2007年度解析II講義ノート
微分方程式入門

平良和昭

2008年2月

目 次

1　微分方程式の役割

　この講義では，微分方程式の基本定理の意味，使い方について説明する。特に、理論的な背景として、線形代数学及び微分積分学の無限次元版である関数解析的な考え方を知ることは、極めて有効である。
　数学における微分方程式及び級数の、物理学における役割をまとめると、以下の表のようになる：

項 目	数 学	物 理 学
微分方程式	２階常微分方程式	ニュートンの運動方程式（質点、剛体の運動）
級数	べき級数、フーリエ級数	固有関数展開（重ね合わせの原理）
ベクトル解析	曲面上の微分積分学	連続体の力学（流体、弾性体の運動）

因みに、関係する人物の生誕については、以下の通りである：
Isaac Newton: 1642–1727
Leonhard Euler: 1707–1783
Joseph Louis Lagrange: 1736–1813
Jean-Baptiste Joseph Fourier: 1768–1830
Augustin Louis Cauchy: 1789–1857

2　線形常微分方程式の解のまとめ

(I) **一階線形常微分方程式**

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x) \tag{2.1}$$

(a) 斉次の場合：

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \tag{2.2}$$

$$y(x) = Ce^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt} \tag{2.3}$$

ここで、C は任意の定数。

注意 2.1 *(2.3)* 式は、斉次方程式 *(2.2)* の解全体の集合（解空間）が、複素数体 $\mathbf{C}$ 上の１次元ベクトル空間をなすという事実を述べている。

(b) 非斉次の場合：

$$y(x) = \left(\int_{x_0}^{x} f(t) \cdot e^{\int_{x_0}^{t} p(s)ds} dt + C \right) e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt} \tag{2.4}$$

$$= \int_{x_0}^{x} f(t) \cdot e^{\int_{x_0}^{t} p(s)ds} dt \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt} + Ce^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}$$

$$:= y_p(x) + Ce^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}$$

ここで、C は任意の定数。

注意 2.2 *(2.4)* 式は、非斉次方程式 *(2.1)* の解全体の集合（解空間）が、複素数体 $\mathbf{C}$ 上のベクトル空間を $y_p(x)$ だけ平行移動したアファイン空間をなすことを意味し、そのアファイン空間の次元が 1 に等しいという事実を述べている。

(II) **２階線形常微分方程式**

$$u''(t) + 2bu(t) + cu(t) = 0 \tag{2.5}$$

ただし、b, c は実数とする。

(a) $D = b^2 - c > 0$ の場合：

$$u(t) = e^{-bt}\left(Ae^{\sqrt{b^2-c}t} + Be^{-\sqrt{b^2-c}t}\right)$$

ここで、A, B は任意の定数。

(b) $D = b^2 - c = 0$ の場合：

$$u(t) = e^{-bt}(At + B)$$

ここで、A, B は任意の定数。

(c) $D = b^2 - c < 0$ の場合：

$$u(t) = e^{-bt}\left(A\cos\sqrt{c-b^2}t + B\sin\sqrt{c-b^2}t\right)$$

ここで、A, B は任意の定数

注意 2.3 斉次方程式 *(2.5)* の解全体の集合が、複素数体 $\mathbf{C}$ 上のベクトル空間をなすことを意味し、その次元が *2* に等しいという事実を述べている。一覧表にすると、以下の通りである：

場合分け	基本解
$D = b^2 - c > 0$	$e^{-bt}e^{\sqrt{b^2-c}t}, \quad e^{-bt}e^{-\sqrt{b^2-c}t}$
$D = b^2 - c = 0$	$e^{-bt}, \quad te^{-bt}$
$D = b^2 - c < 0$	$e^{-bt}\cos\sqrt{c-b^2}t, \quad e^{-bt}\sin\sqrt{c-b^2}t$

3　常微分方程式の初期値問題

以下では、x, y の役割を次のように定める：

x：実変数

$y(x)$：x の（一般には複素数値をとる）未知関数。この関数を具体的に求めることが問題となる。

一般に

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{3.1}$$

で与えられる式を、n 階の**常微分方程式**(ordinary differential equation) という。

特に、関数 F が変数 $y, y', \ldots, y^{(n)}$ の１次式であるとき、微分方程式（3.1）を**線形**という。従って、線形微分方程式の一般形は、次の形に書かれる：

$$P_0(x)y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = P_{n+1}(x), \quad P_0(x) \not\equiv 0 \tag{3.2}$$

(3.2) 式は、右辺の項 $P_{n+1}(x) \equiv 0$ のとき斉次、$P_{n+1}(x) \not\equiv 0$ のとき非斉次という。

ここでは、理論、応用の両面において重要な $n = 2$ の場合の 2 階線形微分方程式

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = P_3(x), \qquad P_0(x) \not\equiv 0 \tag{3.3}$$

を扱う

関数 $\varphi(x)$ が区間 J において微分方程式（3.3）をみたすとき、すなわち、

$$P_0(x)\varphi''(x) + P_1(x)\varphi'(x) + P_2(x)\varphi(x) = P_3(x), \quad \forall x \in J \tag{3.4}$$

が成り立つとき、関数 $\varphi(x)$ を区間 J における**解**という。

一般の微分方程式（3.3）が、初等関数で表される解を持つことは期待できない。常微分方程式論の目的は、「一般の微分方程式の解について、出来る限り多くの精密な情報を提供すること、そのために必要な方法と技巧を確立することである」といえる。微分方程式（3.3）において、係数 $P_j(x),\ j = 0, 1, 2, 3$ は区間 J で連続であるとする。区間 J の各点で $P_0(x) \neq 0$ ならば、（3.3）式は、次式と同値である：

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y = f(x) \tag{3.5}$$

ここでは正規形（と同値な）微分方程式を考える。微分方程式 (3.5) は、一般に無限に多くの解を持つ。無数にある解の中から特定のものを選び出すためには、何らかの条件を付け加えなければならない。この種の付帯条件の代表的なものに、**初期条件**(initial condition) および**境界条件**(boundary condition) がある。

初期条件とは、区間 J 内の一定点 x_0 において、解およびその導関数がとる値（位置と初速度）をあらかじめ指定することである。例えば、

$$\begin{cases} y(x_0) = \alpha, \\ y'(x_0) = \beta \end{cases} \tag{3.6}$$

何らかのメカニズムによって刻々と状態が変化する物理的系が与えられた時、その現在の状態を知ることで、長期的な将来にわたる状態の移り変わりを予想しようという大域的な漸近挙動の研究から、微分方程式の初期値問題は派生した。

