\hat{v}_{S_n}^c(\omega, t') = n \cdot t'^n e^{A_1\omega^2(t'-\tau)} [G^c(\omega - A_2i)]^n \hat{\varphi}(\omega + \alpha i - A_2i) \quad (3.14)$$

と変形可能である。よって (3.11) および (3.14) から $t = 0$ における満期 T のヨーロピアン・コール価格 $v(x, 0)$ は、 $x = \ln(S/S_0)$ として

$$v(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-rT} \frac{v_n(x, 0)}{n!} \quad (3.15)$$

と表される。ここで

$$v_n(x, 0) = n \cdot \frac{e^{A_2 x + A_3 T - \alpha x}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{A_1 \omega^2 T} \cdot T^n G^c(\omega - A_2 i)^n \hat{\varphi}(\omega + \alpha i - A_2 i) d\omega \quad (3.16)$$

である。

3.5 ホモトピー解析法によるバリア・オプション評価

次にバリア・オプションの準解析解をホモトピー解析法を用いて求めていくことにする。前節と同様にバリアンス・ガンマ・モデルの場合を考えていくが、同様に characteristic exponent が解析的に求まるジャンプ・モデルであれば同様に求めることが可能である。更に例としてバリア・オプションの一種であるダウン・アンド・アウト・コール・オプションのクローズド・フォームを求めているが、Black-Scholes モデルにおいてクローズド・フォームが存在するタイプのオプションであれば、同様に求めることが可能である。ダウン・アンド・アウト・コール・オプションを解くために用いる微分方程式系は、以下のように前節のヨーロピアン・コールにおける微分方程式系に境界条件が追加されたものとなる。

$n = 0$ の場合、バリア価格を B 、 $b := \ln(\frac{B}{S_0})$ として

$$[\partial_{t'} - A_1 \omega^2] \cdot \hat{v}_{S_0}^c(\omega, t') = 0, \quad \hat{v}_{S_0}^c(\omega, 0) = \hat{\varphi}(\omega + \alpha i - A_2 i), \quad v_{S_0}(x \leq b, t') = 0$$

を解く必要がある。この方程式を逆フーリエ変換して得られる境界条件付き拡散方程式の解は、代入を試みれば明らかだが

$$v_{S_0}^c(x, t') = v_{E_0}^c(x, t') - v_{E_0}^c(2b - x, t'), \quad (3.17)$$

$$v_{E_0}^c(x, t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} e^{A_1 \omega^2 t'} \hat{\varphi}(\omega + \alpha i - A_2 i) d\omega \quad (3.18)$$

であることが容易にわかる ($v_{E_0}^c(x, t')$ は境界条件がない場合の解)。よって

$$v_0(x, t') = e^{A_2 x} e^{A_3 t'} e^{-\alpha x} v_{E_0}^c(x, t') - e^{A_2 x} e^{A_3 t'} e^{-\alpha(-x)} v_{E_0}^c(2b - x, t')$$

と求められる。 $n \geq 1$ に対しては

$$[\partial_{t'} - A_1 \omega^2] \cdot \hat{v}_{S_n}^c(\omega, t') = n \cdot G^c(\omega - A_2 i) \cdot \hat{v}_{S_{n-1}}^c(\omega, t'), \quad \hat{v}_{S_n}^c(\omega, 0) = 0, \quad v_{S_n}^c(x \leq b, t') = 0$$

を解くことになる。まず $n = 1$ の場合を考える。この時

$$[\partial_{t'} - A_1 \omega^2] \hat{v}_{S_1}^c(\omega, t') = G^c(\omega - A_2 i) \cdot \mathbf{F}[1_{(b, \infty)} \cdot v_{S_0}^c(x, t')], \quad (3.19)$$

$$\hat{v}_{S_1}^c(\omega, 0) = 0, \quad v_{S_1}^c(x \leq b, t') = 0$$

であるが、方程式 (3.19) は

$$[\partial_{t'} - A_1 \omega^2] \hat{f}(\omega, t') = \hat{h}(\omega, t'), \quad \hat{f}(\omega, 0) = 0, \quad f(x \leq b, t') = 0 \quad (3.20)$$

の形式であり、その解は Duhamel の法則 (例えば [48] を参照) を用いて

$$\hat{f}(\omega, t') = \int_0^{t'} \hat{\psi}(\omega, t'; \tau) d\tau \quad (3.21)$$

と表される。ここで $\hat{\psi}(\omega, t'; \tau)$ は $t' \geq \tau$ に対して

$$[\partial_{t'} - A_1 \omega^2] \hat{\psi}(\omega, t'; \tau) = 0, \quad \hat{\psi}(\omega, \tau; \tau) = \hat{h}(\omega, \tau), \quad \psi(x \leq b, t', \tau) = 0 \quad (3.22)$$

を満たす。よって $n = 0$ の場合と同様、 $\hat{v}_{S_1}^c(\omega, t')$ は

$$v_{S_1}^c(x, t') = v_{E_1}^c(x, t') - v_{E_1}^c(2b - x, t'), \quad (3.23)$$

$$v_{E_1}^c(x, t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} G^c(\omega - A_2 i) \left[\int_0^{t'} e^{A_1 \omega^2 (t' - \tau)} \mathbf{F}[1_{(b, \infty)}] \cdot v_{S_0}^c(x, \tau) \right] d\tau d\omega \quad (3.24)$$

と表せ、

$$v_1(x, t') = e^{A_2 x} e^{A_3 t'} e^{-\alpha x} v_{S_1}^c(x, t') - e^{A_2 x} e^{A_3 t'} e^{-\alpha(-x)} v_{E_1}^c(2b - x, t')$$

と求められる。

$n \geq 2$ の場合も同様の議論を用いることにより、 $t = 0$ における満期 T のダウン・アンド・アウト・コール・オプション価格は $v(x, 0)$

$$v(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-rT} \frac{v_n(x, 0)}{n!} \quad (3.25)$$

と表される。ここで $n = 0$ の場合は、

$$v_0(x, 0) = e^{A_2 x} e^{A_3 T} e^{-\alpha x} v_{E_0}^c(x, 0) - e^{A_2 x} e^{A_3 T} e^{-\alpha(-x)} v_{E_0}^c(2b - x, 0), \quad (3.26)$$

$$v_{E_0}^c(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} e^{A_1 \omega^2 T} \hat{\varphi}(\omega + \alpha i - A_2 i) d\omega \quad (3.27)$$

$$v_{S_0}^c(x, 0) = v_{E_0}^c(x, 0) - v_{E_0}^c(2b - x, 0), \quad (3.28)$$

であり、 $n \geq 1$ の場合は

$$v_n(x, 0) = n \cdot [e^{A_2 x} e^{A_3 T} e^{-\alpha x} v_{E_n}^c(x, 0) - e^{A_2 x} e^{A_3 T} e^{-\alpha(-x)} v_{E_n}^c(2b - x, 0)], \quad (3.29)$$

$$v_{E_n}^c(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} G^c(\omega - A_2 i) \int_0^T e^{A_1 \omega^2 (T - \tau)} \mathbf{F}[1_{(b, \infty)}] \cdot v_{S_{n-1}}^c(x, \tau) d\tau d\omega, \quad (3.30)$$

$$v_{S_n}^c(x, 0) = v_{E_n}^c(x, 0) - v_{E_n}^c(2b - x, 0), \quad (3.31)$$

である。

更に $\mathbf{F}[1_{(b,\infty)} \cdot v_{S_{n-1}}^c(x, \tau)]$ は以下の等式より、ヒルバート関数を用いて表すことが可能である。

$$\mathbf{F}[1_{(b,\infty)} \cdot f(x)] = \frac{1}{2} \hat{f}(\omega) - \frac{i}{2} e^{-i\omega b} H(e^{i\omega b} \hat{f}(\eta))(\omega) \quad (3.32)$$

ここでヒルバート変換 $H(\hat{F}(\eta))(\omega)$ は

$$H(\hat{F}(\eta))(\omega) := \frac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{F}(\eta)}{\omega - \eta} d\eta$$

と定義される (導出は [49] を参照)。しかしこの場合ヒルバート変換を数値計算する必要があるので、数値実験では簡潔化のためフーリエ変換 $\mathbf{F}[1_{(b,\infty)} \cdot v_{S_{n-1}}^c(x, \tau)]$ を数値計算していくことにする。(3.25) を用いて実際にオプション価格を求めるには、各 n において、 $v_{E_n}^c(x, 0)$ および $v_{E_n}^c(2b - x, 0)$ の積分計算を行う必要があるが、必要であれば高速フーリエ変換を用いて高速化を図ることも可能である。また $n \geq 1$ の場合は、 $v_{S_n}^c(x, 0)$ および $v_{E_n}^c(2b - x, 0)$ の数値計算をする前に

$$\int_0^T e^{A_1 \omega^2 (T-\tau)} \mathbf{F}[1_{(b,\infty)} \cdot v_{S_{n-1}}^c(x, \tau)] d\tau \quad (3.33)$$

を計算する必要がある。しかしこの積分の数値計算に以下の台数近似を用いれば2回のフーリエ変換を行うだけで評価可能となる。

$$\int_0^T e^{A_1 \omega^2 (T-\tau)} \mathbf{F}[1_{(b,\infty)} \cdot v_{S_{n-1}}^c(x, \tau)] d\tau \approx \frac{T}{2} [\mathbf{F}[1_{(b,\infty)} \cdot v_{S_{n-1}}^c(x, 0)] + e^{-A_1 \omega^2 T} \mathbf{F}[1_{(b,\infty)} \cdot v_{S_{n-1}}^c(x, T)]]$$

更に必要であれば、高速フーリエ変換を用いて更なる高速化を図ることも可能であるので、各項の計算負荷は小さい。更に後述の数値実験が示すように、(3.25) の収束は早いので少ない項の和で精度の高い価格が計算できる。これらの点から、(3.25) の数値計算は非常に効率的に行えることがわかる。

また今回数値実験は行わないものの、上記のダウン・アンド・アウト・コール・オプションにおけるクローズド・フォームを用いて、構造型モデルにおけるクレジット・デフォルト・スワップ (CDS) を評価することも可能である。 S_t を企業価値として幾何レヴィ過程に従う場合、CDS のフェア・スプレッドは以下のように表される [19]。

$$C = (1 - R) \left(\frac{BDOB(B, T)}{\int_0^T BDOB(B, t) dt} - r \right) \quad (3.34)$$

ここで $BDOB(B, T)$ は満期 T のバイナリー・ダウン・アンド・アウト・コール・オプション価格、 r はリスクフリーレート、 R は回収率、 B はバリアを表し、構造型モデルの場合 $S_t \leq B$ となるとデフォルトが起こると仮定されている。[19] では有限差分法を用いて (3.34) の各項

を計算しているが、ホモトピー解析法によりバイナリー・ダウン・アンド・アウト・コール・オプション価格のクローズド・フォームを用いれば T に関して積分を行うことにより、同様にクローズド・フォームを求めることができる。

3.6 数値実験

まずヨーロピアン・コール・オプション評価において、Carr and Madan[26] による特性関数を用いたクローズド・フォームを参照価格としてホモトピー解析法によるクローズド・フォーム (3.15) との数値比較を $a = -0.28113$ とし、その他のパラメータ値は $S = 100$ 、 $K = 100$ 、 $r = 0.0549$ 、 $q = 0.011$ 、 $T = 0.1$ 、 $\alpha = -12.8$ とした。図 3.1 の上図における水平軸は、ホモトピー解析法のクローズド・フォームにおける Taylor 展開近似に使われた Taylor 項数を表し、垂直軸はオプション価格を表す。一方図 3.1 の下図における垂直軸は、参照価格との差異を表している。クローズド・フォームは無限数列の和として表されるもののその収束は早く、5 つ程の Taylor 項の和で十分に参照価格と近い値になることがわかる。よって実際には多くの Taylor 項を計算する必要がないことが判明し、更に各 Taylor 項は (3.16) の積分を数値計算するだけで得られるため、アルゴリズム全体として計算負荷が少ない。これはホモトピー解析法は実務におけるバリア・オプション評価に大変有効であることを示唆している。

次にダウン・アンド・アウト・コール・オプション評価において、有限差分法 [52] により数値計算された参照価格としてホモトピー解析法によるクローズド・フォーム (3.25) との数値比較を行った。使用したプログラミング言語は同様に C++ である。バリアンス・ガンマ・モデルのパラメータ値は [70] の数値を使用して $\sigma = 0.19071$ 、 $\kappa = 0.49083$ 、 $\mu = -0.28113$ とし、その他のパラメータ値は $S = 100.01116$ 、 $K = 100$ 、 $B = 85$ 、 $r = 0.0549$ 、 $q = 0.011$ 、 $T = 0.1$ 、 $\alpha = -12.87$ とした。また積分項 $\int_0^T e^{-A_1\omega^2\tau} \mathbf{F}[1_{(b,\infty)} \cdot v_{S_{n-1}}^c(x, \tau)] d\tau$ の数値計算には前述の通り以下の台数近似を用いた。

$$\frac{T}{2} [\mathbf{F}[1_{(b,\infty)} \cdot v_{S_{n-1}}^c(x, 0)] + e^{-A_1\omega^2 T} \mathbf{F}[1_{(b,\infty)} \cdot v_{S_{n-1}}^c(x, T)]] \quad (3.35)$$

図 3.2 の上図における水平軸は、ホモトピー解析法のクローズド・フォームにおける Taylor 展開近似に使われた Taylor 項数を表し、垂直軸はオプション価格を表す。一方図 3.2 の下図における垂直軸は、参照価格との差異を表している。ヨーロピアン・コール評価の場合と同様、クローズド・フォームは無限数列の和として表されるものその収束は早く、5 つ程の Taylor 項数の和で十分に参照価格と近い値になることがわかる。よって実際には多くの Taylor 項

を計算する必要がないことが判明し、更に各 Taylor 項は前節で述べられている通り計算負荷は小さくいのでアルゴリズム全体としても計算負荷が少ない。これはホモトピー解析法は実務おけるバリア・オプション評価に大変有効であることを示唆している。

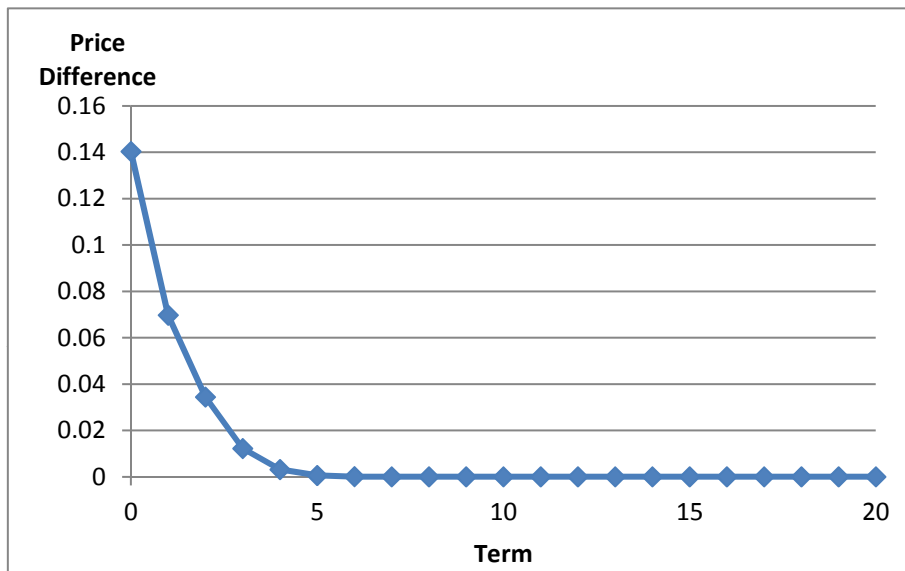
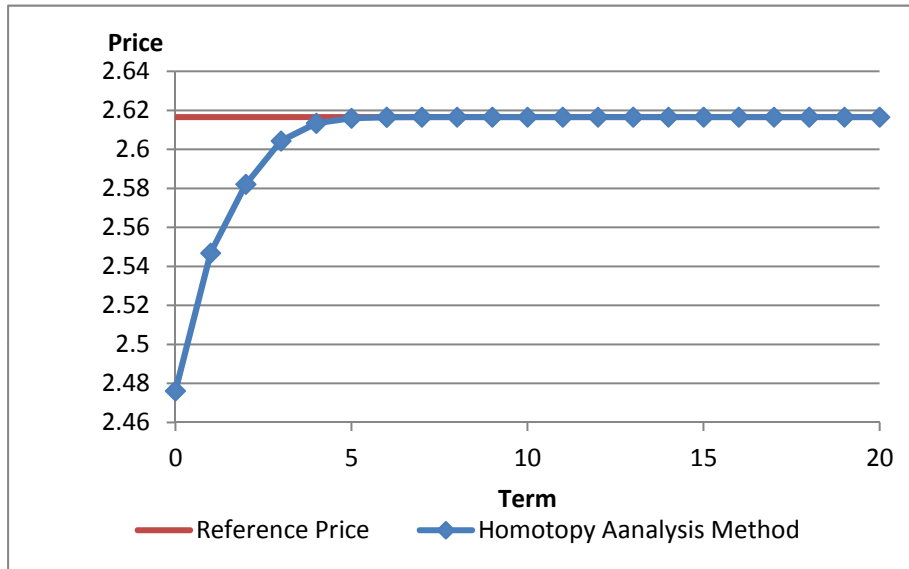