また、境界条件というのは、考えている区間 $J = [a, b]$ の両端 $x = a, y = b$ において、解またはその導関数のみたすべき関係を指定することである。例えば、

$$\begin{cases} y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \quad (\text{ディリクレ条件}) \\ y'(a) = \alpha, \quad y'(b) = \beta \quad (\text{ノイマン条件}) \end{cases}$$

などがその例である。それぞれ、固定端、自由端に対応している。境界値問題は、２本の電柱の間に張った電線のたわみ方を記述する問題のように、両端点における何らかの情報 (たとえば電柱の高さ) が解を特定する鍵となるような性質の問題である。一般の境界値問題は、以下のように定式化できる：

$$\begin{cases} Ay(a) + A'y'(a) = C \\ By(b) + B'y'(b) = D \end{cases} \tag{3.7}$$

微分方程式 (3.5) の解で、初期条件 (3.6) を満足するものを求める問題を**初期値問題**、境界条件 (3.7) を満足するものを求める問題を**境界値問題**という。

ここでは、まず、初期値問題から考える。

問題 3.1 *(解の存在)* 初期値問題は、実際に解を持つであろうか？

問題 3.2 *(解の一意性)* 解が存在する場合、そのような解はただ一つであろうか？

3.1 解の一意存在に関する基本定理

最も基本的な一意存在定理について述べる：

定理 3.1 関数 $p(x), q(x), f(x)$ は区間 J で連続とする。x_0 は J 内の任意に固定された点、α, β は任意に与えられた定数とする。このとき、線形微分方程式

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{3.8}$$

の解 $y(x)$ で、初期条件 *(3.6)*

$$\begin{cases} y(x_0) = \alpha, \\ y'(x_0) = \beta \end{cases}$$

をみたすものが区間 J で一意に存在する。

例 3.1 微分方程式

$$y''(x) = g(x), \quad g(x) \in C(J) \tag{3.9}$$

の解で、初期条件 *(3.6)* をみたすものは、一意的に存在して、次の積分方程式で与えられる：

$$y(x) = \alpha + \alpha'(x - x_0) + \int_{x_0}^{x} (x - t)g(t)dt, \quad \forall x \in J \tag{3.10}$$

微分方程式 (3.9) は、われわれが扱う正規型の 2 階線形微分方程式の中でもっとも単純な形である。この方程式を参考にして、より一般の (3.8) の方程式においても初期条件 (3.6) の下で、解が一意的に存在することを示せばよい。

証明. 以下で、定理 3.1 を証明する。

解の存在の証明：逐次近似法によって、解を構成する。

区間 J は有界閉区間 $[a, b]$ であるとする。J で 1 回連続微分可能な関数 $y_0(x)$ を任意にとる。漸化式

$$\begin{aligned} y_n(x) &:= \alpha + \beta(x - x_0) \\ &\quad + \int_{x_0}^{x} (x - t) \left[-p(t)y'_{n-1}(t) - q(t)y_{n-1}(t) + f(t) \right] dt, \\ n &= 1, 2, 3, ... \end{aligned} \tag{3.11}$$

によって、関数の列 $y_1(x), y_2(x), y_3(x) \ldots, y_n(x), \ldots$ を定める。

これによって、2 回連続的微分可能な関数列 $\{y_n(x)\}$ が区間 J で一意に定義される。目的は, この関数列が J で一様に収束し、極限関数 $y(x)$ が初期値問題 (3.8),(3.6) の解になることを示すことである。

（3.9）式と（3.10）式の関係から、（3.11）式の $y_n(x)$ は、微分方程式

$$y''_n(x) = -p(x)y'_{n-1}(x) - q(x)y_{n-1}(x) + f(x) \tag{3.12}$$

と初期条件（3.6）をみたす。そこで、

$$z_n(x) := y_n(x) - y_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, 3 \ldots$$

とおく。（3.11）式により、$z_n(x)$ は以下のようになる。

$$z_n(x) = \int_{x_0}^{x} (x - t) \left[-p(t)z'_{n-1}(t) - q(t)z_{n-1}(t) \right] dt, \quad n = 2, 3, \ldots \tag{3.13}$$

両辺を x で微分すると、

$$z'_n(x) = \int_{x_0}^{x} \left[-p(t)z'_{n-1}(t) - q(t)z_{n-1}(t) \right] dt \tag{3.14}$$

J は有界閉区間で、関数 $z_1(x), z_1'(x), p(x), q(x)$ は連続なので

$$\begin{cases} A_1 & := \max_{x\in J} |z_1(x)|\,, \\ A_2 & := \max_{x\in J} |z_1'(x)|\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} B & := \max_{x\in J} |p(x)| + |q(x)|, \\ A & := \max\,(A_1, A_2) \end{cases}$$

とおけば、

$$\begin{cases} |z_1(x)| \le A, \quad \forall x \in J, \\ |z_1'(x)| \le A, \quad \forall x \in J, \\ |p(x)| + |q(x)| \le B, \quad \forall x \in J. \end{cases}$$

また、

ところで、

$$y_n(x) = y_0(x) + \sum_{k=1}^{n} z_k(x),$$
$$y_n'(x) = y_0'(x) + \sum_{k=1}^{n} z_k'(x)$$

であるから、関数列 $\{y_n(x)\}, \{y_n'(x)\}$ は J で一様に収束し、(3.12)式より関数列 $\{y_n''(x)\}$ も J で一様に収束する。従って、

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y(x)$$

とおけば、極限関数 $y(x)$ は J で 2 回連続的微分可能で、

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} y_n'(x) &= y'(x), \\ \lim_{n\to\infty} y_n''(x) &= \lim_{n\to\infty}[-p(x)y_{n-1}^{'}(x) - q(x)y_{n-1}(x) + f(x)] \\ &= -p(x)y'(x) - q(x)y(x) + f(x) \end{aligned}$$