図 3.1: ヨーロピアン・コールのクローズド・フォーム (ホモトピー解析法) と参照価格の比較

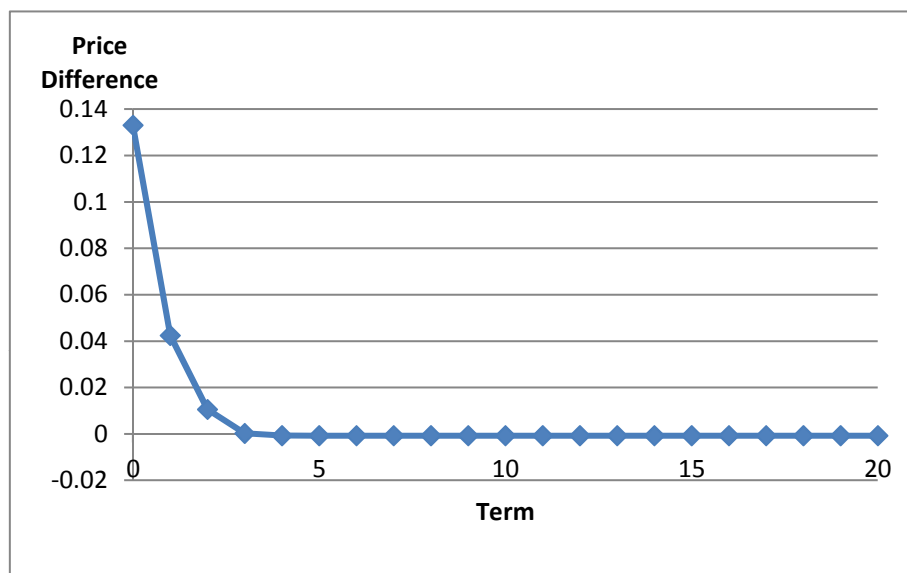
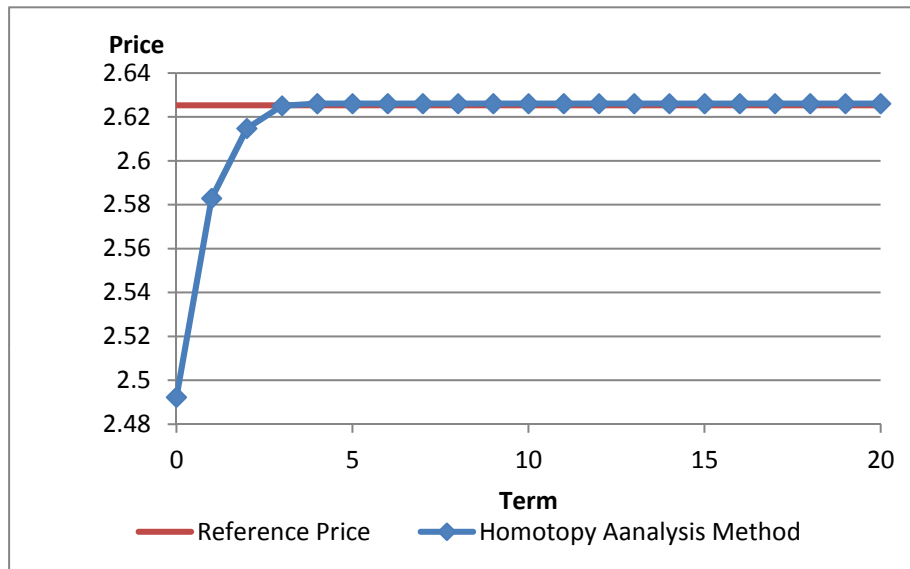


図 3.2: ダウン・アンド・アウト・コールのクローズド・フォーム (ホモトピー解析法) と参照価格の比較

3.7 第3章のまとめ

本章ではホモトピー解析法を用いてジャンプ・モデルの一種であるバリアンス・ガンマ・モデルのもと、ヨーロピアン・オプションおよびバリア・オプションのクローズド・フォームを求めた。クローズド・フォームは無限数列の和として表されるものの、数値実験によりこの数列は早く収束することが確認された。よって実務でも計算負荷は小さいのでホモトピー解析法によるオプション評価が有効であることが判明した。更にこの手法は characteristic exponent が解析的に得られるジャンプ・モデルに対しても適用可能であり、また Black-Scholes モデルでクローズド・フォームが存在するタイプのオプションであれば、この手法を用いることによりジャンプ・モデルにおいても同様にクローズド・フォームを求めることができる。そして得られたオプション価格のクローズド・フォームを直接微分することにより、各リスク指標のクローズド・フォームも求める事ができるため、ジャンプ・モデルにおけるリスク管理の効率性向上にもつながる。また、Zhou[134] は Black-Scholes モデルにおけるアメリカン・オプション価格のクローズド・フォームを導くことに成功したが、同様の議論によりジャンプ・モデルにおいてもアメリカン・オプションのクローズド・フォームが得られると思われる。今後の研究によりジャンプ・モデルのエキゾチック・オプション評価におけるホモトピー解析法の、更なる有効性が明らかとなることが期待される。

第4章 PDE法における改良高速ガウス変換を用いた評価の高速化

4.1 概要

高速多重極法は計算物理学の分野で効率的な数値計算法として用いられているものの、金融工学の分野での注目度は低かった。本章では改良高速ガウス変換と呼ばれる高速多重極法の一手法を用いてマートン型ジャンプ拡散モデルにおけるヨーロッパ・オプション価格を算出する。改良高速ガウス変換は偏微分積分方程式に現れる積分作用素を効率的に計算する事ができ、本章の数値実験結果からも、高速多重極法が金融工学において効率的な数値計算法であることが確認できる。

4.2 本章の背景及び構成

Black-Scholes モデルはオプション市場で実際に観測されているスキューおよびスマイル効果を説明する事ができないため、原資産モデルにジャンプ過程を追加したジャンプ・モデルが近年注目を浴びている。ジャンプ・モデルの代表的なモデルとして Merton 型ジャンプ拡散モデルおよび Kou 型ジャンプ拡散モデルが挙げられるが、これらのモデルの長所として Merton 型ジャンプ拡散モデルの場合、ヨーロッパ・オプション価格の解析解が存在し、更に Kou 型ジャンプ拡散モデルの場合には一部の経路依存型オプションに対しても解析解が存在するので実務においても扱いやすい。解析解が存在しない他のタイプのオプションに対してはモンテカルロ法または PDE 法を用いるのが一般的であるものの、モンテカルロ法は一般的に計算時間がかかり、また PDE 法においても積分作用素を数値計算する必要があるため、Black-Scholes モデルにおける PDE 法の場合よりも計算時間がかかってしまう。よって PDE 法においては FFT 法と呼ばれる高速フーリエ変換を用いた手法が一般的に用いられるものの、この手法を直接用いるには等間隔の空間における格子点が必要となる事や、各時間離散点ごとに 2 回の高速フーリエ変換を必要とするなどの問題点がある。

一方 [66] において、高速ガウス変換 [62] (the fast Gauss transform, FGT) と呼ばれる数値計

算法が、Merton型ジャンプ拡散モデルにおける積分作用素の計算に対し試みられた。FGTは高速多重極法 [61] (Fast multipole method) と呼ばれる、計算物理学の分野で研究の活発な数値計算法の一つである。例えば、各時点においてそれぞれ C_1, C_2, \dots, C_{M_1} のウェイトを持つ M_1 個のソースポイント x_1, x_2, \dots, x_{M_1} および指定されたカーネル関数 $K(x, y)$ が与えられた時、 M_2 個のターゲットポイント y_1, y_2, \dots, y_{M_2} に対して以下のような計算が行いたいとする。

$$F(y_j) = \sum_{i=1}^{M_1} C_i \cdot K(x_i, y_j) \quad (4.1)$$

このような計算は、例えば多数の粒子間におけるポテンシャルの相互作用を計測する際に表れるなど計算物理学において頻繁に表れる。ポイント数が少ない場合は直接計算して問題ないもののポイント数が多くなるにつれ計算負荷が高まるため、高速多重極法 (fast multipole method, FMM) が効率的な数値計算法として幅広く用いられている。高速多重極法の計算量は $O(M)$ でFFT法における計算量 $O(M \ln M)$ よりも小さく、更にFFT法と違って空間方向における格子点が等間隔でない場合も直接用いることが可能である。しかし [66] では金融工学において高速ガウス変換の使用は非効率な事が指摘されている。その理由としてFFT法を用いた場合と同等の精度をFGTを用いて得るには、より多くの空間格子点が必要となることが判明したためである。よって金融工学のPDE法では、FGTを含む高速多重極法の利用は実用的ではないという事が認知されてしまい、この論文以降PDE法における高速多重極法の利用例は確認されていない(多項格子モデルを用いた算出では、FGTの使用が効率化を向上させることが報告されている [17, 18])。しかし高速多重極法の研究自体は現在も活発であり、例えば高速ガウス変換の改善版である改良高速ガウス変換 (the improved fast Gauss Transform, IFGT) が近年開発された [112, 130]。本章における数値実験結果では、この改良高速ガウス変換を用いた法がFFT法よりも効率的にオプション価格を計算できることを確認する。

以降の本章の構成は以下の通りである。4.3節では改良高速ガウス変換を説明し、4.4節ではMerton型ジャンプ拡散モデルを導入する。4.5節ではこのモデルにおけるヨーロピアン・オプション価格の数値計算を改良高速ガウス変換を用いて行い、その効率性を検証する。4.6節では、2次元Merton型ジャンプ拡散モデルに改良高速ガウス変換を適用する。最後の4.7節では本章の総括を述べる。

4.3 改良高速ガウス変換

この節では改良高速ガウス変換 (improved fast Gauss transform、以下 IFGT と呼ぶ) の概要を説明する (詳細は [112] を参照)。(4.1) の計算は、例えば多数の粒子間におけるポテンシャルの相互作用を計測する際に表れるなど計算物理学において頻繁に表れる。ポイント数が少ない場合は直接計算して問題ないもののポイント数が多くなるにつれ計算負荷が高まるため、高速多重極法 (fast multipole method, FMM) が効率的な数値計算法として幅広く用いられている。基本的な考えは低いランクの行列の和として行列を解析的に近似するというシンプルなものである。改良高速ガウス変換の前身である高速ガウス変換 (FGT) は、カーネル関数 $K(x, y)$ がガウシアン・カーネル ($K(x, y) = e^{-\frac{1}{h^2}\|y-x\|^2}$) の時に用いられる FMM の一種であり、Greengard and Strain により提唱された [62]。この手法は直接計算するより効率的であるものの、FGT 計算に用いられる $e^{-\frac{1}{h^2}\|y_j-x_i\|^2}$ のエルミート展開の項数 p が、多次元の場合において計算量を $O(p^d(M_1 + M_2))$ と指数的に増加させてしまうという難点が指摘され、このような難点を克服するために開発されたのが改良高速ガウス変換 (IFGT) である [112, 130]。IFGT ではエルミート展開の代わりに多変量 Taylor 展開を用いており、この場合多次元の場合においても計算量が指数的に増加するのを防ぐことができるため、近年高速ガウス変換に代わり注目を浴びている。IFGT のスキームは [112] に詳細に書かれているが、IFGT の目的はあるエラーバウンド $\epsilon (> 0)$ が与えられた時に、 $F(y_j)$ の近似版 $\hat{F}(y_j)$ を以下の条件が満たされるように効率的に計算することである。

$$\max_j \frac{|F(y_j) - \hat{F}(y_j)|}{\sum_{i=1}^{M_1} |C_i|} < \epsilon$$

そのためにまず最遠点クラスタリング [55] を用いて、それぞれのポイントを L 個のクラスター S_l ($l = 1, 2, \dots, L$) に分類する。そしてそれぞれのクラスターの中心点 x_{*l} において、

$$e^{-\frac{1}{h^2}\|y_j-x_i\|^2} = e^{-\frac{1}{h^2}\|\Delta y_j\|^2} e^{-\frac{1}{h^2}\|\Delta x_i\|^2} e^{-\frac{2}{h^2}\Delta y_j \Delta x_i}$$

内の $e^{-\frac{2}{h^2}\Delta y_j \Delta x_i}$ に対して多変量 Taylor 展開を以下の通り行う。

$$e^{-\frac{2}{h^2}\Delta y_j \Delta x_i} \approx \sum_{\beta=0}^{p_i} \frac{2^\beta}{\beta!} \left(\frac{y_j - x_{*l}}{h}\right)^\beta \left(\frac{x_i - x_{*l}}{h}\right)^\beta$$

この p_i は各ソースポイント x_i に対して別々に設定することも可能である。すると

$$\hat{F}(y_j) = \sum_{l=1}^L \sum_{\beta=0}^{p_i} C'_\beta \cdot e^{-\frac{1}{h^2}\|y_j-x_{*l}\|^2} \left(\frac{y_j - x_{*l}}{h}\right)^\beta \quad (4.2)$$

と表され、

$$C'_\beta = \frac{2^\beta}{\beta!} \sum_{x_i \in S_l} C_i \cdot e^{-\frac{1}{h^2} \|x_i - x_{*l}\|^2} \left(\frac{x_i - x_{*l}}{h} \right)^\beta$$

である。更に $p_{\max} := \max_i p_i$ として指示関数を用いることにより (4.2) は以下のように表される。

$$\hat{F}(y_j) = \sum_{l=1}^L \sum_{|\beta| \leq p_{\max} - 1} C'_\beta \cdot e^{-\frac{1}{h^2} \|y_j - x_{*l}\|^2} \left(\frac{y_j - x_{*l}}{h} \right)^\beta,$$

$$C'_\beta = \frac{2^\beta}{\beta!} \sum_{x_i \in S_l} C_i \cdot e^{-\frac{1}{h^2} \|x_i - x_{*l}\|^2} \left(\frac{x_i - x_{*l}}{h} \right)^\beta \cdot 1_{|\beta| \leq p_i - 1}$$

$\hat{F}(y_j)$ の計算量は $O(M_2)$ 、 C'_β の計算量は $O(M_1)$ であるがこれらは別々に計算することができるため、トータルの計算量は $O(M_1 + M_2)$ となる。更にガウシアン・カーネルの場合 $\|y_j - x_i\|$ が大きくなるにつれて急減少するため、[112] ではターゲットポイント y_j より一定の距離 c_y^l (以下カットオフ半径と呼ぶ) 以上離れているクラスター内のポイントに関する計算は行わないことにすることで、より高速な計算を可能とした。この点を反映させると、(4.2) は更に以下のように表される。

$$\hat{F}(y_j) = \sum_{|y_j - x_{*l}| < c_y^l} \sum_{|\beta| \leq p_{\max} - 1} C'_\beta \cdot e^{-\frac{1}{h^2} \|y_j - x_{*l}\|^2} \left(\frac{y_j - x_{*l}}{h} \right)^\beta,$$

$$C'_\beta = \frac{2^\beta}{\beta!} \sum_{x_i \in S_l} C_i \cdot e^{-\frac{1}{h^2} \|x_i - x_{*l}\|^2} \left(\frac{x_i - x_{*l}}{h} \right)^\beta \cdot 1_{|\beta| \leq p_i - 1}$$

上記の計算に必要な L 、 p_i および c_y^l を選択するためのアルゴリズムの詳細は、[112] を参照していただきたい。また [112] では FGT と IFGT の違いについても詳細に説明されているが、本論文ではその中でも以下の2点を強調しておきたい。第一に、高速多重極法のアルゴリズムは多重極展開式および局所展開式を用いており、その一種である高速ガウス変換も同様である。しかしこの場合、二つの展開式の変換操作がアルゴリズム内と必要となり、その分の計算負荷も存在する。一方、改良高速ガウス変換に用いられる展開式は、多重極展開式および局所展開式両方の特性を持ち合わせているので変換操作を必要とせず、その分計算負荷を減らすことができる。次に、IFGT の展開式に用いられる項数は、FGT において同等なエラー・バウンドを達成するために必要な展開式の項数よりも少なく済む、ということである。これは [66] で指摘されている FGT を用いて精度の高いプライスを算出するには多大な格子点数が必要という問題点が、IFGT の場合には展開式の収束が速くなるため回避できる可能性があるのを示唆している。

4.4 1次元 Merton 型ジャンプ拡散モデル

リスク中立測度のもと原資産 S_t は Merton 型ジャンプ拡散モデル [102] に従うものとし、 $S_t = S_0 e^{X(t)}$ として表される。ここで $X(t)$ は

$$X(t) = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda\kappa\right)t + \sigma W(t) + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

と表され、 r はリスクフリー・レート、 σ はブラウン項のボラテリティ、 $N(t)$ は強度 λ のポアソン過程である。また $\kappa = E[e^Y] - 1$ とし、ジャンプサイズ Y_i の対数は平均 μ , 分散 γ^2 の以下の正規分布 $f(x)$ に従う。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\gamma^2}\right)$$

この時、満期 T のオプション価格 $V(S, t)$ 以下の偏微分積分方程式 (PIDE) を満たす [102]。

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 V^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - \lambda\kappa)S \frac{\partial V}{\partial S} - (r + \lambda)V + \lambda \int_{\mathcal{R}} V(Se^\eta, t) f(\eta) d\eta \quad (4.3)$$

ここで $\tau = T - t$ は満期までの時間を表す。更に $x = \ln\left(\frac{S}{K}\right)$, $v(x, \tau) = V(S, \tau)$ とすることにより PIDE は以下のように変換される。

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda\kappa\right) \frac{\partial v}{\partial x} - (r + \lambda)v + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} v(x+z, \tau) f(z) dz \quad (4.4)$$

K を行使価格とすると、ヨーロッパン・コールにおける初期条件は $v(x, 0) = \max(Ke^x - K, 0)$ 、境界条件は

$$v(x, \tau) \begin{cases} \rightarrow 0, & x \rightarrow -\infty, \\ \simeq Ke^x - Ke^{-r\tau}, & x \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

として与えられる。一方デジタル・コールにおける初期条件は $v(x, 0) = 1$ ($x > 0$ の場合)、境界条件は

$$v(x, \tau) \begin{cases} \rightarrow 0, & x \rightarrow -\infty, \\ \simeq e^{-r\tau}, & x \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

として与えられる。本論文では簡潔化のため上記2種類のオプション価格を改良高速ガウス変換を用いて計算するが、経路依存型などのエキゾチック・オプションも、付随した初期条件および境界条件を付加すれば同様に計算可能である。 M を空間方向の格子点数、 N を時間方向の格子点数とすると、クランク・ニコルソン法における (4.4) は $0 \leq i \leq M$, $0 \leq j \leq N$ として以下のように離散化される。

$$\frac{v_i^{j+1} - v_i^j}{\Delta \tau} = \frac{1}{2} D(v_i^{j+1} + v_i^j) + \lambda \cdot \text{Int}(x_i, t_j) \quad (4.5)$$