が成り立つ。(3.12)式で $n \to \infty$ とすれば、極限において

$$y''(x) = -p(x)y'(x) - q(x)y(x) + f(x)$$

が得られる。

よって、$y(x)$ は J で微分方程式(3.4)をみたす。また、(3.11)式より、

$$\begin{cases} y_n(x_0) = \alpha, \\ y_n'(x_0) = \beta \end{cases}$$

なので、関数 $y(x)$ は初期条件（3.6）をみたす。

　このようにして初期値問題（3.8），（3.6）の解の存在が示された。このような解の構成法をピカール（Picard）の**逐次近似法**という。

　解の一意性の証明：初期値問題 (3.8),(3.6) が 2 つの解 $y_1(x), y_2(x)$ を持つと仮定する。このとき、

$$z(x) := y_1(x) - y_2(x)$$

とおけば、関数 $z(x)$ は、以下の初期値問題 (3.15),(3.16) をみたす：

$$z'' + p(x)z' + q(x)z = 0 \tag{3.15}$$

$$\begin{cases} z(x_0) = 0, \\ z'(x_0) = 0 \end{cases} \tag{3.16}$$

従って、解の一意性を示すには、この関数 $z(x)$ が J で恒等的に 0 になることを言えばよい。

　そこで、

$$u(x) := |z(x)|^2 + |z'(x)|^2 = z(x)\overline{z(x)} + z'(x)\overline{z'(x)}$$

とおく。ここで、$\overline{z}$ は z の複素共役を表わす。

　両辺を x で微分すると

$$u'(x) = z'(x)\overline{z(x)} + z(x)\overline{z'(x)} + z''(x)\overline{z'(x)} + z'(x)\overline{z''(x)}$$

ここで、

$$\left|\overline{z'(x)}\right| = |z'(x)|, \quad \left|\overline{z''(x)}\right| = |z''(x)|$$

に注意して、(3.15) 式から得られる不等式

$$|z''(x)| \le |p(x)|\,|z'(x)| + |q(x)|\,|z(x)|$$

を用いて、上式の両辺の絶対値をとると、

$$\begin{aligned} |u'(x)| &\le 2\,|z'(x)|\,|z(x)| + 2\,|z''(x)|\,|z'(x)| \\ &\le 2\,(1+|q(x)|)\,|z'(x)|\,|z(x)| + 2\,|p(x)|\,|z'(x)|^2 \end{aligned}$$

さらに、不等式

$$2\,|z(x)|\,|z'(x)| \le |z(x)|^2 + |z'(x)|^2$$

を用いて

$$\begin{aligned} |u'(x)| &\le (1+|q(x)|)\,|z(x)|^2 + (1+2\,|p(x)|+|q(x)|)\,|z'(x)|^2 \\ &\le 2(1+|p(x)|+|q(x)|)\left[|z(x)|^2 + |z'(x)|^2\right] \\ &= 2(1+|p(x)|+|q(x)|)u(x) \end{aligned}$$

そこで、

$$K := \max_{x\in J}\{2(1+|p(x)|+|q(x)|\}$$

とおけば、関数 $u(x)$ は J で微分不等式

$$|u'(x)| \leq Ku(x)$$

あるいは、

$$-Ku(x) \leq u'(x) \leq Ku(x) \tag{3.17}$$

をみたす。

(3.17) 式の右半分 $u'(x) - Ku(x) \leq 0$ に正の関数 e^{-Kx} を掛けると、

$$\left[e^{-Kx}u(x)\right]' = e^{-Kx}(u'(x) - Ku(x)) \leq 0$$

となり、これは、関数 $e^{-Kx}u(x)$ が非増加関数であることを意味する。よって

$$\begin{aligned} x > x_0 \Rightarrow e^{-Kx}u(x) \leq e^{-Kx_0}u(x_0) \Rightarrow &\quad u(x) \leq e^{K(x-x_0)}u(x_0) \\ x < x_0 \Rightarrow e^{-Kx}u(x) \geq e^{-Kx_0}u(x_0) \Rightarrow &\quad u(x) \geq e^{K(x-x_0)}u(x_0) \end{aligned}$$

同様に、(3.17) 式の左半分からは、以下が得られる：

$$\begin{aligned} x > x_0 \Rightarrow e^{Kx}u(x) \geq e^{Kx_0}u(x_0) \Rightarrow &\quad u(x) \geq e^{-K(x-x_0)}u(x_0) \\ x < x_0 \Rightarrow e^{Kx}u(x) \leq e^{Kx_0}u(x_0) \Rightarrow &\quad u(x) \leq e^{-K(x-x_0)}u(x_0) \end{aligned}$$

従って、関数 $u(x)$ は、次の**グロンウォールの不等式**をみたす：

$$u(x_0)e^{-K|x-x_0|} \leq u(x) \leq u(x_0)e^{-K|x-x_0|}, \quad \forall x \in J$$

あるいは、

$$|u(x)| \leq u(x_0)e^{-K|x-x_0|}, \quad \forall x \in J \tag{3.18}$$

ところで、初期条件 (3.16) より

$$u(x_0) = |z(x_0)|^2 + |z'(x_0)|^2 = 0$$

であるから、(3.18) 式により、$u(x) = |z(x)|^2 + |z'(x)|^2 \equiv 0$ を得る。

以上より、$z(x) = y_1(x) - y_2(x) \equiv 0$ となり、解の一意性が示された。

□

ここでは詳しく取り上げないが、逐次近似法と同値な手法である「バナッハの不動点定理」を用いて、単独の（非線形）微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

の解が一意に存在することを示すことができる。ただし、$f(x,y)$ は 2 次元の領域 Ω で定義された連続的微分可能な関数である。

例 3.2 一意性が成り立たない例：解が複数個存在する例を取り上げる。初期値問題

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^{1/3} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

は、

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t \leq c \\ \left(\frac{2}{3}(t-c)\right)^{3/2}, & t > c \end{cases}$$

という形の関数を解として持つ。ここで任意定数cは、非負値である。また、特異解 $x(t) \equiv 0$ も、この初期値問題の解であるから、解の一意性は成り立たない。

3.2 一般解

前節の基本定理 3.1 を活用して、2 階線形微分方程式の解全体の集合がどのようになっているかを調べる。関数 $p_0(x), p_1(x), p_2(x)$ を区間 J で連続として、微分方程式

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y$$

を考える。これは、（少なくとも）2 回連続微分可能な関数 $y(x)$ に、微分、乗法、加法という一連の演算を施して、新しい連続関数を作るという操作を表している。このように、ある集合に属する関数のおのおのに、何らかの法則で、別の関数を対応させる働きを、**作用素**と呼ぶ。関数 y に、関数 $p_0''y'' + p_1y' + p_2y$ を対応させる際の基本的な演算は微分演算であるから、このような作用素を**（常）微分作用素**という。このような作用素を記号 L で表す：

$$L\,[y] = p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y \tag{3.19}$$

$y(x),\ \ z(x)$ を 2 回連続的微分可能な関数とすれば、その一次結合 $\alpha y(x) + \beta z(x)$（α, β は定数）も 2 回連続的微分可能で、$L[\alpha + \beta]$ が定義でき、次の関係が成り立つ：

$$L\,[\alpha y + \beta z] = \alpha L\,[y] + \beta L\,[z]$$

この性質をもつ作用素を線形作用素と呼ぶ。線形常微分方程式というのは、線形常微分作用素 L を用いて

$$L[y] = f(x)$$

と書ける方程式にほかならない。斉次の場合は、$L[y] = 0$ となる。

補題 3.2 Lを線形微分作用素 (*3.19*) とする。関数$y(x)$が$L\,[y] = f(x)$の解で、$z(x)$が $L\,[y] = g(x)$ の解ならば、その一次結合 $\alpha y(x) + \beta z(x)$ は $L\,[y] = \alpha f(x) + \beta g(x)$ の解である。

この補題 3.2 は、線形作用素の基本的な性質を表わすもので、**重ね合わせの原理**と呼ばれている。この原理に従えば、斉次微分方程式 $L[y] = 0$ の有限個の解 $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ の一次結合

$$c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x)$$

（$c_1, \ldots, c_n$ は定数）は、また同じ方程式 $L[y] = 0$ の解になる。

3.3 斉次常微分方程式の一般解

$p(x), q(x)$ は区間 J で連続な関数とする。2 階斉次微分方程式

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{3.20}$$

の任意の 2 つの解 $y_1(x), y_2(x)$ から作った行列式

$$W[x; y_1, y_2] := \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$$

を、$y_1(x), y_2(x)$ の**ロンスキー**（Wronski）**行列式**と呼ぶ。

定理 3.3 微分方程式（*3.20*）の解 $y_1(x), y_2(x)$ のロンスキー行列式は次の関係式をみたす。

$$W[x; y_1, y_2] = W[x_0; y_1, y_2] \exp\left[-\int_{x_0}^{x} p(t)dt\right], \quad x_0, x \in J \tag{3.21}$$

証明. 簡単のために、$W(x) = W[x; y_1, y_2]$ とおくと、

$$\begin{aligned} W'(x) &= y_1(x)y_2''(x) - y_1''(x)y_2(x) \\ &= y_1(x)\left[-p(x)y_2'(x) - q(x)y_2(x)\right] - \left[-p(x)y_1'(x) - q(x)y_1(x)\right] y_2(x) \\ &= -p(x)\left[y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)\right] = -p(x)W(x) \end{aligned}$$

より、関数 $W(x)$ は *1* 階線形微分方程式

$$W'(x) + p(x)W(x) = 0$$

をみたす。これを解いて（*3.21*）式を得る。
□

この定理 3.3 より、$y_1(x), y_2(x)$ のロンスキー行列式は、

$$\exp\left[-\int_{x_0}^{x} p(t)dt\right] \neq 0$$

より、
$$W(x_0) = W[x_0; y_1, y_2] \neq 0$$
であれば、区間 J のどの点でも、零にはならない。一方、$W(x_0) = 0$ であれば、J で恒等的に零になる。つまり、ある一点の性質が区間に反映される。

ロンスキー行列式を用いると、斉次方程式の二つの解が一次独立かどうかを判定できる。

定理 3.4 斉次微分方程式（*3.20*）の二つの解 $y_1(x), y_2(x)$ が区間 J で一次独立であるための必要十分条件は
$$W[x; y_1, y_2] \neq 0, \quad \forall x \in J$$
である。

証明. (I) (必要性）点 $x_0 \in J$ で
$$W[x_0; y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y\prime_2(x_0) \end{vmatrix} = 0$$
とする。このとき、2 つのベクトル $(y_1(x_0), y_1'(x_0))$, $(y_2(x_0), y_2'(x_0))$ は、一次従属になるので、
$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = 0, \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2' y_2'(x_0) = 0 \end{cases}$$
となる定数 $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ が存在する。そこで、
$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$
とおく。すると関数 $y(x)$ は、補題 3.2 より、(3.20）式の解である。x_0 では初期条件 $y(x_0) = 0,\ y'(x_0) = 0$ をみたすので、基本定理 3.1 より、$y(x)$ は
$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0, \quad \forall x \in J$$
である。したがって、$y_1(x), y_2(x)$ は、区間 J で一次従属である。

(II) （十分性）逆に、区間 J で関数 $y_1(x), y_2(x)$ が一次従属であるとする。つまり、適当な定数 c_1, c_2 が存在して、
$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0, \quad (c_1, c_2) \neq (0, 0)$$
が成り立つとする。このとき、両辺を x で微分して、
$$c_1 y_1'(x) + c_2(x) y_2'(x) = 0$$

が成り立ち、２つをまとめると、

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y\prime_2(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall x \in J$$

が成り立つ。$(c_1, c_2) \neq (0,0)$ なので、定数行列は、逆行列をもたない。これは、

$$W\left[x; y_1, y_2\right] = 0$$

を意味する。

□

定理 3.3 と定理 3.4 を組み合わせれば J の一点でロンスキー行列式が 0 かどうかを調べれば、解 $y_1(x), y_2(x)$ が一次独立か否かを判定できる。

次に、斉次方程式の解全体のなす集合（解空間）の構造を明らかにする。

定理 3.5 斉次方程式（*3.20*）は２つの一次独立な解 $y_1(x), y_2(x)$ を持つ。すなわち、斉次方程式（*3.20*）の任意の解 $y(x)$ は $y_1(x), y_2(x)$ の一次結合 $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ で表される：

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

証明. まず、一次独立な解 $y_1(x), y_2(x)$ をもつことを示す。

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} \neq 0$$

なる定数 $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ をとる。（3.20）式の解で、初期条件

$$\begin{aligned} y_1(x_0) = \alpha, \quad y_1'(x_0) = \alpha'; \\ y_2(x_0) = \beta, \quad y_2'(x_0) = \beta' \end{aligned}$$

をみたすものを、それぞれ、$y_1(x), y_2(x)$ とする。定理 3.1 より、これらは、区間 J で存在する。

さて、

$$W[x_0; y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} \neq 0$$

であるから、$y_1(x), y_2(x)$ は区間 J で一次独立である。

次に、（3.20）式の任意の解が $y_1(x), y_2(x)$ の一次結合で表されることをしめす。関数 $y(x)$ を (3.20) 式の任意の解として、初期条件

$$\begin{cases} y(x_0) = \gamma, \\ y'(x_0) = \gamma' \end{cases}$$

をみたすとする。連立一次方程式

$$\begin{cases} c_1\alpha + c_2\beta = \gamma, \\ c_1\alpha' + c_2\beta' = \gamma' \end{cases}$$

あるいは、その行列形

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma' \end{pmatrix}$$

の一意的な解を c_1, c_2 として、関数

$$z(x) := y(x) - c_1 y_1(x) - c_2 y_2(x)$$

を作る。$z(x)$ は (3.20) 式の解であり、かつ初期条件

$$\begin{cases} z(x_0) = \gamma - (c_1\alpha + c_2\beta) = 0, \\ z'(x_0) = \gamma' - (c_1\alpha' + c_2\beta') = 0 \end{cases}$$