ここで $D(v_i^j)$ は微分項の離散型表現である。また $Int(x_i, t_j)$ は積分項の離散型表現であり、以下のように表される。

$$\begin{aligned} Int(x, \tau) &:= \frac{1}{2\pi\gamma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} v(s, \tau) \exp\left(-\frac{(s - (x - \mu))^2}{2\gamma^2}\right) ds \\ &\approx \frac{1}{2\pi\gamma^2} \sum_{i=0}^M v(s_i, \tau) \exp\left(-\frac{(s_i - (x - \mu))^2}{2\gamma^2}\right) w_i \Delta s \end{aligned}$$

ここで w_i はウェイト項で $Int(x_i, t_j)$ の積分近似法に依存した定数である。今回は簡潔化のため $Int(x_i, t_j)$ は陽的定式化するのでクランク・ニコルソン法は1次精度となるものの、[65, 66]における反復法などを用いて2次精度を保つことも可能である。本論文ではIFGTを用いて $Int(x_i, t_j)$ を数値計算していくが、従来用いられる効率的な手法としてはFFT法 [4, 65, 66, 125] が挙げられる。この手法自体はシンプルであり、順序としてはまず v にフーリエ変換が用いられ、次に f のフーリエ変換を v にフーリエ変換されたものが掛けられ、最後に逆フーリエ変換することにより $Int(x_i, t_j)$ が算出される。しかしサーベイの章で述べたとおり、この手法は各時間ステップにおいて高速フーリエ変換を2回必要とする。またラップ・アラウンド効果による影響を小さくするため、空間方向における計算区間を拡張する必要がある。更に空間方向における格子点が等間隔に分布していない場合は、FFT法を直接使うことができない。一方IFGTの場合は、各時間ステップにおいて1回のみ用いればよく、計算区間も拡張する必要がない。更に空間方向における格子点が等間隔でない場合も直接用いることができる。よってIFGTの場合、等間隔分布でない格子点を用いて更なる精度向上を図ることも可能であるが、本論文では簡潔化のため等間隔分布の格子点を用いることにする。

4.5 数値実験

IFGTの計算はフリーに配布されているC++コードを用いて行い¹、積分作用素 $Int(x, \tau)$ には台形近似を用いた。またエラー・バウンド ϵ は 10^{-6} とし、クラスターの数の上限は10に設定した。更に簡潔化のため、全ての格子点 i に対して $p_i = p_{\max}$ と固定している。また空間方向における格子点の分布は等間隔に固定しているため、IFGTの計算において必要な再遠点クラスタリングは初期ステップのみに実施した。またラップ・アラウンド効果を持つFFT法との比較を行うため、 $Int(x, \tau)$ の数値計算における空間方向の格子点数は 2^α としている (α は $M < 2^\alpha$ を満たす最小の整数)。また [102] における解析解を参照価格とした。また、使

¹このC++コードは以下のサイトにてダウンロード可能である。
<http://www.umiacs.umd.edu/labs/cvl/pirl/vikas/Software/software.html>

用したパラメータ値は $r = 0.05$ 、 $\sigma = 0.25$ 、 $\lambda = 0.1$ 、 $\mu = -0.9$ 、 $\gamma = 0.35$ 、 $T = 0.25$ 、 $K = 100$ である。

表 4.1 および表 4.2 はそれぞれヨーロピアン・コール・オプションおよびデジタル・コール・オプションにおける、IFGT 法と FFT 法の比較結果である。Max error は、IFGT 法または FFT 法を用いて計算した価格と参照価格との差異における、スポット価格が 90 以上 110 以下の範囲内での最大値を示している。また Ratio は、時間及び空間方向における格子点数を 2 倍にした時にかかる計算時間を比率として示している。更に Ratio(T) は、同格子点数における IFGT 法と FFT 法の計算時間の比率を示している。まず Max Error の数値から、有限差分法において IFGT 法および FFT 法共に概ね 1 次精度となっていることがわかる。また IFGT の場合設定された p_{\max} の値が精度に影響を与えていることがわかる。例えば小さい値 ($p_{\max} = 15$) では $Int(x, \tau)$ の精度は悪くなっており、この場合 M および N が増加しても Max Error は必ずしも減少していない。一方、大きい値 (ヨーロピアン・コールでは $p_{\max} = 20$ 、デジタル・コールでは $p_{\max} = 35$) の場合では同格子点数で FFT 法と同等の精度を得ることができている。これは [66] において指摘された FGT における問題点は IFGT を用いれば解消できることを示唆している。更に FFT 法に比べて IFGT 法は計算時間が短く、また Ratio(T) の値は全てのケースにおいて 2 以上であることから、FFT 法における高速フーリエ変換 1 回分にかかる計算時間と比較しても IFGT 法にかかる計算時間が短いことがわかる。よってこれらの結果より、IFGT 法は FFT 法よりも効率的な計算方法であることが判明した。

表 4.1: IFGT 法および FFT 法におけるヨーロッパン・コール評価

		IFGT 法 ($p_{\max}=15$)			FFT 法			
M	N	Max error	Time (sec)	Ratio	Max error	Time (sec)	Ratio	Ratio(T)
254	50	0.003335	0.015	-	0.003313	0.062	-	4.133
506	100	0.000878	0.062	4.133	0.000905	0.202	3.258	3.258
1010	200	0.000204	0.203	3.274	0.000172	0.889	4.401	4.379
2018	400	0.000097	0.839	4.133	0.000063	3.688	4.148	4.396
4034	800	0.000040	3.309	3.944	0.000021	15.844	4.296	4.788
8066	1600	0.000047	13.394	4.048	0.000012	68.314	4.312	5.100
		IFGT 法 ($p_{\max}=20$)			FFT 法			
254	50	0.003304	0.019	-	0.003313	0.062	-	3.263
506	100	0.000908	0.062	3.263	0.000905	0.202	3.258	3.258
1010	200	0.000166	0.265	4.274	0.000172	0.889	4.401	3.355
2018	400	0.000057	1.182	4.460	0.000063	3.688	4.148	3.120
4034	800	0.000023	4.275	3.617	0.000021	15.844	4.296	3.706
8066	1600	0.000011	16.330	3.820	0.000012	68.314	4.312	4.183
		IFGT 法 ($p_{\max}=25$)			FFT 法			
254	50	0.003304	0.031	-	0.003313	0.062	-	2.000
506	100	0.000908	0.074	2.387	0.000905	0.202	3.258	2.730
1010	200	0.000166	0.312	4.216	0.000172	0.889	4.401	2.849
2018	400	0.000057	1.212	3.885	0.000063	3.688	4.148	3.043
4034	800	0.000023	4.955	4.088	0.000021	15.844	4.296	3.198
8066	1600	0.000011	19.916	4.019	0.000012	68.314	4.312	3.430
		IFGT 法 ($p_{\max}=35$)			FFT 法			
254	50	0.003304	0.029	-	0.003313	0.062	-	2.138
506	100	0.000908	0.109	3.759	0.000905	0.202	3.258	1.853
1010	200	0.000166	0.418	3.835	0.000172	0.889	4.401	2.127
2018	400	0.000057	1.587	3.797	0.000063	3.688	4.148	2.324
4034	800	0.000023	6.446	4.062	0.000021	15.844	4.296	2.458
8066	1600	0.000011	24.972	3.874	0.000012	68.314	4.312	2.736
		IFGT 法 ($p_{\max}=45$)			FFT 法			
254	50	0.003304	0.031	-	0.003313	0.062	-	2.000
506	100	0.000908	0.124	4.000	0.000905	0.202	3.258	1.629
1010	200	0.000166	0.497	4.008	0.000172	0.889	4.401	1.789
2018	400	0.000057	1.975	3.974	0.000063	3.688	4.148	1.867
4034	800	0.000023	8.011	4.056	0.000021	15.844	4.296	1.978
8066	1600	0.000011	30.841	3.850	0.000012	68.314	4.312	2.215

表 4.2: IFGT 法および FFT 法におけるデジタル・コール評価

		IFGT 法 ($p_{\max}=15$)			FFT 法			
M	N	Max error	Time (sec)	Ratio	Max error	Time (sec)	Ratio	Ratio(T)
254	50	0.001953	0.015	-	0.002129	0.046	-	3.067
506	100	0.000551	0.062	4.133	0.000558	0.202	4.391	3.258
1010	200	0.000205	0.234	3.774	0.000139	0.860	4.257	3.675
2018	400	0.000303	0.794	3.393	0.000035	3.663	4.259	4.613
4034	800	0.000327	3.386	4.264	0.000009	15.459	4.220	4.566
8066	1600	0.000335	12.881	3.804	0.000002	66.850	4.324	5.190
		IFGT 法 ($p_{\max}=20$)			FFT 法			
254	50	0.002127	0.015	-	0.002129	0.046	-	3.067
506	100	0.000618	0.062	4.133	0.000558	0.202	4.391	3.258
1010	200	0.000197	0.264	4.258	0.000139	0.860	4.257	3.258
2018	400	0.000096	0.970	3.674	0.000035	3.663	4.259	3.776
4034	800	0.000070	4.156	4.285	0.000009	15.459	4.220	3.720
8066	1600	0.000063	16.409	3.948	0.000002	66.850	4.324	4.074
		IFGT 法 ($p_{\max}=25$)			FFT 法			
254	50	0.002121	0.015	-	0.002129	0.046	-	3.067
506	100	0.000548	0.078	5.200	0.000558	0.202	4.391	2.590
1010	200	0.000130	0.302	3.872	0.000139	0.860	4.257	2.848
2018	400	0.000034	1.148	3.801	0.000035	3.663	4.259	3.191
4034	800	0.000012	4.543	4.957	0.000009	15.459	4.220	3.403
8066	1600	0.000008	18.438	4.059	0.000002	66.850	4.324	3.626
		IFGT 法 ($p_{\max}=35$)			FFT 法			
254	50	0.002127	0.031	-	0.002129	0.046	-	1.484
506	100	0.000556	0.093	3.000	0.000558	0.202	4.391	2.172
1010	200	0.000137	0.405	4.355	0.000139	0.860	4.257	2.123
2018	400	0.000033	1.551	3.830	0.000035	3.663	4.259	2.362
4034	800	0.000009	5.948	3.835	0.000009	15.459	4.220	2.599
8066	1600	0.000003	25.253	4.246	0.000002	66.850	4.324	2.647
		IFGT 法 ($p_{\max}=45$)			FFT 法			
254	50	0.002128	0.031	-	0.002129	0.046	-	1.484
506	100	0.000558	0.124	4.000	0.000558	0.202	4.391	1.629
1010	200	0.000139	0.486	3.919	0.000139	0.860	4.257	1.770
2018	400	0.000035	1.949	4.010	0.000035	3.663	4.259	1.879
4034	800	0.000008	7.842	4.024	0.000009	15.459	4.220	1.971
8066	1600	0.000002	29.802	3.800	0.000002	66.850	4.324	2.243

表 4.3: IFGT 法におけるヨーロッパン・コールの Max error 値 ($M = 8066$, $N = 1600$)

p_{\max}	$\gamma=0.40$	$\gamma=0.35$	$\gamma=0.15$	$\gamma=0.05$	$\gamma=0.0001$
1	0.011004	0.002559	0.000119	0.000010	0.000010
5	0.021614	0.020654	0.004607	0.000010	0.000010
10	0.000765	0.002238	0.006046	0.000010	0.000010
20	0.000050	0.000011	0.006046	0.000010	0.000010
30	0.000050	0.000011	0.000264	0.000010	0.000010
40	0.000050	0.000011	0.000010	0.000010	0.000010
50	0.000050	0.000011	0.000010	0.000010	0.000010
60	0.000050	0.000011	0.000010	0.000010	0.000010
70	0.000050	0.000011	0.000010	0.000010	0.000010

表 4.4: IFGT 法におけるデジタル・コールの Max error 値 ($M = 8066$, $N = 1600$)

p_{\max}	$\gamma=0.40$	$\gamma=0.35$	$\gamma=0.15$	$\gamma=0.05$	$\gamma=0.0001$
1	0.000593	0.000639	0.000014	0.000002	0.000002
5	0.000336	0.001453	0.000268	0.000002	0.000002
10	0.000849	0.000981	0.000682	0.000002	0.000002
20	0.000085	0.000063	0.000484	0.000002	0.000002
30	0.000002	0.000006	0.000123	0.000002	0.000002
40	0.000002	0.000003	0.000007	0.000002	0.000002
50	0.000002	0.000002	0.000002	0.000002	0.000002
60	0.000002	0.000002	0.000002	0.000002	0.000002
70	0.000002	0.000002	0.000002	0.000002	0.000002

表 4.3 および表 4.4 はそれぞれヨーロッパン・コール・オプションおよびデジタル・コール・オプションにおける、 $Int(x, \tau)$ の評価に使われる γ の値を変更した場合の Max Error 値を示している。これらの表より、 γ の値が小さい場合 $Int(x, \tau)$ は急減少するため、その結果多変量 Taylor 展開の収束も早まることがわかる。例えば $\gamma = 0.05$ の場合ではヨーロッパンおよびコール・デジタル・コール共に $p_{\max} = 1$ で FFT 法と同等の精度を得られることがわかる。図 4.1 はデジタルコールの価格および感応度 (デルタ、ガンマ) のグラフであり、原資産に関して滑らかな関数であることを示唆している。本論文では 1 次元ジャンプ拡散モデルの一例としてマートン型ジャンプ拡散モデルを対象としたが、例えば IFGT を SVCJ モデル (stochastic volatility coherent jump model)[39] と呼ばれるボラテリティ変動型ジャンプ拡散モデルに適用することも可能である (詳細は付録 4.A を参照)。また、Kou 型ジャンプ拡散モデル [86] に IFGT への適用を試みることも興味深いものの、この場合既に IFGT と同等の計算量が可能となる手法が存在している (例えば [28] が挙げられるが、その詳細は付録 4.B を参照)。

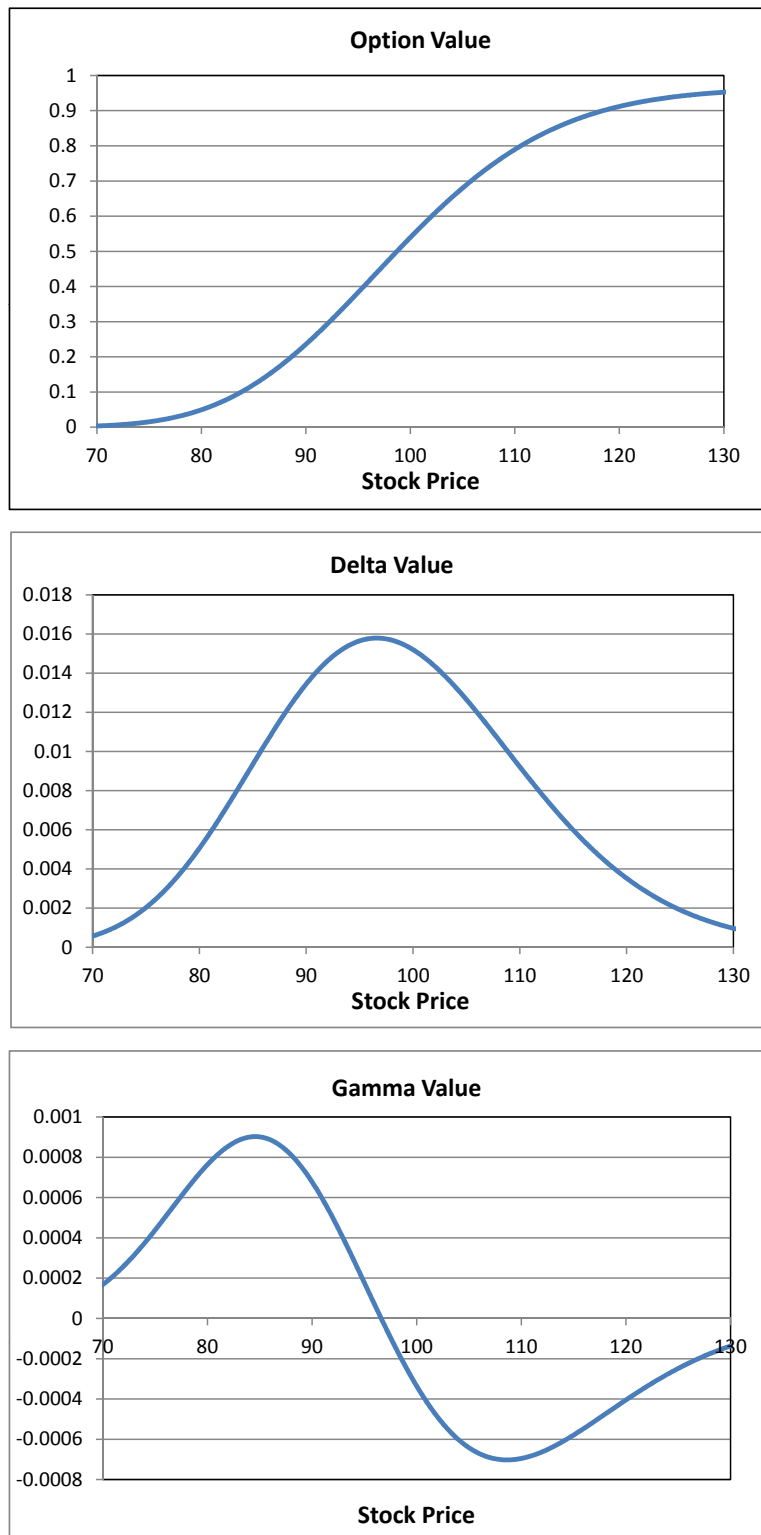


図 4.1: IFGT 法によるデジタル・コール価格および感応度

4.6 2次元マートン型ジャンプ拡散モデル

前節では1次元におけるマートン型ジャンプ拡散モデルを対象としていたが、IFGTを多次元のモデルに対して適用することも可能である。その一例として本節では[71]にて提唱された2次元マートン型ジャンプ拡散モデルを考える。違う点としては、[71]ではジャンプ・サイズの対数が非対称ラプラス分布に従うと仮定されていたが、本節では正規分布に従うものと仮定する。

リスク中立測度のもと原資産 S_1 および S_2 は $S_1(t) = S_1(0)e^{X_1(t)}$ 、 $S_2(t) = S_2(0)e^{X_2(t)}$ と表され、 $X_1(t)$ および $X_2(t)$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} X_1(t) &= \left(r - \frac{1}{2}\sigma_1^2 - \lambda\kappa_1\right)t + \sigma_1 W_1(t) + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i^{(1)}, \\ X_2(t) &= \left(r - \frac{1}{2}\sigma_2^2 - \lambda\kappa_2\right)t + \sigma_2[\rho W_1(t) + \sqrt{1-\rho^2}W_2(t)] + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i^{(2)} \end{aligned}$$

に従うものとする。ここで $\kappa_k = E[e^{Y^{(k)}}] - 1$ であり、 W_1 および W_2 は独立したブラウン運動、 ρ はその相関係数、そして $N(t)$ は強度 $\lambda = \lambda_c + \lambda_1 + \lambda_2$ のポアソン過程を表す。これは、各原資産のジャンプ頻度がそれぞれ強度 λ_1 および強度 λ_2 の独立したポアソン過程に従うと共に、強度 λ_c の共通ポアソン過程にも従う事を意味している。また $Y^{(1)}$ および $Y^{(2)}$ のジャンプの大きさは対数正規分布に従うものし、強度 λ_2 のポワソン・ジャンプが発生した場合 $Y^{(1)} = 0$ とする (同様に強度 λ_1 のポワソン・ジャンプが発生した場合 $Y^{(2)} = 0$ とする)。この時、 $(S_1(t), S_2(t))$ の無限小生成作用素 (infinitesimal generator) は以下のように与えられる [71]。

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}v &= \left(r - \frac{1}{2}\sigma_1^2 - \lambda\kappa_1\right) \frac{\partial v}{\partial x_1} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma_2^2 - \lambda\kappa_2\right) \frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \rho\sigma_1\sigma_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x_1\partial x_2} \\ &+ \lambda_c \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \tau) f_{Y^{(1)}, Y^{(2)}}^C(y_1, y_2) dy_1 dy_2 - \lambda_c v(x_1, x_2, \tau) \\ &+ \lambda_1 \int_{-\infty}^{+\infty} v(x_1 + y_1, x_2, \tau) f_{Y^{(1)}}^C(y_1) dy_1 - \lambda_1 v(x_1, x_2, \tau) \\ &+ \lambda_2 \int_{-\infty}^{+\infty} v(x_1, x_2 + y_2, \tau) f_{Y^{(2)}}^C(y_2) dy_2 - \lambda_2 v(x_1, x_2, \tau) \end{aligned}$$

ここで $f_{Y^{(1)}, Y^{(2)}}^C$ は、以下の平均 m_c および分散 J_c の2次元正規分布である。

$$m_c = \begin{pmatrix} m_{1,c} \\ m_{2,c} \end{pmatrix}, J_c = \begin{pmatrix} \nu_{1,c}^2 & \rho_c \nu_{1,c} \nu_{2,c} \\ \rho_c \nu_{1,c} \nu_{2,c} & \nu_{2,c}^2 \end{pmatrix}$$

そして $f_{Y^{(1)}}^C$ 、 $f_{Y^{(2)}}^C$ はそれぞれ平均 m_1 、 m_2 、分散 ν_1^2 、 ν_2^2 の正規分布である。この時 $x_1 = \ln\left(\frac{S_1}{K}\right)$ および $x_2 = \ln\left(\frac{S_2}{K}\right)$ (K はストライク価格) とすれば、オプション価値 V は以下の積分

偏微分方程式 (PIDE) を満たす [34]。

$$V_\tau - \mathfrak{S}V + rV = 0$$

この2次元PIDEを数値計算して解くため、本論文では簡潔化のため以下のダグラス・ラッチフォード法 [38] と呼ばれる、最もシンプルなADI法を用いることにする。

$$\begin{aligned} (1 - \theta A_1)Y &= [1 + A_0 + (1 - \theta)A_1 + A_2]V^n, \\ (1 - \theta A_2)V^{n+1} &= Y - \theta A_2 V^n \end{aligned}$$

ここで A_0 は混合微分作用素および積分作用素の離散形を含み、 A_1 は x_1 に関する微分作用素、 A_2 は x_2 に関する微分作用素の離散形を指す。また1次元の場合と同様、積分作用素は陽的定式化する。ダグラス・ラッチフォード法は1次精度であり、各時間離散点 n において Y および V^{n+1} は、有名なトーマスのアルゴリズムを用いて計算される。また簡潔化のため $\theta = 0.5$ と設定し、空間方向における格子点は等間隔分布に固定する。また本論文では更なる簡潔化のため $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ とすると、各時点 n において以下の積分作用素を数値計算する必要がある。

$$\begin{aligned} Int(x_1, x_2, \tau) &:= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \tau) f^C_{Y^{(1)}, Y^{(2)}}(y_1, y_2) dy_1 dy_2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v(s_1, s_2, \tau) f^C(s_1 - x_1, s_2 - x_2) ds_1 ds_2 \end{aligned}$$

ここで $f^C(s_1 - x_1, s_2 - x_2)$ は以下のように与えられる。

$$\frac{1}{2\pi\nu_{1,c}\nu_{2,c}\sqrt{1-\rho_c^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho_c^2)} \left[\frac{(s_1 - (x_1 + m_{1,c}))^2}{\nu_{1,c}^2} + \frac{(s_2 - (x_2 + m_{2,c}))^2}{\nu_{2,c}^2} - 2\rho_c \frac{(s_1 - (x_1 + m_{1,c}))(s_2 - (x_2 + m_{2,c}))}{\nu_{1,c}\nu_{2,c}} \right]\right)$$

そして以下のように変形 (導出は付録4.Cを参照) することで、IFGTが適用可能となる。

$$v(s_1, s_2, \tau) \cdot \exp\left(-\frac{(s_1 - (x_1 + m_{1,c}))^2 + (s_2' - (x_2' + m_{2,c}'))^2 + (s_3'(s_1, s_2) - (x_3'(x_1, x_2) + m_{3,c}'))^2}{2\nu_{1,c}^2(1 + |\rho_c|)}\right)$$

ここで

$$\begin{aligned} x_2' &:= \frac{\nu_{1,c}}{\nu_{2,c}} x_2, \quad s_2' := \frac{\nu_{1,c}}{\nu_{2,c}} s_2, \quad m_{2,c}' := \frac{\nu_{1,c}}{\nu_{2,c}} m_{2,c}, \\ x_3'(x_1, x_2) &:= \sqrt{\frac{|\rho_c|}{1-|\rho_c|}} x_1 - \operatorname{sgn}(\rho_c) \cdot \sqrt{\frac{|\rho_c|}{1-|\rho_c|}} x_2', \\ s_3'(s_1, s_2) &:= \sqrt{\frac{|\rho_c|}{1-|\rho_c|}} s_1 - \operatorname{sgn}(\rho_c) \cdot \sqrt{\frac{|\rho_c|}{1-|\rho_c|}} s_2', \\ m_{3,c}' &:= \sqrt{\frac{|\rho_c|}{1-|\rho_c|}} m_{1,c} - \operatorname{sgn}(\rho_c) \cdot \sqrt{\frac{|\rho_c|}{1-|\rho_c|}} m_{2,c}' \end{aligned}$$

表 4.5: IFGT および FFT 法におけるバスケット・コール評価

		IFGT 法 ($p_{\max}=1$)			FFT 法			
M	N	Price	Time (sec)	Ratio	Price	Time (sec)	Ratio	Ratio(T)
61	32	2.040948	0.390	-	2.041042	0.933	-	2.392
123	64	2.067723	3.024	7.754	2.067734	7.399	7.930	2.447
247	128	2.072201	22.720	7.513	2.072202	63.020	8.517	2.774
495	256	2.073188	185.689	8.173	2.073188	561.027	8.902	3.021

となる。表 4.5 はバスケット・コール・オプション価格 (ペイオフ関数は $\max(Ke^{x_1} + Ke^{x_2} - K, 0)$) における、IFGT 法と FFT 法の比較結果である。使用したパラメータ値は $r = 0.05$ 、 $\sigma_1 = 0.15$ 、 $\sigma_2 = 0.15$ 、 $\rho = -0.5$ 、 $\lambda = 0.1$ 、 $m_{1,c} = -1.00$ 、 $\nu_{1,c} = 0.45$ 、 $m_{2,c} = -0.75$ 、 $\nu_{2,c} = 0.40$ 、 $\rho_c = -0.5$ 、 $S_1(0) = S_2(0) = 50$ 、 $T = 0.15$ 、 $K = 100$ とし、参照価格は 2.073939 とし、これはモンテカルロ法 [56] によってソボル数列による百万回のパスから生成された値である。 $Int(x_1, x_2, \tau)$ は 2 次元台数近似を使用し、エラー・バウンド ϵ およびクラスター数の上限は 1 次元の場合と同じ値に設定した。

1 次元の場合と同様、積分作用素は陽的定式化されているため、Max Error の数値より概ね 1 次精度となっていることがわかる。また IFGT 法は FFT 法と同等の精度保たれており、計算時間も早いことがわかる。ここで注意すべき点は $p_{\max} = 1$ で FFT 法と同等の精度を得られていることである。これは、2 次元の場合は被積分関数が 1 次元の場合と比較してより急減少するため、IFGT 法に用いられる多変量 Taylor 展開の収束もより早くなることが原因である。この傾向は $\rho_c = 0.5$ と固定して、 $\nu_{1,c}$ の値を 0.1 から 0.7 の範囲で変化させた場合でも同じであった。図 4.2 はスプレッド・コール (ペイオフ関数は $\max(Ke^{x_2} - Ke^{x_1} - K, 0)$) の価格および感応度 (デルタ、ガンマ) のグラフであり、原資産に関して滑らかな関数であることを示唆している (使用したパラメータ値は、 $r = 0.05$ 、 $\sigma_1 = 0.15$ 、 $\sigma_2 = 0.15$ 、 $\rho = -0.5$ 、 $\lambda = 0.1$ 、 $m_{1,c} = -1.00$ 、 $\nu_{1,c} = 0.45$ 、 $m_{2,c} = -0.75$ 、 $\nu_{2,c} = 0.40$ 、 $\rho_c = -0.5$ 、 $T = 0.15$ 、 $K = 4$)。

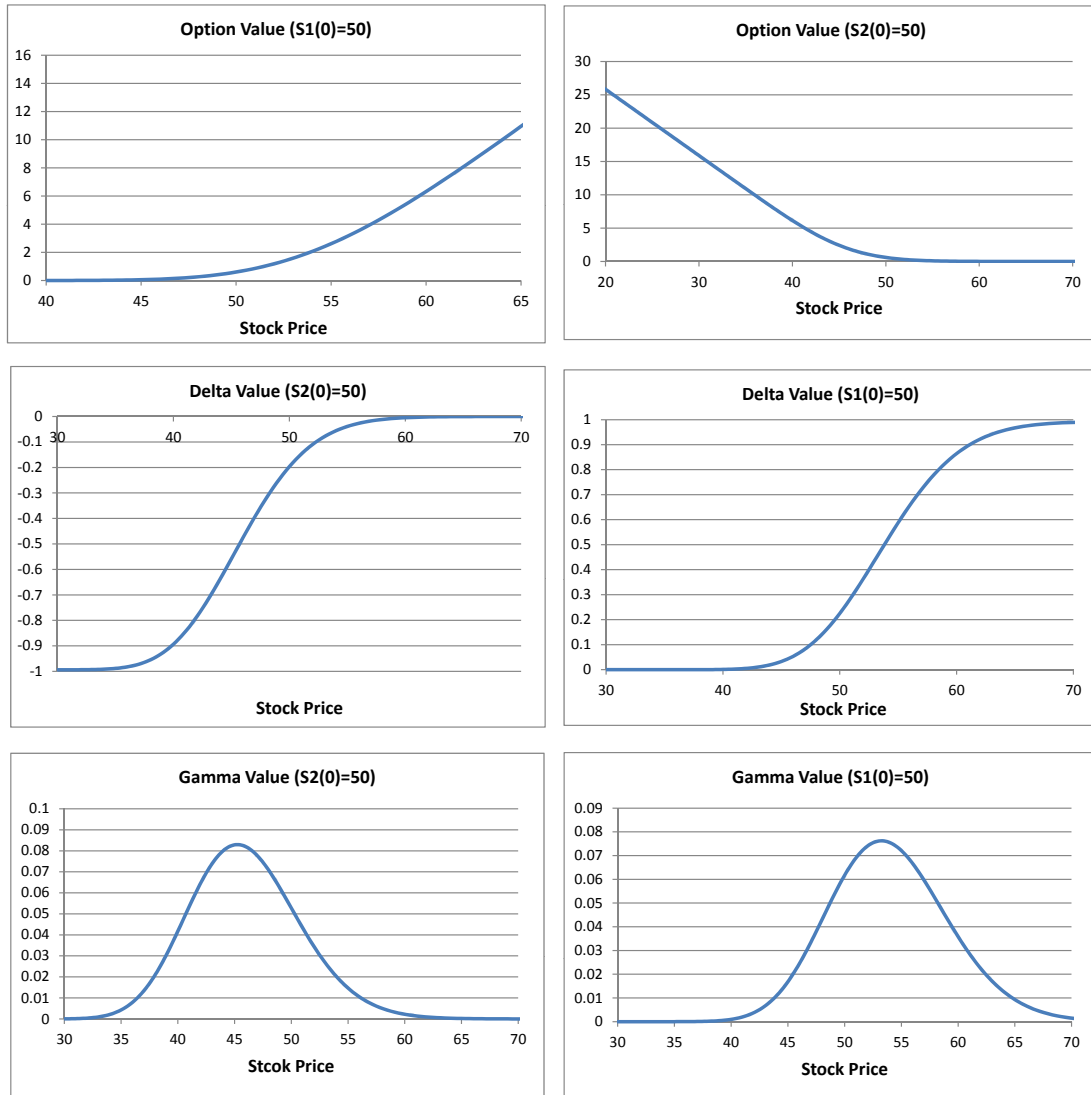


図 4.2: IFGT 法によるスプレッド・コール価格および感応度

4.7 第4章のまとめ

本章ではマートン型ジャンプ拡散モデルのもと、PDE法によるオプション評価においてIFGTを適用した。実装は簡潔であり、数値実験によるとIFGT法はFFT法と比較して計算時間が早く、同等の精度を得ることができた。また各格子点のオプション価格を用いて各リスク指標の近似解を容易に計算することができるため、ジャンプ・モデルにおけるリスク管理の効率性向上にもつながる。今回は簡潔化のため、均等に分布された空間格子点のもと1次元の場合はクランク・ニコルソン法、2次元の場合グラス・ラッチフォード法を用いている。しかし不均等な空間格子点の下で不均一なより高精度なADI手法[32, 74]を用いれば更なる効率化が期待できる上に、このような状況でもIFGTは簡単に適用可能である。IFGTの欠点としては、基本的にガウシアン・カーネルを用いるマートン型ジャンプ拡散モデルにのみ適用可能であるということである。他のジャンプモデルにおける代替案としては、カーネル関数に依存しない高速多重極法[53, 132]を用いることが挙げられる。このように高速多重極法は、金融工学の分野でもPDE法の効率化において有効なツールとなる事が期待されるが、より詳細な検証は今後の研究課題とする。

付録 4.A SVCJ モデルにおける IFGT の適用

リスク中立測度のもと原資産 S_t は SVCJ モデル (stochastic volatility coherent jump model) [39, 50] に従うとし、 $S_t = S_0 e^{X(t)}$ として表される。ここで $X(t)$ は以下のように表される。

$$\begin{aligned} X_t &= \left(u - \frac{1}{2}V_{t-}\right)dt + \sqrt{V_{t-}}dW_{1t} + dJ_t, \\ V_t &= \kappa(\theta - V_{t-})dt + \xi\sqrt{V_{t-}}dW_{2t} + dJ_t^v \end{aligned}$$

ここで (J_t, J_t^v) は 2次元ジャンプ過程、 W_{1t} および W_{2t} はブラウン運動を表す。また $dW_{1t}dW_{2t} = \rho dt$ であり、 κ は平均回帰パラメータ、 ξ は V_t のボラテリティ・パラメータを表す。この時、過程 (X_t, V_t) の無限小生成作用素 (infinitesimal generator) は以下のように与えられる [50]。

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}f &:= \left(u - \frac{1}{2}v\right)\frac{\partial f}{\partial x} + \kappa(\theta - v)\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{1}{2}v\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\xi^2v\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{1}{2}\rho\xi v\frac{\partial^2 f}{\partial xv} \\ &+ \lambda \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+x_1, v+v_1)p(x_1, v_1) dx_1 dv_1 - \lambda f(x, v) \end{aligned} \quad (4.6)$$

ここで $p(x_1, v_1)$ は 2次元正規分布であり、

$$p(x_1, v_1) = \frac{1}{\nu\sqrt{2\pi s^2}} \exp\left(-\frac{v_1}{\nu} - \frac{(x_1 - m - \rho_J v_1)^2}{2s^2}\right)$$

と表される。これは V_t のジャンプ・サイズが v_1 の場合ジャンプ・サイズ X_t は平均 $m + \rho_J v_1$ 、分散 s^2 の正規分布に従うことを意味してる。この時オプション価格 F は以下の偏微分積分方程式 (PIDE) を満たす [34]。

$$F_\tau - \mathfrak{S}F + rF = 0$$

この場合 2次元の積分を評価する必要があるが、以下のように (4.6) の積分作用素を書き直せば PDE 法で IFGT が適用可能となる。

$$\frac{\lambda}{\nu\sqrt{2\pi s^2}} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{v_1}{\nu}\right) f(x_1, v_1) \exp\left(-\frac{(x'(x, v) - (x'(x_1, v_1) + m))^2}{2s^2}\right) dx_1 dv_1$$