をみたすので、解の一意性より

$$z(x) \equiv 0, \quad \forall x \in J$$

つまり、

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \quad \forall x \in J$$

以上より、任意の解 $y(x)$ が $y_1(x), y_2(x)$ の一次結合で表されることが示された。
□

注意 3.1 補題 *3.2* は、斉次方程式 *(3.20)* の解全体の集合が、複素数体 $\mathbf{C}$ 上のベクトル空間をなすことを意味し、定理 *3.5* は、そのベクトル空間の次元が 2 に等しく、関数 $y_1(x), y_2(x)$ がその基底をなすという事実を述べている。このような $y_1(x), y_2(x)$ を、方程式 *(3.20)* の、解の基本系または、**基本解**という。$y_1(x), y_2(x)$ が解の基本系ならば、

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

（c_1, c_2 は任意の定数）は微分方程式 *(3.20)* のすべての解をあらわす。その意味でこれを *(3.20)* 式の**一般解**と名付ける。

例題 3.1 定数係数の微分方程式

$$L[y] = y'' + ay' + by = 0 \tag{3.22}$$

を考える。

解答 3.1 指数関数 $e^{\lambda x}$ の形の解をさがす。

$$L\left[e^{\lambda x}\right] = (\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x}$$

より

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

をみたせば、関数 $e^{\lambda x}$ は（*3.22*）式の解になる。λ の多項式

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$$

を方程式（*3.22*）の**特性多項式**、$P(\lambda) = 0$ を**特性方程式**という。
　特性方程式が相異なる解 λ_1, λ_2 をもつときは、関数系

$$e^{\lambda_1 x}, \quad e^{\lambda_2 x}$$

が、（*3.22*）式の解の基本系になる。実際、ロンスキー行列式をとれば、これらは一次独立であることが分かる。
　特性方程式が重解 $\lambda_1 = \lambda_2$ をもつときは、

$$P(\lambda_1) = 0, \quad P'(\lambda_1) = 0$$

であり、すべての x と λ に対して成り立つ関係式、

$$L\left[e^{\lambda x}\right] = P(\lambda)e^{\lambda x}$$

を λ に関して偏微分すると、

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}L\left[e^{\lambda x}\right] = P'(\lambda)e^{\lambda x} + P(\lambda)xe^{\lambda x}$$

ここで、

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}L\left[e^{\lambda x}\right] = L\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}e^{\lambda x}\right] = L\left[xe^{\lambda x}\right]$$

であるから、$\lambda = \lambda_1$ とすれば

$$L\left[xe^{\lambda_1 x}\right] = P'(\lambda_1)e^{\lambda_1 x} + P(\lambda_1)xe^{\lambda_1 x} = 0$$

となり、関数 $xe^{\lambda_1 x}$ は $e^{\lambda_1 x}$ とともに（*3.22*）式の解になる。ロンスキー行列式をとれば、これらは一次独立であるから、特性方程式が重解をもつとき、解の基本系は

$$e^{\lambda_1 x}, \quad xe^{\lambda_1 x}$$

となる。

　最後に、特性方程式 $P(\lambda) = 0$ が共役な虚数解 $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$ を持つときを考える。

補題 3.6 関数 $p(x), q(x)$ は区間 J で実数値かつ連続とする。$y = u(x) + iv(x)$ なる複素数値関数が、微分方程式

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

の解ならば、実数値関数 $u(x), v(x)$ はいずれも方程式 $L[y] = 0$ の解である。

証明. 証明は、L の線型性より明らかである。

□

したがって、$\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \alpha + i\beta$ ならば、

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) \\ e^{\lambda_2 x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) \end{cases}$$

補題 3.6 から、関数系

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x$$

が（3.22）式の解の基本系をなすことが分かる。実際、解の取り替え行列を見てみると、

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} \\ e^{\lambda_2 x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) \\ e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x \\ e^{\alpha x}\sin\beta x \end{pmatrix}$$

ここで、取り替え行列

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

は正則であることに注意。

以上をまとめて：実係数の斉次微分方程式

$$y'' + ay' + by = 0$$

の実数値をとる一般解は、特性方程式

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

の 2 つの解によって、次の 3 つの場合に分かれる：

まとめ 3.7 *(i)* 相異なる実解 λ_1, λ_2 を持つならば、

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

(ii) 実の重解 $\lambda_1 = \lambda_2$ を持つならば、

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{\lambda_1 x}$$

(iii) 共役な虚数解 $\alpha \pm i\beta$ を持つならば、

$$y(x) = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x)$$

ここで、c_1, c_2 は任意の実定数である。一覧表にすると、以下の通りである：

場合分け	基本解
相異なる実解λ_1, λ_2	$e^{\lambda_1 x}, \quad e^{\lambda_2 x}$
実の重解$\lambda_1 = \lambda_2$	$e^{\lambda_1 x}, \quad xe^{\lambda_1 x}$
共役な虚数解$\alpha \pm i\beta$	$e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad e^{\alpha x}\sin\beta x$

変数係数の微分方程式 (3.20) の一般解を初等関数の範囲で求めることは一般には不可能である。しかし、特殊な場合には、適当な工夫によって初等関数解を得ることがある。そのような代表例として、オイラーの微分方程式を挙げる。

例 3.3 a, b, x_0 は定数として、

$$y'' + \frac{a}{x-x_0}y' + \frac{b}{(x-x_0)^2}y = 0$$

あるいは、

$$(x-x_0)^2 y'' + a(x-x_0)y' + by = 0 \tag{3.23}$$

の形の微分方程式を オイラーの微分方程式 という。点 x_0 は、この方程式の特異点である。

解答 3.2 $x > x_0$ として、

$$x - x_0 = e^t$$

とおき、微分方程式 *(3.23)* を定数係数の微分方程式に変換する。実際、

$$\begin{aligned}
&\tfrac{dy}{dt} = \tfrac{dy}{dx}\tfrac{dx}{dt} = (x-x_0)\tfrac{dy}{dx}, \\
&\tfrac{d^2y}{dt^2} = \tfrac{dx}{dt}\tfrac{dy}{dx} + (x-x_0)\tfrac{d^2y}{dx^2}\tfrac{dx}{dt} = (x-x_0)\tfrac{dy}{dx} + (x-x_0)^2\tfrac{d^2y}{dx^2}
\end{aligned}$$

だから、微分方程式 *(3.23)* は、

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (a-1)\frac{dy}{dt} + by = 0$$