ここで $x'(x, v) := x - \rho_J v$ である。このように適用可能であるものの、一般的に s の値は小さいことが予想される (例えば [39] におけるキャリブレーション結果では $s = 0.0001$)。このように s が小さい場合 $\exp\left(-\frac{(x'(x, v) - (x'(x_1, v_1) + m))^2}{2s^2}\right)$ は急減少するため、単純に各 (x, v) 近傍における (x_1, v_1) の被積分値をいくつか足すことで、十分に精度の良い積分作用素の近似値が得られる。この手法の方が IFGT 法より効率的である。

付録 4.B Kou型ジャンプ拡散モデル

Kou型ジャンプ拡散モデルの下PDE法を用いてオプション価格を計算する場合、以下の積分作用素を数値計算する必要がある(モデルの詳細に関しては[86]を参照)。

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} v(x+z, \tau) f(z) dz &= A_1 \int_{-\infty}^0 v(x+z, \tau) e^{G_1 z} dz + A_2 \int_0^{+\infty} v(x+z, \tau) e^{-G_2 z} dz \\ &= A_1 e^{-G_1 x} \int_{-\infty}^x v(s, \tau) e^{G_1 s} ds + A_2 e^{G_2 x} \int_x^{+\infty} v(s, \tau) e^{-G_2 s} ds \quad (4.7) \end{aligned}$$

ここで A_1 、 A_2 、 G_1 、 G_2 はスカラー定数である。このモデルに関しては、すでにIFGT法と同等の計算量を持つ手法が存在する。一例として、以下[28]の手法を紹介する。まず(4.7)の右辺の第2項目を、以下のように変形する(第1項は第2項と同様に計算できるため、ここでは第2項のみを考える)。

$$A_2 e^{G_2 x} \int_x^{+\infty} v(s, \tau) e^{-G_2 s} ds = A_2 e^{G_2 x} \int_0^{+\infty} v(s, \tau) e^{-G_2 s} ds - A_2 e^{G_2 x} \int_0^x v(s, \tau) e^{-G_2 s} ds \quad (4.8)$$

(4.8)の不变の第1項目はPDE法を数値計算した場合、初期時点のみに計算すれば良い。第2項目に関しては以下のように再帰的に計算することで計算量のオーダーは1次となる(w_i は積分近似法に依存したウェイト係数)。

$$\int_0^{x_{i+1}} v(s, \tau) e^{-G_2 s} ds = \int_0^{x_i} v(s, \tau) e^{-G_2 s} ds + v(x_{i+1}, \tau) e^{-G_2 x_{i+1}} w_{i+1} \Delta s,$$

付録 4.C 2次元マーソン型ジャンプ拡散モデルにおけるIFGTの適用

まず $\rho_c \geq 0$ のケースを考える。すると

$$\begin{aligned}
& \frac{(s_1 - (x_1 + m_{1,c}))^2}{\nu_{1,c}^2} + \frac{(s_2 - (x_2 + m_{2,c}))^2}{\nu_{2,c}^2} - 2\rho_c \frac{(s_1 - (x_1 + m_{1,c}))(s_2 - (x_2 + m_{2,c}))}{\nu_{1,c}\nu_{2,c}} \\
&= \frac{1 - \rho_c}{\nu_{1,c}^2} [s_1 - (x_1 + m_{1,c})]^2 + \frac{1 - \rho_c}{\nu_{2,c}^2} [s_2 - (x_2 + m_{2,c})]^2 + \rho_c \left[\frac{(s_1 - (x_1 + m_{1,c}))}{\nu_{1,c}} - \frac{(s_2 - (x_2 + m_{2,c}))}{\nu_{2,c}} \right]^2 \\
&= \frac{1 - \rho_c}{\nu_{1,c}^2} [s_1 - (x_1 + m_{1,c})]^2 + \frac{1 - \rho_c}{\nu_{1,c}^2} \left[\frac{\nu_{1,c}}{\nu_{2,c}} s_2 - \left(\frac{\nu_{1,c}}{\nu_{2,c}} x_2 + \frac{\nu_{1,c}}{\nu_{2,c}} m_{2,c} \right) \right]^2 \\
&+ \frac{1 - \rho_c}{\nu_{1,c}^2} \left[\nu_{1,c} \sqrt{\frac{\rho_c}{1 - \rho_c}} \frac{(s_1 - (x_1 + m_{1,c}))}{\nu_{1,c}} - \nu_{1,c} \sqrt{\frac{\rho_c}{1 - \rho_c}} \frac{(s_2 - (x_2 + m_{2,c}))}{\nu_{2,c}} \right]^2 \\
&:= \frac{1 - \rho_c}{\nu_{1,c}^2} [s_1 - (x_1 + m_{1,c})]^2 + \frac{1 - \rho_c}{\nu_{1,c}^2} [s'_2 - (x'_2 + m'_{2,c})]^2 + \frac{1 - \rho_c}{\nu_{1,c}^2} [s'_3(s_1, s_2) - (x'_3(x_1, x_2) + m'_{3,c})]^2
\end{aligned}$$

であるので、積分作用素における被積分項は

$$v(s_1, s_2, \tau) \cdot \exp\left(-\frac{(s_1 - (x_1 + m_{1,c}))^2 + (s'_2 - (x'_2 + m'_{2,c}))^2 + (s'_3(s_1, s_2) - (x'_3(x_1, x_2) + m'_{3,c}))^2}{2\nu_{1,c}^2(1 + \rho_c)}\right)$$

と表される。ここで

$$\begin{aligned}
x'_2 &:= \frac{\nu_{1,c}}{\nu_{2,c}} x_2, & s'_2 &:= \frac{\nu_{1,c}}{\nu_{2,c}} s_2, & m_{2,c}' &:= \frac{\nu_{1,c}}{\nu_{2,c}} m_{2,c}, \\
x'_3(x_1, x_2) &:= \sqrt{\frac{\rho_c}{1 - \rho_c}} x_1 - \sqrt{\frac{\rho_c}{1 - \rho_c}} x'_2, \\
s'_3(s_1, s_2) &:= \sqrt{\frac{\rho_c}{1 - \rho_c}} s_1 - \sqrt{\frac{\rho_c}{1 - \rho_c}} s'_2, \\
m_{3,c}' &:= \sqrt{\frac{\rho_c}{1 - \rho_c}} m_{1,c} - \sqrt{\frac{\rho_c}{1 - \rho_c}} m'_{2,c}
\end{aligned}$$

また $\rho_c < 0$ の場合に関しても同様にして

$$v(s_1, s_2, \tau) \cdot \exp\left(-\frac{(s_1 - (x_1 + m_{1,c}))^2 + (s'_2 - (x'_2 + m'_{2,c}))^2 + (s'_3(s_1, s_2) - (x'_3(x_1, x_2) + m'_{3,c}))^2}{2\nu_{1,c}^2(1 - \rho_c)}\right)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
x'_3(x_1, x_2) &:= \sqrt{\frac{|\rho_c|}{1 - |\rho_c|}} x_1 + \sqrt{\frac{|\rho_c|}{1 - |\rho_c|}} x'_2, \\
s'_3(s_1, s_2) &:= \sqrt{\frac{|\rho_c|}{1 - |\rho_c|}} s_1 + \sqrt{\frac{|\rho_c|}{1 - |\rho_c|}} s'_2, \\
m_{3,c}' &:= \sqrt{\frac{|\rho_c|}{1 - |\rho_c|}} m_{1,c} + \sqrt{\frac{|\rho_c|}{1 - |\rho_c|}} m'_{2,c}.
\end{aligned}$$

である。よってこの2つのケースを考慮すると結局

$$v(s_1, s_2, \tau) \cdot \exp\left(-\frac{(s_1 - (x_1 + m_{1,c}))^2 + (s'_2 - (x'_2 + m'_{2,c}))^2 + (s'_3(s_1, s_2) - (x'_3(x_1, x_2) + m'_{3,c}))^2}{2\nu_{1,c}^2(1 + |\rho_c|)}\right),$$

として表されることがわかる。ここで

$$\begin{aligned}
 x_2' &:= \frac{\nu_{1,c}}{\nu_{2,c}} x_2, & s_2' &:= \frac{\nu_{1,c}}{\nu_{2,c}} s_2, & m_{2,c}' &:= \frac{\nu_{1,c}}{\nu_{2,c}} m_{2,c}, \\
 x_3'(x_1, x_2) &:= \sqrt{\frac{|\rho_c|}{1-|\rho_c|}} x_1 - \operatorname{sgn}(\rho_c) \cdot \sqrt{\frac{|\rho_c|}{1-|\rho_c|}} x_2', \\
 s_3'(s_1, s_2) &:= \sqrt{\frac{|\rho_c|}{1-|\rho_c|}} s_1 - \operatorname{sgn}(\rho_c) \cdot \sqrt{\frac{|\rho_c|}{1-|\rho_c|}} s_2', \\
 m_{3,c}' &:= \sqrt{\frac{|\rho_c|}{1-|\rho_c|}} m_{1,c} - \operatorname{sgn}(\rho_c) \cdot \sqrt{\frac{|\rho_c|}{1-|\rho_c|}} m_{2,c}'
 \end{aligned}$$

である。

第5章 PDE法におけるカルテシアン・ツリー法を用いた評価の高速化

5.1 概要

ツリー法は計算物理学における効率的手法として用いられているものの、これまでの金融工学の分野における注目度は高くはない。一方近年 Black-scholes モデルの拡張版として原資産のジャンプ過程を考慮したジャンプ・モデルの研究が注目を浴びているものの、PDE法を用いてオプション価格を求める場合に積分作用素の計算負荷が問題となる。本章ではカルテシアン・ツリー法と呼ばれるツリー法を用いてこの積分作用素を効率的に計算する方法を提唱する。

5.2 本章の背景及び構成

ジャンプ・モデルにおけるオプション価格の計算にはモンテカルロ法またはPDE法を用いるのが一般的である (Kou 型ジャンプ拡散モデルの場合には一部の経路依存型オプションに対しても解析解が存在する)。しかしモンテカルロ法は一般的に計算時間がかかり、またPDE法においても積分作用素を数値計算する必要があるため、Black-Scholes モデルにおけるPDE法の場合よりも計算時間がかかる。よってPDE法においてはFFT法と呼ばれる高速フーリエ変換を用いた手法が一般的に用いられるものの、この手法を直接用いるには等間隔の空間における格子点が必要となる事や、各時間離散点ごとに2回の高速フーリエ変換を必要とするなどの問題点がある。前章では改良高速ガウス変換と呼ばれる手法を用いて、マートン型ジャンプ拡散モデルにおける効率的PDE法を提唱した。しかし他のモデルの場合には改良高速ガウス変換を用いることはできないため、本章ではカルテシア・ツリー法と呼ばれるツリー法を用いたジャンプ・モデルにおける効率的PDE法を提唱する。ツリー法は高速多重極法と同様に計算物理学の分野では効率的計算手法としてよく用いられている。

以降の本章の構成は以下の通りである。5.3節ではカルテシアン・ツリー法を説明し、5.4節ではカルテシアン・ツリー法をPDE法に適用する。5.5節ではヨーロッパ・オプション

価格の数値計算をカルテシアン・ツリー法を用いて行い、その効率性を検証する。最後の5.6節では本章の総括を述べる。

5.3 カルテシアン・ツリー法

この節ではカルテシアン・ツリー法 [92] の概要を説明する。一般にツリー法は、前章にて紹介された高速多重極法と同様、多体問題(一分子内の原子間のクーロン力や一銀河内の惑星同士の重力作用など)における相互作用を研究する際に効率的な数値計算法である。具体的には以下のような計算を効率的に行うことが可能となる。

$$F(x_i) = \sum_{j=1}^M C_j \cdot K(x_i, z_j). \quad (5.1)$$

カルテシアン・ツリー法はカーネル関数 $K(x, z)$ が湯川ポテンシャル

$$K(x, z) := \frac{e^{-\kappa|z-x|}}{|z-x|}$$

の場合に (5.1) を効率的に計算するツリー法の一種である。ツリー法などを用いずに直接 (5.1) を計算しようとする、それぞれの x_i に対し M 解の和算をする必要があるため計算量は $O(M^2)$ となり、計算負荷が大きい。ツリー法の基本的なアイデアとしては、銀河系の多体問題を例にするとわかりやすい。例えばある惑星とある銀河の距離が大きい場合、銀河内の惑星それぞれの重力の影響を考慮する代わりに、銀河を一つの大きな惑星とみなして相互作用をシンプルに計算して効率化を図ることである。具体的には、もし D/r (D はある銀河の大きさ、 r はその銀河の中心から惑星までの距離) が小さければ、その銀河を質量が銀河内の惑星の質量の和である一つの惑星とみなして計算するということである。要するに遠くの銀河はシンプルに一つの惑星とみなしてしまうという事であり、この考えを再帰的に用いることによりツリー法は計算量を $O(M^2)$ から $O(M \ln M)$ まで減らすことが可能となる。カルテシアン・ツリー法では、Barnes-Hut ツリー法 [7] を用いてクラスター階層を構築し、湯川ポテンシャルの多重極展開における係数を再帰的に計算することにより、効率化を可能としている。一方、高速多重極法 [13, 60, 61] は多重極展開に加えて局所展開を用いることにより更に計算量を $O(M \ln M)$ から $O(M)$ まで減らすことを可能としているものの、複雑なアルゴリズムであるため実際の計算時間は想定よりかかることもある。一方、ツリー法は多重極展開のみを用いているので容易に実装可能である。この結果、実際の多体問題におけるシミュレーションではツリー法が用いられることが多い。

カルテシアン・ツリー法の基本的なスキームは以下の通りである (詳細は [92] を参照)。まずポイントを Barnes-Hut アルゴリズム [7] によってクラスター階層 c 's に分類したあと、 $K(x_i, z_j)$ をクラスター・ポイント z_c に対して多重極展開する。

$$F(x_j) = \sum_c F_c(x_j), F_c(x_j) = \sum_{z_i \in c} C_i \cdot K(z_i, x_j). \quad (5.2)$$

$$K(x_i, z_j) = \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} \frac{\partial^k K(x_i, z)}{\partial z^k} \Big|_{z=z_c} (z_j - z_c)^k \quad (5.3)$$

(5.3) を (5.2) に代入すれば

$$\begin{aligned} F_c(x_i) &= \sum_{z_j \in c} C_j \cdot \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} \frac{\partial^k K(x_i, z)}{\partial z^k} \Big|_{z=z_c} (z_j - z_c)^k \\ &= \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} \frac{\partial^k K(x_i, z)}{\partial z^k} \Big|_{z=z_c} \sum_{z_j \in c} C_j (z_j - z_c)^k := \sum_{k=0}^p L_k(x_i, z_c) M_{c,k} \end{aligned}$$

となる。ここで $L_k(x_i, z_c)$ は z_j と独立、 $M_{c,k}$ は x_i と独立であるため、別々に計算することが可能となる。また係数 $L_k(x_i, z_c)$ を再帰的に計算することで更なる効率化が図れる。次に、それぞれのクラスター c に対して条件 $\frac{r}{R} \leq \theta$ を満たせば、上記の多重極展開が用いられる。ここで θ は多重極採択基準 (Multipole Acceptance Criterion、MAC)、 r はクラスターの半径、 R は x_i からクラスター c までの距離を指す。この条件が満たされない場合は、クラスター c の下の階層のクラスターに対してこの条件を満たすか判定し、最終的にこの条件を満たさない残ったクラスターに対しては、多重極展開を用いずに直接和を計算する。

5.4 PDE 法への適用

リスク中立測度のもと原資産 S_t は $S_t = S_0 e^{X(t)}$ と表され、 $X(t)$ は (2.1) を満たすものとする。この時オプション価格 $V(S, t)$ は以下の偏微分積分方程式 (PIDE) を満たす (導出に関する詳細は [34] などを参照)。

$$V_t = \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 V_{SS} + r S V_S - r V + \int_R [V(S e^z, t) - V(S, t) - S(e^z - 1) V_S] f(z) dz$$

ここで $\omega = \int_R (1 - e^z) f(z) dz$ であり、 r はリスクフリー・レート、 t は満期までの時間、 $f(z)$ はレヴィ密度関数である。更に K を行使価格として $x = \ln(S/K)$ とすると、

$$V_t = \frac{1}{2} \sigma^2 V_{xx} + r V_x - r V + \int_R [V(x+z, t) - V(x, t) - (e^z - 1) V_x(x, t)] f(z) dz$$

となる。 K を行使価格とすると、ヨーロッパン・コールにおける初期条件は $v(x, 0) = \max(K e^x - K, 0)$ 、境界条件は

$$v(x, \tau) \begin{cases} \rightarrow 0, & x \rightarrow -\infty, \\ \simeq K e^x - K e^{-r\tau}, & x \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

として与えられる。本論文では簡潔化のためヨーロピアン・コール・オプションのみの価格をカルテシアン・ツリー法を用いて計算するが、経路依存型などのエキゾチック・オプションも同様に計算可能である。本章ではジャンプ・モデルの例としてCGMYモデル [22, 128] およびバリアンス・ガンマ・モデル [52, 70, 97] を考える。CGMYモデルの場合 $f(z)$ は

$$f(z) = C \frac{e^{-G|z|}}{|z|^{1+Y}} \cdot 1_{z<0} + C \frac{e^{-Hz}}{z^{1+Y}} \cdot 1_{z>0}$$

で与えられ ($C > 0$, $G \geq 0$, $H \geq 0$, $Y < 2$)、 $Y < 1$ の場合有限変分であるが $1 < Y < 2$ では無限変分となる。バリアンス・ガンマ・モデルは $Y = 0$ の特別な場合を指す。本論文ではこの二つのモデルを対象とするものの、以下の Tempered stable モデル [34] ような、より一般化されたジャンプ・モデルを対象とすることも可能である ($C_1, C_2 > 0$, $Y_1, Y_2 < 2$)。

$$f_\alpha(z) = C_1 \frac{e^{-G|z|}}{|z|^{1+Y_1}} \cdot 1_{z<0} + C_2 \frac{e^{-Hz}}{z^{1+Y_2}} \cdot 1_{z>0}$$

空間方向における各格子点 i に対して、積分作用素は以下のように分解して数値計算することにする。

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} [V(x+z, t) - V(x, t) - (e^z - 1)V_x(x, t)] f(z) dz \\ & \approx \int_{x_{\min}}^{x_i - \Delta x} [V(z) - V(x_i)] f(z - x_i) dz + \int_{x_i + \Delta x}^{x_{\max}} [V(z) - V(x_i)] f(z - x_i) dz \\ & - V_x(x_i) \int_{x_{\min}}^{-\Delta x} (e^z - 1) f(z) dz - V_x(x_i) \int_{\Delta x}^{x_{\max}} (e^z - 1) f(z) dz \\ & + \int_{-\Delta x}^{\Delta x} [V(x_i + z) - V(x_i) - (e^z - 1)V_x(x_i)] f(z) dz \end{aligned} \quad (5.4)$$

ここで (5.4) の最後の項に対し、[2] で用いられている近似を以下のように適用する。

$$\int_{-\Delta x}^{\Delta x} [V(x_i + z) - V(x_i) - (e^z - 1)V_x(x_i)] f(z) dz \cong \frac{(\Delta x)^3}{2} [f(-\Delta x) + f(\Delta x)] \cdot V_{xx}(x_i)$$

最終的には、 M を空間方向の格子点数、 N を時間方向の格子点数とすると、 $0 \leq i \leq M$ 、 $0 \leq j \leq N$ として偏微分積分方程式は以下のように離散化される。

$$\begin{aligned} \frac{V_i^{j+1} - V_i^j}{\Delta t} & - \frac{r - q - L_2}{2} \left[\frac{V_{i+1}^j - V_{i-1}^j}{2\Delta x} + \frac{V_{i+1}^{j+1} - V_{i-1}^{j+1}}{2\Delta x} \right] + \frac{r}{2} [V_i^j + V_i^{j+1}] \\ & - \frac{L_1}{2} \left[\frac{V_{i-1}^j - 2V_i^j + V_{i+1}^j}{\Delta x^2} + \frac{V_{i-1}^{j+1} - 2V_i^{j+1} + V_{i+1}^{j+1}}{\Delta x^2} \right] \\ & = L_3(x_i) - L_4(x_i) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
 L_1 &:= \frac{(\Delta x)^3}{2} [f(-\Delta x) + f(\Delta x)], \\
 L_2 &:= \int_{x_{\min}}^{-\Delta x} (e^z - 1)f(z) dz + \int_{\Delta x}^{x_{\max}} (e^z - 1)f(z) dz, \\
 L_3(x_i) &:= \int_{x_{\min}}^{x_i - \Delta x} V(z)f(z - x_i) dz + \int_{x_i + \Delta x}^{x_{\max}} V(z)f(z - x_i) dz, \\
 L_4(x_i) &:= V(x_i) \cdot \left[\int_{x_{\min}}^{x_i - \Delta x} f(z - x_i) dz + \int_{x_i + \Delta x}^{x_{\max}} f(z - x_i) dz \right]
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

である。反復法 [128] を用いてクランク・ニコルソン法を 2 次精度に保つのも可能であるが、簡潔化のため $L_3(x_i)$ および $L_4(x_i)$ は陽的定式することにより、1 次精度とする。本章では $L_3(x_i)$ はカルテシアン・ツリー法を用いて計算して効率化を試み、更に f の多重極展開係数は再帰的に計算して導く (再帰式の導出は付録 5.A を参照)。本論文ではカルテシアン・ツリー法を用いて $L_3(x_i)$ を数値計算していくが、他に使用できるスタンダードな効率的手法としては FFT 法 [4, 65, 66, 125] が挙げられる。しかし前章で述べられた通りこの手法には欠点がある。まず各時間ステップにおいて高速フーリエ変換を 2 回行う必要がある。次にラップ・アラウンド効果による影響を小さくするため、空間方向における計算区間を拡張する必要がある。更に空間方向における格子点が等間隔に分布していない場合は、FFT 法を直接使うことができない。一方カルテシアン・ツリー法の場合は、各時間ステップにおいて 1 回のみ用いればよく、計算区間も拡張する必要がない。更に空間方向における格子点が等間隔でない場合も直接用いることができる。よってカルテシアン・ツリー法の場合、等間隔分布でない格子点を用いて更なる精度向上を図ることも可能であるが、本論文では簡潔化のため等間隔分布の格子点を用いることにする。

5.5 数値実験

カルテシアン・ツリー法の計算はフリーに配布されている Python コード¹を用いて行い、計算に必要なパラメータ値は $\theta = 0.5$ 、 $p = 15$ 、 $MP = 30$ とした。ここで MP はクラスター階層内のそれぞれのノードにおけるポイントの最大数で、この値が小さいほど深いクラスター階層が構築されることを意味している。また L_2 、 $L_3(x_i)$ 、 $L_4(x_i)$ の数値計算には台数近似を用いている。更に空間方向における格子点の分布は等間隔に固定しているため、クラスター階層の構築は初期ステップのみに実施した。IFGT 法における数値実験と同様、ラッ

¹この Python コードは以下のサイトにてダウンロード可能である。
<https://bitbucket.org/cdcooper/yukawatree>

プ・アラウンド効果を持つFFT法との比較を行う。よって(5.5)の $L_3(x_i)$ の数値計算における空間方向の格子点数は 2^α としている(α は $2M < 2^\alpha$ を満たす最小の整数)。またFFT法にはPythonの数値計算ライブラリNumpyのfft関数を用いた。

図5.1はGCMYモデルにおける、ヨーロピアン・コール・オプション評価に対するIFGT法とFFT法の比較結果である。上下図における水平軸 i は、カルテシアン・ツリー法およびFFT法における空間および時間格子点数の設定に使用した整数を表している($i = 1, 2, 3$ に対して $(M, N) = (1000 \cdot 2^{i-1}, 150 \cdot 2^{i-1})$ とした)。上図の垂直軸はカルテシアン・ツリー法またはFFT法を用いて計算した価格と参照価格との差異を示しており、下図の垂直軸は計算時間を示している。スポット価格および行使価格共に100として他のパラメータは値は[22]のを用いており($r = 0.06, C = 0.42, G = 4.37, H = 191.2, Y = 1.0102, T = 0.25$)、Carr and Madan[26]によるクローズド・フォームを参照価格とした。

”Treecode1”とは、カルテシアン・ツリー法を直接用いた結果を示しているが、この場合FFT法と比較して計算時間がかかることが判明した。この理由として、カルテシアン・ツリー法がFFT法に使用される高速フーリエ変換と比べて広く普及していない、数値実験にて使用したカルテシアン・ツリー法を計算するPythonコードも試作用で最適化されていない点が挙げられる。別の可能性としては、計算量が $O(M \ln M)$ と、高速フーリエ変換と同等であるものの、定数倍の数値が大きい事が予想される。しかしカルテシアン・ツリー法は大変フレキシブルな手法であり、様々な工夫により計算時間を短縮させることが可能である。これはFFT法にはない利点であり、例えば $L_3(x_i)$ は x_i に関して滑らかな曲線であるため、全ての x_i に関して計算しなくても補間法を用いることにより計算時間を短縮することが可能である。”Treecode2”とは、あらかじめ用意された空間格子点から等間隔に置かれた1/8個の格子点を選び、それらの格子点のみに関してカルテシアン・ツリー法を用い、残り7/8個の格子点に関してはスプライン補間を用いて $L_3(x_i)$ を計算した結果である。数値計算される格子点の数が減らされている分計算時間も短縮され、FFT法の計算時間と同等の結果が得られており、計算精度に関しても特段問題ない結果となっている。図5.2は、 $(M, N) = (4000, 600)$ の下でカルテシアン・ツリー法の多重極展開近似における項数 p を変えた場合の、参照価格との差異および計算時間を示している。”Treecode1”および”Treecode2”共に、概ね $p = 11$ でFFT法と同等の精度が得られている事がわかる。図5.3は、 $(M, N) = (4000, 600)$ の下でカルテシアン・ツリー法を用いた場合の、GCMYモデルおよびバリエンス・ガンマ・モデルにおけるヨーロピアン・コールの価格およびリスク指標のデルタのグラフである。バ

リアンス・ガンマ・モデルに関しては [90] のパラメータ値を用いており ($r = 0.00$, $q = 0.0$, $C = 5.9311$, $G = 20.2648$, $H = 39.784$, $Y = 0.00$, $T = 0.5$)、原資産に関して滑らかな関数となることが示唆されている。また $Y = 0.75$ の場合 CGMY モデルは有限変分となるため、無限変分である $Y = 1.0102$ の場合よりも価格が全般的に小さくなっている事が確認できる。

5.6 第5章のまとめ

本章では CGMY モデルおよび バリアンス・ガンマ・モデルのもと、PDE 法によるオプション評価においてカルテシアン・ツリー法を適用した。数値実験から直接カルテシアン・ツリー法を用いた場合には、FFT 法と比較して計算時間がかかることが判明した。この理由として、FFT 法に使用される高速フーリエ変換は広く普及されており最適化された計算コードも容易に入手できるが、数値実験にて使用したカルテシアン・ツリー法を計算する Python コードは試作用で最適化されてない点が挙げられる。また計算量は $O(M \ln M)$ と高速フーリエ変換と同等であるものの、定数倍の数値が大きい事が予想される。しかしカルテシアン・ツリー法の長所を活用することにより、これらの欠点が克服可能であることも判明した。例えば FFT 法と違い、カルテシアン・ツリー法は計算する格子点を自由に選択することができるため、残りの格子点に関しては単純に補間法などを用いることによって全体の計算時間を短縮することが可能である。また格子点が均等に分布していない場合でも FFT 法を違って直接カルテシアン・ツリー法を用いることができるので、[125] にカルテシアン・ツリー法を用いて数値計算を行えば、より精度の高い結果が得られる事が期待できる。また本章では簡潔化のため、均等に分布された空間格子点のもとクランク・ニコルソン法を用いているが、高精度な ADI 手法 [32, 74] を用いれば更なる効率化が期待できる。またリスク管理の観点からは、各格子点のオプション価格を用いて各リスク指標の近似解を容易に計算することができるため、ジャンプ・モデルにおけるリスク管理の効率性向上にもつながる。また使用したカルテシアン・ツリー法の Python コードは 3 次元まで使用することが可能なため、スプレッド・オプションやバスケット・オプションなどの価格評価にも使用可能である。このように経路依存型オプション評価や多次元ジャンプ・モデルにおいてカルテシアン・ツリー法は有効なツールとなる事が期待されるが、より詳細な検証は今後の研究課題とする。

付録 5.A CGMYモデルにおける多重極展開係数

CGMYモデルにおける多重極展開係数の再帰式は、以下のようにして得られる。まず

$\Phi = \frac{e^{-\kappa|z-x|}}{|z-x|^{1+Y}}$ 、 $\Psi = \frac{e^{-\kappa|z-x|}}{|z-x|}$ とする。ここで $\kappa := G \cdot 1_{z-x < 0} + H \cdot 1_{z-x > 0}$ である。すると $|z-x|^Y \Phi = \Psi$ であり、両辺を z に関して $k (\geq 2)$ 回微分することにより

$$\begin{aligned} & |z-x|^2 \frac{\partial^k \Phi}{\partial z^k} + [2(k-1) + Y](z-x) \frac{\partial^{k-1} \Phi}{\partial z^{k-1}} \\ & + (k-1)[(k-2) + Y] \frac{\partial^{k-2} \Phi}{\partial z^{k-2}} = \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} (|z-x|^{2-Y} \frac{\partial \Psi}{\partial z}) \end{aligned} \quad (5.6)$$

が得られる。一方

$$|z-x|^{2-Y} \frac{\partial \Psi}{\partial z} = [1 + \kappa|z-x|] \Phi$$

であり、この両辺を z に関して $k (\geq 2)$ 回微分することにより

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} (|z-x|^{2-Y} \frac{\partial \Psi}{\partial z}) = & - (k-1)(k-2)\kappa|z-x|^{-1}(z-x) \frac{\partial^{k-3} \Phi}{\partial z^{k-3}} \cdot 1_{k \geq 3} \\ & - (k-1)(1 + 2\kappa|z-x|) \frac{\partial^{k-2} \Phi}{\partial z^{k-2}} \\ & - (z-x)[1 + \kappa|z-x|] \frac{\partial^{k-1} \Phi}{\partial z^{k-1}} \end{aligned} \quad (5.7)$$

が得られる。よって (5.6) および (5.7) から、

$$\begin{aligned} & |z-x|^2 \frac{\partial^k \Phi}{\partial z^k} + [2(k-1) + Y](z-x) \frac{\partial^{k-1} \Phi}{\partial z^{k-1}} + (k-1)[(k-2) + Y] \frac{\partial^{k-2} \Phi}{\partial z^{k-2}} \\ = & - (k-1)(k-2)\kappa|z-x|^{-1}(z-x) \frac{\partial^{k-3} \Phi}{\partial z^{k-3}} \cdot 1_{k \geq 3} \\ & - (k-1)(1 + 2\kappa|z-x|) \frac{\partial^{k-2} \Phi}{\partial z^{k-2}} - (z-x)[1 + \kappa|z-x|] \frac{\partial^{k-1} \Phi}{\partial z^{k-1}}, \end{aligned}$$

となり、さらに計算して

$$\begin{aligned} |z-x|^2 \frac{\partial^k \Phi}{\partial z^k} = & - (z-x)[2k-1 + Y + \kappa|z-x|] \frac{\partial^{k-1} \Phi}{\partial z^{k-1}} \\ & - (k-1)(k-1 + Y + 2\kappa|z-x|) \frac{\partial^{k-2} \Phi}{\partial z^{k-2}} \\ & - (k-1)(k-2)\kappa|z-x|^{-1}(z-x) \frac{\partial^{k-3} \Phi}{\partial z^{k-3}} \cdot 1_{k \geq 3} \end{aligned}$$

が得られる。最後に両辺を $k!$ で割り $x = x_i$ および $z = z_c$ を代入することで、最終的に $L^k(x_i, z_c)$ に関する以下の再帰式が得られる。

$$\begin{aligned} k|z_c - x_i|^2 L^k(x_i, z_c) = & - (z_c - x_i)[2k-1 + Y + \kappa|z_c - x_i|] L^{k-1}(x_i, z_c) \\ & - (k-1 + Y + 2\kappa|z_c - x_i|) L^{k-2}(x_i, z_c) \\ & - \kappa|z_c - x_i|^{-1}(z_c - x_i) L^{k-3}(x_i, z_c) \cdot 1_{k \geq 3} \end{aligned}$$

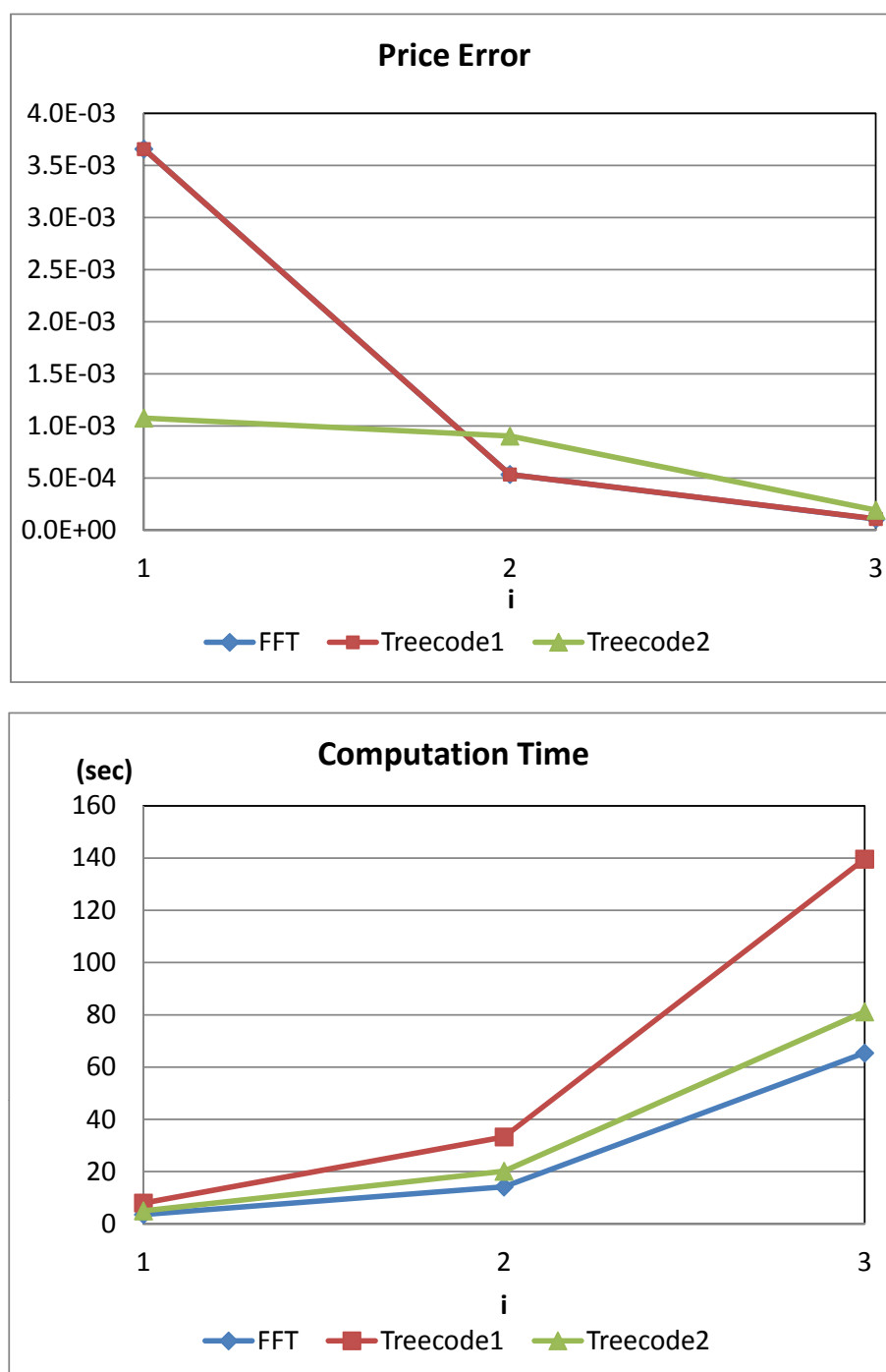


図 5.1: カルテシアン・ツリー法およびFFT法におけるヨーロッパン・コール評価 (CGMYモデル)