この定数係数の微分方程式は、その特性方程式

$$\lambda^2 + (a-1)\lambda + b = 0$$

の解を求めることで一般解が決まる。この特性方程式を *(3.23)* の**決定方程式**と呼ぶこともある。$x_0 = 0$ のとき実係数のオイラー微分方程式の一般解は次のようにまとめられる。

(i) 決定方程式の *2* 解が相異なる実解 λ_1, λ_2 ならば、

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 x^{\lambda_1} + c_2 x^{\lambda_2}$$

(ii) 決定方程式の *2* 解が実の重解 $\lambda_1 = \lambda_2$ ならば、

$$y(x) = (c_1 + c_2 t)e^{\lambda_1 t} = (c_1 + c_2 \log x)x^{\lambda_1}$$

(iii) 決定方程式の *2* 解が共役な虚数解 $\alpha \pm i\beta$ ならば、

$$y(x) = e^{\alpha t}\left(c_1 \cos\beta t + c_2 \sin\beta t\right) = x^{\alpha}\left[c_1 \cos\left(\beta \log x\right) + c_2 \sin\left(\beta \log x\right)\right]$$

注意 3.2 オイラー方程式の解は、$x = 0$ において一般に連続ではなく、まして微分可能でもない。すなわち、方程式の特異点において、解は一般に特異性を持つ。

3.4 階数低下法

一般の斉次微分方程式 (3.20)

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

の一つの解 $y_1(x)$ が見つかった場合に，これと一次独立な他の解が $y(x) = v(x)y_1(x)$ の形で求められることを示す。関数 $v(x)$ は (3.20) を変換 $y(x) = y_1(x)v(x)$ により導いた微分方程式の解である。$y_1(x)$ と $y(x)$ のロンスキー行列式をとると、

$$\begin{aligned}
W[x; y, y_1] := \begin{vmatrix} y(x) & y_1(x) \\ y'(x) & y_1'(x) \end{vmatrix} &= y(x)y_1'(x) - y_1(x)y'(x) \\
&= v(x)y_1'(x)y_1'(x) - y_1(x)(v'(x)y_1(x) - v(x)y_1'(x)) \\
&= -v'(x) \cdot y_1'(x)^2
\end{aligned}$$

もし

$$y_1(x) \not\equiv 0, \quad v'(x) \not\equiv 0$$

であれば、これらは一次独立である。$y'(x), y''(x)$ を (3.20) に代入して

$$\begin{aligned}
&v(x)(y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x)) + v'(x)(2y_1'(x) + p(x)y_1(x)) + v''(x)y_1(x) \\
&= 0
\end{aligned}$$

関数 $y_1(x)$ は (3.20) の解であるから、左辺第一項は 0 になる。関数 $y_1(x)$ が 0 にならない任意の区間 $J' \subset J$ で

$$v''(x) + \left(p(x) + 2\frac{y_1'(x)}{y_1(x)}\right)v'(x) = 0$$

これは $v'(x)$ に関する 1 階線形微分方程式であるから、c_0 を 0 でない任意定数として、

$$\begin{aligned}
v'(x) &= c_0 \exp\left\{-\int_{x_0}^{x}\left[p(t) + 2\frac{y_1'(t)}{y_1(t)}\right]dt\right\} \\
&= \frac{c}{y_1^2(x)} \exp\left\{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt\right\} \quad (c = c_0 y_1^2(x_0))
\end{aligned}$$

さらに、もう一度積分して、

$$v(x) = c' + c\int_{x_0}^{x} \frac{1}{y_1^2(s)} \exp\left[-\int_{x_0}^{s} p(t)dt\right] ds$$

（c' は任意定数）

$x \in J'$ で $v'(x) \neq 0$ より、

$$W[x; y, y_1] = -v'(x)y_1^2(x) \neq 0$$

となり、関数 $y(x)$ と $y_1(x)$ は一次独立である。関数 $y(x)$ は $v(x)$ に $y_1(x)$ をかけて得られるが、

$$\begin{aligned} y(x) &= v(x)y_1(x) \\ &= \left(c' + c\int_{x_0}^{x} \frac{1}{y_1^2(s)} \exp\left[-\int_{x_0}^{s} p(t)dt\right] ds\right) y_1(x) \\ &= c'y_1(x) + c\int_{x_0}^{x} \frac{1}{y_1^2(s)} \exp\left[-\int_{x_0}^{s} p(t)dt\right] ds \cdot y_1(x) \end{aligned}$$

c' からは $c'y_1(x)$ がでるだけなので、c' は省略してよい。従って、$y_1(x)$ と一次独立な解 $y_2(x)$ は

$$y_2(x) = y_1(x)\int_{x_0}^{x} \frac{1}{y_1^2(s)} \exp\left[-\int_{x_0}^{s} p(t)dt\right] ds \tag{3.24}$$

によって与えられる。

3.5 非斉次常微分方程式の一般解

定理 3.8 非斉次線形微分方程式

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = f \tag{3.25}$$

の特殊解を $y_p(x)$、斉次線形微分方程式 *(3.20)*

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

の基本解を $y_1(x), y_2(x)$ とすれば、非斉次線形微分方程式 $L[y] = f(x)$ のすべての解 $y(x)$ は、次の形で表される：

$$y(x) = y_p(x) + c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

ここで、c_1, c_2 は定数である。特殊解 $y_p(x)$ の例としては、次式で定義される関数をとることができる：

$$y_p(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(t)y_2(x) - y_2(t)y_1(x)}{W[t; y_1, y_2]} f(t)dt$$

例 3.4 微分方程式

$$y'' - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}y = 1 \tag{3.26}$$

の一般解 $y(x)$ を求めよう。まず、斉次微分方程式

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$$

の *1* つの解が $y_1(x) = x$ であるから、もう１つの基本解は、階数低下法の公式 *(3.24)* によって、次式で与えられる：

$$y_2(x) = x\int^x \frac{1}{t^2}\exp\left(\int \frac{2}{s}ds\right)dt = x^2$$

従って、定理 *3.8* を認めれば、求める一般解 $y(x)$ は

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1x + c_2x^2 + x\int \tfrac{-x^2}{x^2}dx + \int \tfrac{x}{x^2}dx \\ &= c_1x + c_2x^2 + x^2\log|x| \end{aligned}$$

となる。

3.5.1 定理 3.8 の証明

非斉次微分方程式 (3.25)