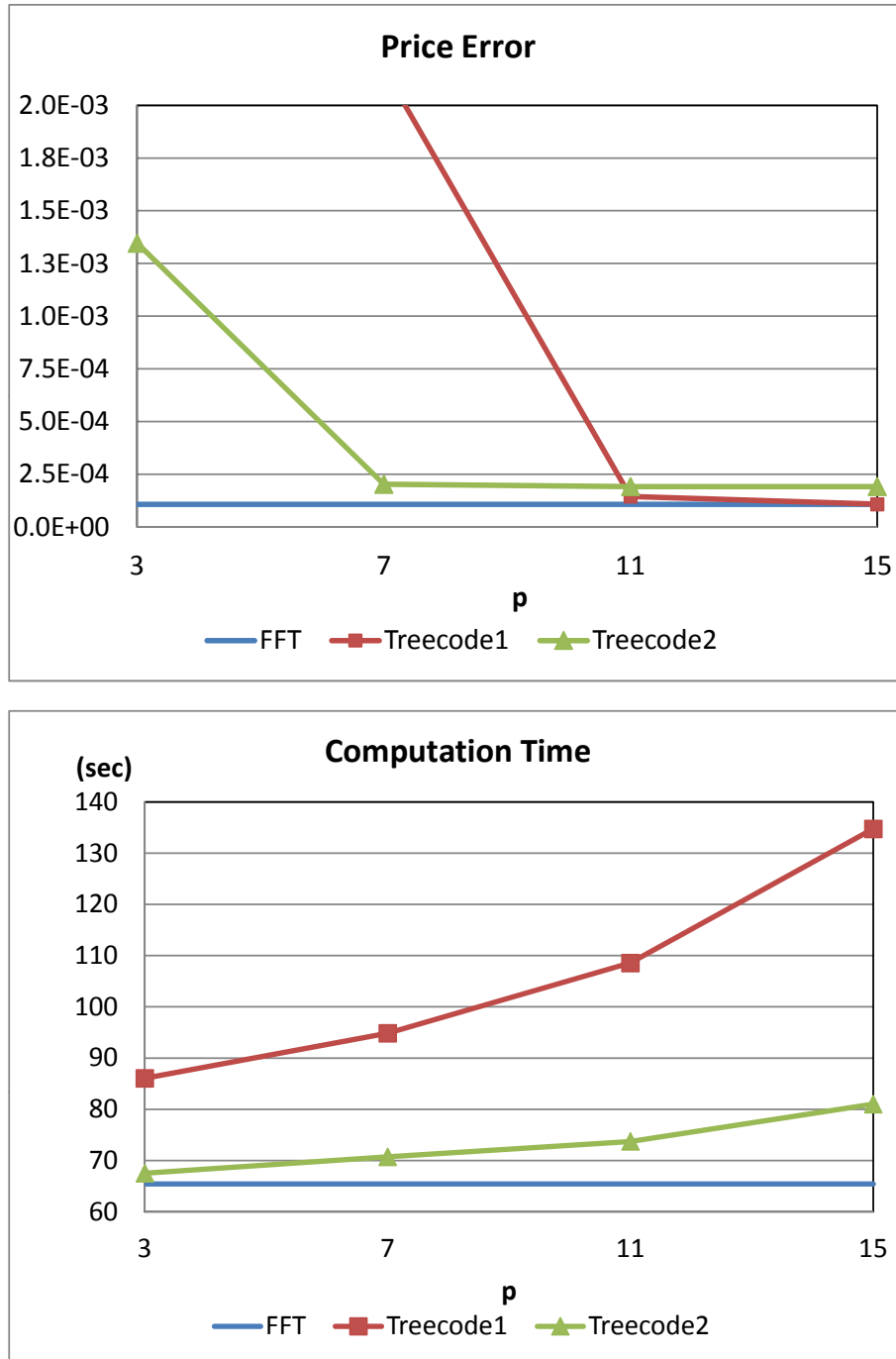


図 5.2: カルテシアン・ツリー法およびFFT法におけるヨーロッパン・コール評価 (GCMYモデル)

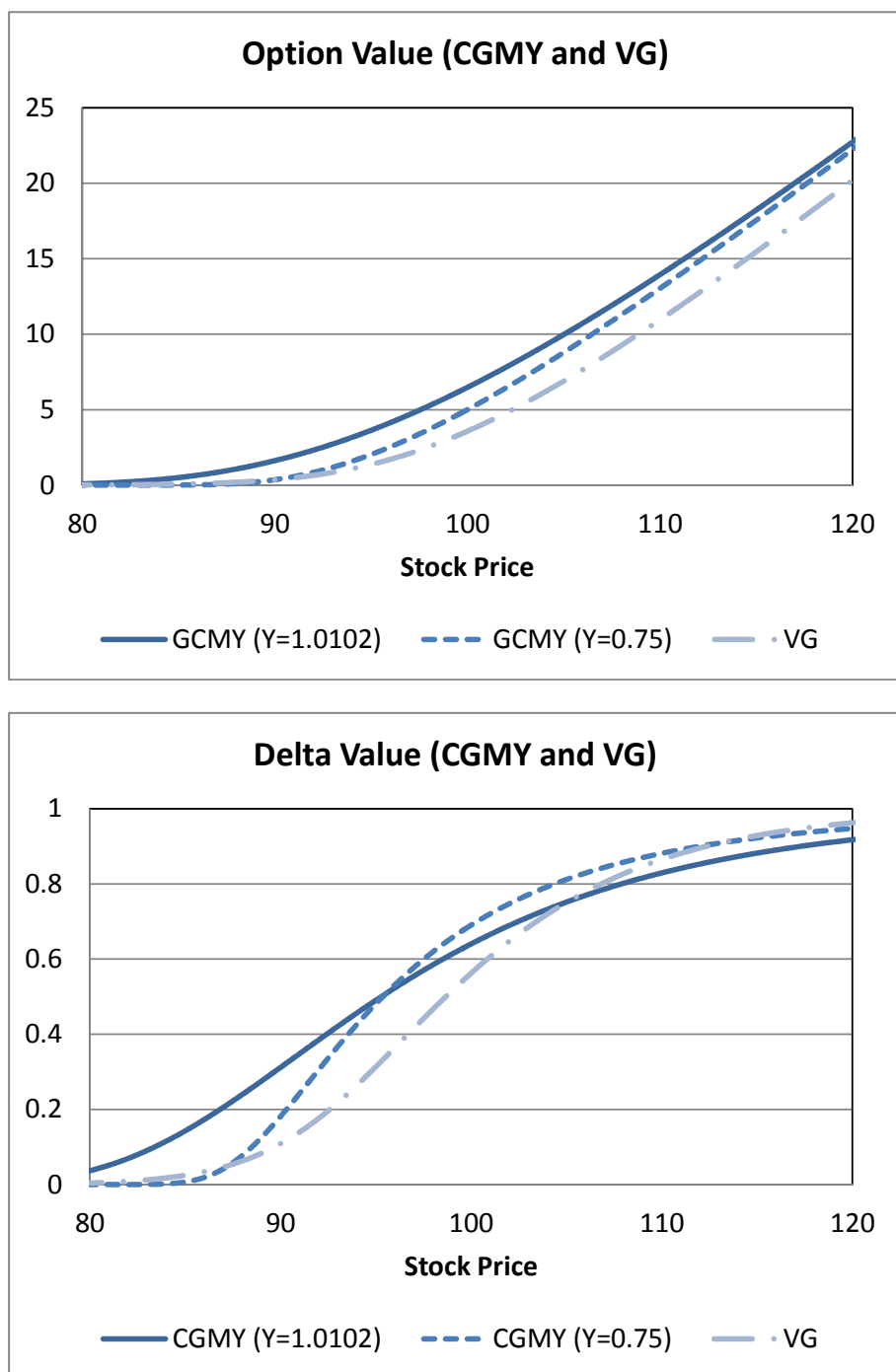


図 5.3: CGMYモデルおよびバリエーション・ガンマ・モデルにおけるヨーロッパ・コール: プライスおよびデルタ。

第6章 総括と今後の研究展望

本論文ではジャンプ・モデルにおけるオプション価格評価の効率化の観点から、解析法における効率的手法を一つ、PDE法における効率的手法を二つ提案して数値検証を行った。

第1章では、序論として現在実務において用いられているジャンプを考慮しない原資産モデルにおける問題点及びジャンプ・モデルの重要性を述べた。従来ジャンプ・モデルは実務で用いられる Black-Scholes モデルよりも実際の市場の挙動をより正確に表現することができるものの、Black-Scholes モデルと違い特にエキゾチック・オプションで解析解を得ることが困難なため実務では敬遠されがちであり、効率的手法の普及が望まれる。

第2章では、原資産モデルおよびオプション評価法における既存研究および問題点をまとめ、本研究における立場を明確化した。その結果課題は以下の通りである事が判明した。

1. ジャンプ・モデルにおける解析法に関しては、ヨーロピアン・オプションなどの非経路依存型オプションの価格計算に対して解析法は有効となるものの、経路依存型オプションに関しては一部のジャンプ・モデルに対してバリア・オプションなど限定されたオプションに対してのみ可能である。更に可能であるとしても実際には計算コストのかかる数値計算が必要となり、実務において効率的な手法とは言い難い。
2. ジャンプ・モデルにおける PDE 法では、高速フーリエ変換を用いた FTT 法が標準的に用いられているものの、この直接用いるには等間隔の空間における格子点が必要となる事や、各時間離散点ごとに2回の高速フーリエ変換を必要とするなどの問題点がある。

以上の課題を踏まえて次の第3章、第4章および5章において以下の研究に焦点を当てるととした。

1. 近年 Black-Scholes モデルのアメリカン・オプション表示に用いられたホモトピー解析手法は、スキーム自体がシンプルであり、ジャンプ・モデルにおける解析法にも適用可能であることが期待される。

2. また計算物理学の分野では、高速多重極法やツリー法などの高速フーリエ変換よりもフレキシブルで同等以上の計算量であるツリー計算法が定着しており、金融工学における有効なツールとしても使用可能であることが期待される。

(a) 改良高速ガウス変換を用いたPDE法。高速ガウス変換の様々な欠点が改良されたこの変換法を用いることにより、更なる効率性が期待できる。

(b) カルテシアン・ツリー法を用いたPDE法。FFT法と同等の計算量 $O(M \ln M)$ であるにも関わらず、アルゴリズムが高速多重極法と比べてシンプルなため実装しやすい。また空間方向における格子点が等間隔でない場合も直接用いることが可能であり、更にFFT法と違い2回のオペレーションを必要としないため、更なる効率性が期待できる。

第3章では、ホモトピー解析法を用いたオプション評価方法について述べられている。ジャンプ・モデルにおけるオプション価格を満たす偏微分積分方程式をフーリエ変換により常微分方程式に変換した後で、この常微分方程式にホモトピー解析法を適用することにより、ヨーロピアン・オプション及びバリア・オプションのクローズド・フォームを導出した。数値実験によりこの無限数列和で表されたクローズド・フォームは高速に収束し、実務における有用性が確認された。更にこの手法は characteristic exponent が解析的に得られるジャンプ・モデルに対しても適用可能であり、また Black-Scholes モデルでクローズド・フォームが存在するタイプのオプションであれば、この手法を用いることによりジャンプ・モデルにおいても同様にクローズド・フォームを求めることができる。そして得られたオプション価格のクローズド・フォームを直接微分することにより、各リスク指標のクローズド・フォームも求める事ができるため、ジャンプ・モデルにおけるリスク管理の効率性向上にもつながる。

第4章および第5章では、PDE法を用いてオプション価格を求める際に計算の負担が問題となる積分作用素の数値計算において、改良高速ガウス変換およびカルテシアン・ツリー法を用いることにより、従来使用されている高速フーリエ変換を用いた手法よりも有効な手法となることが確認された。また第4章における改善高速ガウス変換は Merton 型ジャンプ拡散モデルにのみ適用可能であるが、第5章においてカルテシアン・ツリー法を用いることによりバリアンス・ガンマ・モデルや CGMY モデルにおいて従来の高速フーリエ変換よりもフレキシブルな効率的な手法であることが数値実験により確認された。また各格子点のオプション価格を用いて各リスク指標を数値計算する事ができるため、解析法同様にジャンプ・モデルにおけるリスク管理の効率性向上にもつながる。

今後の研究課題については以下のとおりである。

1. ジャンプモデルにおけるホモトピー解析法を用いたアメリカン・オプションのクローズド・フォームの導出。
2. 近年取引が活発なりつつある Variance Swap などのボラテリティに関連したデリバティブ評価においてもジャンプ・モデルが注目されているため [24, 25]、ホモトピー解析法を用いたボラテリティ・デリバティブ商品のクローズド・フォームの導出も今後の重要な課題となる。
3. ジャンプ・モデルにおけるボラテリティ・デリバティブ商品の、高速多重極法およびツリー法を用いた PDE 法の開発。
4. 高速多重極法およびツリー法は高次元においても利用可能であるが、PDE 法自体が 3 次元を超える高次元の場合計算負荷が大きくなる。よって高次元における効率的 PDE 法を開発することも今後の課題である。

参考文献

- [1] Abbasbandy, S. (2007). The application of homotopy analysis method to solve a generalized Hirota-Satsuma coupled KdV equation. *Physics Letters A*, **361**, 478-483.
- [2] Almendal, A. (2005). Numerical valuation of American options under the CGMY process, in: W. Schoutens *et al.* (Eds.), *Exotic Option Pricing and Advanced Lévy Models* (Chichester: Wiley).
- [3] Andersen, L. (2011). Option pricing with quadratic volatility: a revisit. *Finance and Stochastics*, **15**, 191-219.
- [4] Andersen, L., and Andreasen, J. (2000). Jump diffusion process: Volatility smile fitting and numerical methods for option pricing. *Review of Derivatives Research*, **4**, 231-262.
- [5] Andersen, L., and Brotherton-Ratcliffe, R. (2005). Extended LIBOR market models with stochastic volatility. *Journal of Computational Finance*, **9**, 1-40.
- [6] Asmussen, S., and Rosiński, J. (2001). Approximations of small jumps of Lévy processes with a view towards simulation. *Journal of Applied Probability*, **38**, 482-493.
- [7] Barnes, J., and Hut, P. (1986). A hierarchical $O(n \log n)$ force calculation algorithm. *Nature*, **324**, 446-449.
- [8] Benhamou E. (2003). Optimal Malliavin weighting function for the computation of the greeks, *Mathematical Finance*, **13**, 37-53.
- [9] Barndorff-Nielsen, O. E. (1997). Normal Inverse Gaussian distributions and stochastic volatility modelling. *Scandinavian Journal of Statistics*, **24**, 1-13.
- [10] Belomestny, D., and Schoenmakers, J. (2010). A jump-diffusion Libor model and its robust calibration. *Quantitative Finance*, **11**, 529-546

- [11] Bates, D. S. (1996). Jumps and stochastic volatility: exchange rate processes implicit in deutsche mark options. *The Review of Financial Studies*, **9**, 69-107.
- [12] Black, F., and Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *The Journal of Political Economy*, **81**, 637-654.
- [13] Boschitsch, A. H., Fenley, M. O., and Olson, W. K. (1999). A fast adaptive multipole algorithm for calculating screened Coulomb (Yukawa) Interactions. *Journal of Computational Physics*, **151**, 214-241.
- [14] Boyarchenko, S. I., and Levendorski, S. Z. (2002). Barrier options and touch-and-out options under regular Lévy processes of exponential type. *Ann. Appl. Probab*, **12**, 1261-1298.
- [15] Boyarchenko, S. I., and Levendorski, S. Z. (2013). Efficient Laplace inversion, Wiener-Hopf factorization and pricing lookbacks. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, **16**, 1-40.
- [16] Broadie, M., and Glasserman, P. (1996). Estimating security price derivatives using simulation. *Management Science*, **42**, 269-285.
- [17] Broadie, M., and Yamamoto, Y. (2003). Application of the fast Gauss transform to option pricing. *Management Science*, **49**, 1071-1088.
- [18] Broadie, M., and Yamamoto, Y. (2005). A double-exponential fast Gauss transform algorithm for pricing discrete path-dependent options. *Operations Research*, **53**, 764-779.
- [19] Cariboni, J., and Schoutens, W. (2007). Pricing credit default swaps under Lévy models. *Journal of Computational Finance*, **10**, 1-21.
- [20] Carr, P., and Cousot, L. (2011). A PDE approach to jump-diffusions . *Quantitative Finance*, **11**, 33-52.
- [21] Carr, P., and Crosby, J. (2010). A class of Lévy process models with almost exact calibration to both barrier and vanilla FX options. *Quantitative Finance*, **10**, 1115-1136.
- [22] Carr, P., Geman, H., Madan, D., and Yor, M. (2002). The fine structure of asset returns: An empirical investigation. *Journal of Business*, **75**, 302-332.

- [23] Carr, P., Geman, H., Madan, D., and Yor, M. (2004). From local volatility to local Lévy models. *Quantitative Finance*, **4**, 581-588.
- [24] Carr, P., Lee, R., and Wu, L. (2012). Variance swaps on time-changed Lévy processes. *Finance and Stochastics*, **16**, 335-355.
- [25] Carr, P., and Lee, R. (2013). Variation and share-weighted variation swaps on time-changed Lévy processes. *Finance and Stochastics*, **17**, 685-716.
- [26] Carr, P., and Madan, D. (1999). Option valuation using the fast Fourier transform. *Journal of Computational Finance*, **2**, 61-73.
- [27] Carr, P., and Madan, D. (2009). Saddlepoint methods for option pricing. *Journal of Computational Finance*, **13**, 49-61.
- [28] Carr, P., and Mayo, A. (2007). On the numerical evaluation of option prices in jump diffusion processes. *The European Journal of Finance*, **13**, 353-372.
- [29] Carr, P., and Wu, L. (2003). The finite moment logstable process and option pricing. *The Journal of Finance*, **LVIII(2)**, 753-777.
- [30] Carr, P., and Wu, L. (2004). Time-changed Lévy processes and option pricing. *Journal of Financial Economics*, **71**, 113-141.
- [31] Cartea A., and del Castillo-Negrete, D. (2007). Fractional diffusion models of option prices in markets with jumps. *Physica A*, **374**, 749-763.
- [32] Craig, I.J.D., and Sneyd, A.D. (1988). An alternating-direction implicit scheme for parabolic equations with mixed derivatives. *Comp. Math. Appl.*, **16**, 341-350.
- [33] Cohen, S., and Rosiński, J. (2007). Gaussian approximation of multivariate Lévy processes with applications to simulation of tempered stable processes. *Bernoulli*, **13**, 195-210.
- [34] Cont, R., and Tankov, P. (2004). *Financial Modelling with Jump Processes*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton.
- [35] Cox, J. (1975). Notes on option pricing I: Constant elasticity of variance diffusions” working paper, Stanford university, reprinted in *Journal of Portfolio Management*, **22**, 15-17, 1996.

- [36] Davis, M., and Johansson, M.P. (2006). Malliavin Monte Carlo greeks for jump diffusions. *Stochastic Process and their Applications*, **116**, 101-129.
- [37] Derman, E., and Kani, I. (1994). Riding on a smile. *Risk*, **7**, 139-145.
- [38] Douglas, J., and Rachford, H.H. (1956). On the numerical solution of heat conduct problems in two and three space variables. *Transactions of the American Mathematical Society*, **82**, 421-439.
- [39] Duffie, D., Pan, J., and Singleton, K. (2000). Transform analysis and asset pricing for affine jump-diffusions. *Econometrica*, **68**, 1343-1376.
- [40] Dupire, B. (1994). Pricing with a smile. *Risk*, **7**, 18-20.
- [41] Eberlein, E., and Keller, U. (1995). Hyperbolic distributions in finance. *Bernoulli*, **1**, 281-299.
- [42] Eberlein, E., and Kluge, W. (2006). Exact pricing formulae for caps and swaptions in a Lévy term structure model. *Journal of Computational Finance*, **9**, 99-125.
- [43] Eberlein, E., and Liinev, J. (2007). The Lévy swap market model. *Applied Mathematical Finance*, **14**, 171-196.
- [44] Eberlein, E., and Ozkan, F. (2005). The Lévy LIBOR model. *Finance and Stochastics*, **9**, 327-348.
- [45] Eberlein, E., and Raible, S. (1999). Term structure models driven by general Lévy Processes. *Mathematical Finance*, **9**, 31-54.
- [46] El-Khatib, Y., and Privault, N. (2004). Computations of greeks in a market with jumps via the Malliavin calculus. *Finance and Stochastics*, **8**, 161-179.
- [47] Eraker, B. (2004). Do stock prices and volatility jump? Reconciling evidence from spot and option prices. *Journal of Finance*, **59**, 1367-1404.
- [48] Evans, L.C. (1998). *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, Providence.
- [49] Feng, L., and Linetsky, V. (2008). Pricing discretely monitored barrier options and defaultable bonds in Lévy process models: A Fast Hilbert transform approach. *Mathematical Finance*, **18**, 337-384.

- [50] Feng, L., and Linetsky, V. (2008). Pricing options in jump-diffusion models: An extrapolation approach. *Operations Research*, **56**, 304-325.
- [51] Fang, F., and Oosterlee, C. W. (2008). A novel pricing method for European options based on Fourier-cosine series expansions. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **31**, 826-848.
- [52] Fiorani, F. (2004). *Option pricing under the variance gamma process*. PhD thesis, University of Trieste.
- [53] Fong, W., and Darve, E. (2009). The black-box fast multipole method. *Journal of Computational Physics*, **228**, 8712-8725.
- [54] Fujiwara, T., and Miyahara, Y. (2003). The minimal entropy martingale measures for geometric Lévy processes. *Finance and Stochastics*, **27**, 509-531.
- [55] Gonzalez, T. (1985). Clustering to minimize the maximum intercluster distance. *Theoretical Computer Science*, **38**, 293-306.
- [56] Glasserman, P. (2004). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer-Verlag, New York.
- [57] Glasserman, P., and Kou, S. G. (2003). The term structure of simple forward rates with jump risk. *Mathematical Finance*, **13**, 383-410.
- [58] Glasserman, P., and Merener, N. (2003). Cap and swaption approximations in LIBOR market models with jumps. *Journal of Computational Finance*, **7**, 1-36.
- [59] Glasserman, P., and Merener, N. (2003). Numerical solution of jump diffusion LIBOR market models. *Finance and Stochastics*, **7**, 1-27.
- [60] Greengard, L. F., and Huang, J. F. (2002). A new version of the fast multipole method for screened coulomb interactions in three dimensions. *Journal of Computational Physics*, **180**, 642-658.
- [61] Greengard, L., and Rokhlin, V. (1987). A fast algorithm for particle simulations. *Journal of Computational Physics*, **73**, 325-348.
- [62] Greengard, L., and Strain, J. (1991). The fast Gauss transform. *SIAM Journal of Scientific and Statistical Computing*, **12**, 79-94.

- [63] Hagan, S., Kumar, D., Lesniewski, A. S., and Woodward, D. E. (2002). Managing smile risk, *Wilmott*, September, 84-108.
- [64] Hagan, S., Kumar, D., Lesniewski, A. S., and Woodward, D. E. (2014). Arbitrage-free SABR, *Wilmott*, January, 60-75.
- [65] d'Halluin, Y., Forsyth, P. A., and Labahn, G. (2004). A penalty method for American options with jump diffusion processes. *Numerische Mathematik*, **97**, 321-352.
- [66] d'Halluin, Y., Forsyth, P.A., and Vertzal, K.R. (2005). Robust numerical methods for contingent claims under jump diffusion processes. *IMA Journal of Numerical Analysis*, **25**, 87-112.
- [67] Henry-Labordère, P. (2008). A general asymptotic implied volatility for stochastic volatility models, to appear in *Frontiers in Quantitative Finance*, Wiley.
- [68] Heston, S. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of Financial Studies*, **6**, 327-343.
- [69] Hirska, A. (2013). *Computational methods in finance*. Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series.
- [70] Hirska, A., and Madan, D. (2004). Pricing American options under variance gamma. *Journal of Computational Finance*, **7**, 63-80.
- [71] Huang, Z., and Kou, S.G. (2006). First passage times and analytical solutions for options on two assets with jump risk. *Preprint*, Columbia University.
- [72] Hull, J. (2008). *Options, Futures, and Other Derivatives*. Prentice Hall.
- [73] Hull, J., and White, A. (1987). The pricing of options on assets with stochastic volatilities. *Journal of Finance*, **42**, 281-300.
- [74] Hundsdorfer, W. (2002). Accuracy and stability of splitting with stabilizing corrections. *Appl. Num. Math.*, **42**, 213-233.
- [75] Imai, J., and Tan, K.S. (2009). An accelerating quasi-Monte Carlo method for option pricing under the generalized hyperbolic Lévy process. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **31**, 2282-2302.

- [76] Itkin, A., and Carr, P. (2012). Jumps without tears: a new splitting technology for barrier options. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, **8**, 667-704.
- [77] Itkin, A., and Carr, P. (2012). Using pseudo-parabolic and fractional equations for option pricing in jump diffusion models. *Computational Economics*, **40**, 63-104.
- [78] Jackson, K., Jaimungal, S. and V. Surkov.V. (2007). Option pricing with regime switching Lévy processes using Fourier space time-stepping. *In Proceeding of the Fourth IASTED International Conference on Financial Engineering and Applications*, 92-97.
- [79] Jackson, K., Jaimungal, S. and V. Surkov.V. (2008). Fourier space time-stepping for option pricing with Lévy models. *Journal of Computational Finance*, **12**, 1-29.
- [80] Jeannin, M. and Pistorius, M. (2010). A transform approach to calculate prices and greeks of barrier options driven by a class of Lévy processes. *Quantitative Finance*, **10**, 629-644.
- [81] Joshi, M.(2008). *The Concepts and Practice of Mathematical Finance* (Mathematics, Finance and Risk). Cambridge University Press.
- [82] Joshi, M., and Rebonato,R. (2003). A stochastic-volatility, displaced-diffusion extension of the LIBOR market model. *Quantitative Finance*, **3**, 458-469.
- [83] Kallsen, J. and Shiryaev, A.N.(2002). The cumulant process and Esscher's change of measure. *Finance and Stochastics*, **6**, 397-428.
- [84] Kawai., R. and Imai., J. (2010). Quasi-Monte Carlo method for infinitely divisible random vectors via series representations, **SIAM Journal on Scientific Computing**, **32**, 1879-1897.
- [85] Kawai., R. and Imai., J. (2011). On Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods for Series Representation of Infinitely Divisible Laws, Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 2010, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, Vol. 23, Springer - Verlag Berlin Heidelberg, 471-486.
- [86] Kou, S.G. (2002). A jump-diffusion model for option pricing. *Management Science*, **48**, 1086-1101.

- [87] Kou, S.G., and Wang, H. (2003). First passage times of a jump diffusion process. *Advances in Applied Probability*, **35**, 504-531.
- [88] Kou, S.G., and Wang, H. (2004). Option pricing under a double exponential jump diffusion model. *Management Science*, **50**, 1178-1192.
- [89] Kudryavtsev, O. (2013). Finite difference methods for option pricing under Lévy processes: Wiener-Hopf factorization approach. *The Scientific World Journal*, **2013**, 1-12.
- [90] Lee, R. (2004). Option pricing by transform methods: Extensions, unification, and error control. *Journal of Computational Finance*, **7**, 51-86.
- [91] Leobacher, G. (2006). Stratified sampling and quasi-monte carlo simulation of Lévy processes. *Monte Carlo Methods and Applications*, **12**, 231-238.
- [92] Li, P., Johnston, H. and Krasny, R. (2009). A Cartesian treecode for screened Coulomb interactions. *Journal of Computational Physics*, **228**, 3858-3868.
- [93] Liao, S. (1997). Numerically solving non-linear problems by the homotopy analysis method. *Computational Mechanics*, **20**, 530-540.
- [94] Lipton, A. (2002). The vol smile problem. *Risk*, **15**, 61-65.
- [95] Lorig, M., and Lozano-Carbasse, O. (2013). Exponential Lévy-type models with stochastic volatility and stochastic jump-intensity. arxiv.org/abs/1205.2398.
- [96] Longstaff, F.A., and Schwartz, E. S. (2001). Valuing American options by simulations : a simple least-squares approach. *Review of Financial Studies*, **14**, 113-147.
- [97] Madan, D., Carr, P. and Chang, E. (1998). The variance gamma process and option pricing. *European Finance Review*, **2**, 79-105.
- [98] Mahmoudi, Y., and Kazemian, M. (2012). Some notes on homotopy analysis method for solving the Fornberg-Whitham Equation. *Journal of Basic and Applied Scientific Research*, **2**, 2985-2990.
- [99] Maller, R.A., Solomon, D. H., and Szimayer, A. (2006). A multinomial approximation for American option prices in Lévy process models. *Mathematical Finance*, **16**, 613-633.

- [100] Matache, A.-M., Nitsche, P.-A., and Schwab, C. (2005). Wavelet Galerkin pricing of American options on Lévy driven assets. *Quantitative Finance*, **5**, 403-424.
- [101] Merton, R. (1973). Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, **4**, 141-183.
- [102] Merton, R. (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics*, **3**, 125-144.
- [103] Miyahara, Y.(1999). Minimal entropy martingale measures of jump type price processes in incomplete assets markets. *Asian-Pacific Financial Markets*, **6**, 97-113.
- [104] Montero, M. and Kohatsu-Higa, A. (2003). Malliavin calculus applied to finance. *Physica A*, **320**, 548-570.
- [105] Nassar, C.J., Revelli, J.F., and Bowman, R.J. (2011). Application of the homotopy analysis method to the Poisson-Boltzmann equation for semiconductor devices. *International J. Non. Lin. Sci. Numer. Simulat*, **16**, 2501-2512.
- [106] Ortega, J.M. and Rheinboldt, W.C. (1970). *Iterative solution of Nonlinear Equations in Several Variables*. Academic Press, New York.
- [107] Pagliarani S., Pascucci A. (2013). Local stochastic volatility with jumps: analytical approximations, *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, **16**.
- [108] Pagliarani S., Pascucci A., and Riga C. (2013). Adjoint expansions in local Lévy models. *SIAM Journal on Financial Mathematics*, **4**, 265-296.
- [109] Pan, J. (2002). The jump-risk premia implicit in options: evidence from an integrated time-series study. *Journal of Financial Economics*, **63**, 3-50.
- [110] Papapantoleon, A., Schoenmakers, J., and Skovmand, D. (2012). Efficient and accurate log-Lévy approximations to Lévy driven LIBOR models. *Journal of Computational Finance*, **15**, 3-44.
- [111] Piterbarg, V. (2003). A stochastic volatility forward LIBOR model with a term structure of volatility smiles, *Applied Mathematical Finance*, **12**, 147-185.

- [112] Raykar, V.C., Yang, C., Duraiswami, R., and Gumerov, N. (2005). Fast computation of sums of Gaussians in high dimensions. Technical Report CS-TR-4767, Department of Computer Science, University of Maryland.
- [113] Rebonato, R., and Kainth, D. (2004). A two-regime, stochastic volatility extension of the LIBOR market model. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, **7**, 555-575.
- [114] Rebonato, R., McKay, K., and White, R. (2009). The SABR/LIBOR Market Model, John Wiley and Sons.
- [115] Ren, Y., Madan, D., and Qian, M. Q. (2007). Calibrating and pricing with embedded local volatility models, *Risk*, **20**, 138-143.
- [116] Ribeiro, C., and Webber, N. (2006). Correcting for simulation bias in Monte Carlo methods to value exotic options in models driven by Lévy processes. *Applied Mathematical Finance*, **13**, 333-352.
- [117] Rubinstein, M. (1994). Implied binomial trees. *Journal of Finance*, **49**, 771-818.
- [118] Sato, K. (1999). *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [119] Schoutens, W. (2006). Exotic options under Lévy models: an overview. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **189**, 526-538.
- [120] Schweizer, M. (1995). On the minimal martingale measure and the Föllmer-Schweizer decomposition. *Stochastic Analysis and Applications*, **13**, 573-599.
- [121] Scott, L. O. (1997). Pricing stock options in a jump-diffusions model with stochastic volatility and interest rates: applications of Fourier inversion methods. *Mathematical Finance*, **7**, 413-426.
- [122] Sepp, A., and Karasinski, P. (2012). Beta stochastic volatility model. *Risk*, October 2012, 66-71.
- [123] Song, L., Zhang, H. (2007). Application of homotopy analysis method to fractional KdV Burgers- Kuramoto equation. *Physics Lett. A*, **367**, 88-94.

- [124] Stein, E., and Stein, J. (1992). Stock price distributions with stochastic volatility: An analytical approach. *Review of Financial Studies*, **4**, 727-752.
- [125] Tavella, D., and Randall, C. (2000). *Pricing financial instruments: the finite difference method*. John Wiley and Sons.
- [126] Topper, J. (2005). *Financial Engineering with Finite Elements*. Wiley Finance Series.
- [127] Vahdati,S., Tavassoli Kajani, M. and Ghasemi, M. (2013). Application of homotopy analysis method to SIR epidemic model. *Research Journal of Recent Sciences*, **2**, 91-96.
- [128] Wang, I., Wan, J. W., and Forsyth, P. (2007). Robust numerical valuation of European and American options under the CGMY process. *Journal of Computational Finance*, **10**, 31-70.
- [129] Wu, L., and Zhang, F. (2006). LIBOR market model with stochastic volatility. *Journal of Industrial and Management Optimization*, **2**, 199 - 227.
- [130] Yang, C., Duranswami, R., and Davis, L. (2005). Efficient kernel machines using the improved fast Gauss transform. In *Advances in Neural Information Processing Systems*, **17**, 1561-1568, MIT Press.
- [131] Yabushita, K., Yamashita, M., and Tsuboi,K. (2007). An analytic solution of projectile motion with the quadratic resistance law using the homotopy analysis method. *Journal of Phys.A.*, **40**, 8403-8416.
- [132] Ying, L., Biros, G., and Zorin, D. (2004). A kernel-independent adaptive fast multipole method in two and three dimensions. *Journal of Computational Physics*, **196**, 591-626.
- [133] Zhao, J., and Wong, H. Y. (2012). A Closed-form Solution to American Options under General Diffusions. *Quantitative Finance*, **12**, 725-737.
- [134] Zhu,S. (2006). An exact and explicit solution for the valuation of American put options. *Quantitative Finance*, **6**, 229-242.
- [135] Zurigat, M., Momani,S., Odibat,Z. and Alawneh, A. (2010). The homotopy analysis method for handling systems of fractional differential equations. *Applied Mathematical Modelling*, **34**, 24-35.

- [136] Zvan, R., Forsyth, P. A., and Ventzal, K. R. (2001). A finite volume approach for contingent claims valuation. *IMA Journal of Numerical Analysis*, **21**, 703-731.