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

（$p(x), q(x), f(x)$ は区間 J で連続）の解の全体の集合について考える。関数 $y_p(x)$ を方程式（3.25）の解とする。これが何らかの方法で求めることが出来たとする。$y(x)$ を（3.25）式の任意の解とすれば、

$$L[y_p] = f(x), \quad L[y] = f(x)$$

より重ね合わせの原理から、関数 $y(x) - y_p(x)$ は斉次方程式

$$y''(x) + p(x)y' + q(x)y = 0$$

を満足する。この斉次方程式の解の基本系を $y_1(x), y_2(x)$ とすれば定理 3.5 より

$$y(x) - y_p(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

すなわち、

$$y(x) = y_p(x) + c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \tag{3.27}$$

が成り立つ、つまり（3.27）式は非斉次方程式（3.25）の解全体を表現する式になる。この意味で（3.27）式を方程式（3.25）の一般解と呼ぶ。

それでは、（3.25）式の解 $y_p(x)$ はどのようにして求められるであろうか？

斉次方程式の解の基本系 $y_1(x), y_2(x)$ を用いて、解 $y_p(x)$ を

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) \tag{3.28}$$

の形で探してみる。微分して、

$$\begin{aligned} y_p' &= (u_1'y_1 + u_1y_1') + (u_2'y_2 + u_2y_2') \\ &= (u_1'y_1 + u_2'y_2) + (u_1y_1' + u_2y_2') \end{aligned}$$

そこで、関数 $u_1(x), u_2(x)$ が

$$u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0 \tag{3.29}$$

となる付帯条件を要求すると、上の式は

$$y_p' = u_1y_1' + u_2y_2'$$

となる。

もう一度微分して、

$$y_p'' = u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2'y_2' + u_2y_2''$$

関数 $y_p(x), y_p'(x), y_p''(x)$ を微分方程式（3.27）に代入すると、

$$u_1L[y_1] + u_2L[y_2] + u_1'y_1' + u_2'y_2' = f$$

ところで、$y_1(x), y_2(x)$ は斉次方程式の解なので

$$L[y_1] = L[y_2] = 0$$

よって

$$u_1'y_1' + u_2'y_2' = f \tag{3.30}$$

以上により、（3.29）式と（3.30）式を満たす関数 $u_1(x), u_2(x)$ を定めることができれば（3.28）式が微分方程式（3.27）の解になる。

（3.29）式と（3.30）式は、$u_1'(x)$, $u_2'(x)$ に関する連立一次方程式である。

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$$

係数のロンスキー行列式

$$W[x;y_1,y_2] := \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

は J で決して 0 にならないので、$u_1'(x),\ u_2'(x)$ について解くことができる。

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{W[x;y_1,y_2]} \begin{pmatrix} y_2' & -y_2' \\ -y_1' & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$$

これより、

$$u_1' = \frac{-f\,y_2}{W[x;y_1,y_2]}, \quad u_2' = \frac{f\,y_1}{W[x;y_1,y_2]}$$

これらを積分すれば、$u_1(x), u_2(x)$ が求められる。

例えば、$x_0 \in J$ として、

$$u_1(x) = -\int_{x_0}^{x} \frac{y_2(t)f(t)}{W[t;y_1,y_2]}dt, \quad u_2(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(t)f(t)}{W[t;y_1,y_2]}dt$$

を採用することができる。このとき、(3.28) 式は

$$y_p(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(t)y_2(x) - y_2(t)y_1(x)}{W[t;y_1,y_2]} f(t)dt \tag{3.31}$$

となる。$y_p(x_0) = y_p'(x_0) = 0$ より $y_p(x)$ は点 x_0 に応じて一意的に存在する。

斉次微分方程式の解の基本系を用いて、上述の方法で非斉次方程式の解の一つ（これを特殊解と呼ぶ）を見つけることを**定数変化法**という。

注意 3.3 定理 *3.8* は、非斉次方程式 *(3.25)* の解全体の集合が、複素数体 $\mathbf{C}$ 上のベクトル空間を $y_p(x)$ だけ平行移動したアファイン空間をなすことを意味し、そのアファイン空間の次元が 2 に等しく、関数 $y_1(x), y_2(x)$ がその基底をなすという事実を述べている。

4　行列の指数関数と 2 階線形常微分方程式

4.1　序論

この章では、線形代数学の考え方を利用することにより、**行列の指数関数を用いた**解法について紹介する。

始めに、a を定数として、次の 1 階線形常微分方程式に対する初期値問題を考える：

$$\begin{cases} u'(t) = au(t), \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{4.1}$$

この問題 (4.1) の解は、明らかに、次の指数関数で与えられる：

$$u(t) = u_0\, e^{at} \tag{4.2}$$

次に、a, b を定数として、2 階線形常微分方程式に対する初期値問題を考える：

$$\begin{cases} u''(t) + 2bu'(t) + cu(t) = 0, \\ u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1 \end{cases} \tag{4.3}$$

この初期値問題 (4.3) を、連立 1 階常微分方程式系に変換して解くことを考える。
そのために、

$$\begin{cases} u_1(t) := u(t), \\ u_2(t) := u'(t) \end{cases}$$

とおくと、

$$\begin{cases} u_1(0) = u(0) = u_0, \\ u_2(0) = u'(0) = u_1 \end{cases}$$

であって、

$$\begin{cases} u_1'(t) & = u'(t) = u_2(t), \\ u_2'(t) & = u''(t) = -2bu'(t) - cu(t) \\ & = -2bu_2(t) - cu_1(t) \end{cases}$$

これらをまとめて、問題（4.3）を行列表示すると、

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & -2b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

そこで、

$$U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}, U_0 = \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & -2b \end{pmatrix}$$

とおけば、問題（4.3）は、次の見やすい形に書ける：

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}U(t) = AU(t), \\ U(0) = U_0 \end{cases} \tag{4.4}$$

従って、初期値問題（4.1）の解（4.2）のアナロジーで、初期値問題（4.4）の解は、次の形で求められることが期待される：

$$U(t) = e^{tA} U_0 \tag{4.5}$$

ここで、**指数行列**e^{tA} は、行列の無限級数

$$e^{tA} := I + tA + \frac{(tA)^2}{2!} + \cdots + \frac{(tA)^n}{n!} + \cdots \tag{4.6}$$

で定義される。

4.2 指数行列 e^{tA} の計算

実際の問題として、行列の指数関数 e^{tA} の定義式（4.6）を直接計算することは、非常に困難である。そこで、行列 A を対角化あるいはジョルダン標準形を求めてから、e^{tA} を計算する方法を考える。

以下では、その計算例を示す。まず、行列 A の固有値を求める。

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ c & \lambda + 2b \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2b\lambda + c$$

4.2.1 判別式 $D/4 = b^2 - c \neq 0$ の場合

固有値は、次の 2 つである：

$$\begin{cases} \lambda_1 = -b + \sqrt{b^2 - c}, \\ \lambda_2 = -b - \sqrt{b^2 - c} \end{cases}$$

次に、対応する固有ベクトルを求める。

$$A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & -2b \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = -b + \sqrt{b^2 - c}$$

これを解いて、例えば、

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -b + \sqrt{b^2 - c} \end{pmatrix}$$

同様にして、

$$\begin{aligned}
&A\begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix}=\lambda_2\begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix},\\
&A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -c & -2b\end{pmatrix},\quad \lambda_2=-b-\sqrt{b^2-c}
\end{aligned}$$

これを解いて、例えば、

$$\begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -b-\sqrt{b^2-c}\end{pmatrix}$$

そこで、

$$P:=\begin{pmatrix}1 & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -b+\sqrt{b^2-c} & -b-\sqrt{b^2-c}\end{pmatrix}$$

とおけば、

$$\begin{aligned}
&AP=P\Lambda,\\
&\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-b+\sqrt{b^2-c} & 0\\ 0 & -b-\sqrt{b^2-c}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

すなわち、

$$P^{-1}AP=\Lambda$$

だから、

$$\begin{aligned}
&P^{-1}e^{tA}P\\
&=P^{-1}\left(I+tA+\tfrac{(tA)^2}{2!}+\cdots+\tfrac{(tA)^n}{n!}+\cdots\right)P\\
&=P^{-1}P+t\left(P^{-1}AP\right)+\tfrac{t^2}{2!}\left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}AP\right)+\cdots+\\
&\quad+\tfrac{t^n}{n!}\underbrace{\left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}AP\right)\cdots\left(P^{-1}AP\right)}_{n\text{ 乗}}+\cdots\\
&=I+t\Lambda+\tfrac{(t\Lambda)^2}{2!}+\cdots+\tfrac{(t\Lambda)^n}{n!}+\cdots\\
&=e^{t\Lambda}
\end{aligned}$$

ところで、行列 Λ のべき乗は、容易に計算されて、

$$\begin{aligned}
\Lambda^2&=\begin{pmatrix}\lambda_1^2 & 0\\ 0 & \lambda_2^2\end{pmatrix},\\
\Lambda^n&=\begin{pmatrix}\lambda_1^n & 0\\ 0 & \lambda_2^n\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

従って、指数行列 $e^{t\Lambda}$ の定義式（4.6）は、容易に求められる：

$$
\begin{aligned}
e^{t\Lambda} &= I + t\Lambda + \tfrac{(t\Lambda)^2}{2!} + \cdots + \tfrac{(t\Lambda)^n}{n!} + \cdots \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} + \tfrac{t^2}{2!}\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} + \cdots \\
&\quad + \tfrac{t^n}{n!}\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} + \cdots \\
&= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

以上より、指数関数 e^{tA} の定義式（4.6）は、

$$
\begin{aligned}
e^{tA} &= Pe^{t\Lambda}P^{-1} \\
&= \tfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \tfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\begin{pmatrix} \lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t} & -e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1\lambda_2\left(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}\right) & -\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

初期値問題（4.4）の解（4.5）は、

$$
\begin{aligned}
U(t) &= \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = e^{tA}U_0 \\
&= \tfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\begin{pmatrix} \lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t} & -e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1\lambda_2\left(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}\right) & -\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

初期値問題（4.3）の解は第一成分 $u_1(t) := u(t)$ で与えられることに注意して、以上の結果を整理すると、

(i) 判別式 $D/4 = b^2 - c > 0$ の場合：

$$
u(t) = e^{-bt}\left(Ae^{t\sqrt{b^2-c}} + Be^{-t\sqrt{b^2-c}}\right)
$$

ここで、A, B は、初期値から決まる定数

(ii) 判別式 $D/4 = b^2 - c < 0$ の場合：

$$
u(t) = e^{-bt}\left(A\sin(\sqrt{b^2-c}t) + B\cos(\sqrt{b^2-c}t)\right)
$$

ここで、A, B は、初期値から決まる定数

4.2.2　判別式 $D/4 = b^2 - c = 0$ の場合

このとき、固有値は唯１つである。

$$
\lambda = -b
$$

次に、対応する固有ベクトルを求める。

$$
\begin{aligned}
&A\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix},\\
&A=\begin{pmatrix}0&1\\ -c&-2b\end{pmatrix},\quad \lambda=-b
\end{aligned}
$$

これを解くと、例えば、

$$
\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -b\end{pmatrix}
$$

さらに、ジョルダン標準形を求めるために、

$$
\begin{aligned}
&A\begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \lambda\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix},\\
&A=\begin{pmatrix}0&1\\ -c&-2b\end{pmatrix},\quad \lambda=-b
\end{aligned}
$$

これを解くと、

$$
\begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}
$$

そこで、

$$
P:=\begin{pmatrix}1&0\\ \lambda&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\ -b&1\end{pmatrix}
$$

とおけば、

$$
\begin{aligned}
&AP=P\Lambda,\\
&\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda&1\\ 0&\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-b&1\\ 0&-b\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

すなわち、

$$
P^{-1}AP=\Lambda
$$

だから、

$$
\begin{aligned}
&P^{-1}e^{tA}P\\
&=P^{-1}\left(I+tA+\tfrac{(tA)^2}{2!}+\cdots+\tfrac{(tA)^n}{n!}+\cdots\right)P\\
&=P^{-1}P+t\left(P^{-1}AP\right)+\tfrac{t^2}{2!}\left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}AP\right)+\cdots+\\
&\quad+\tfrac{t^n}{n!}\underbrace{\left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}AP\right)\cdots\left(P^{-1}AP\right)}_{n\text{ 乗}}+\cdots\\
&=I+t\Lambda+\tfrac{(t\Lambda)^2}{2!}+\cdots+\tfrac{(t\Lambda)^n}{n!}+\cdots\\
&=e^{t\Lambda}
\end{aligned}
$$

ところで、行列 Λ のべき乗は容易に計算されて、

$$\Lambda^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix},$$
$$\Lambda^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

従って、指数行列 $e^{t\Lambda}$ は、容易に求められる：

$$\begin{aligned} e^{t\Lambda} &= I + t\Lambda + \tfrac{(t\Lambda)^2}{2!} + \cdots + \tfrac{(t\Lambda)^n}{n!} + \cdots \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} + \tfrac{t^2}{2!} \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} + \cdots \\ &\quad + \tfrac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} + \cdots \\ &= \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

以上より、指数関数 e^{tA} の定義式（4.6）は、

$$\begin{aligned} e^{tA} &= Pe^{t\Lambda}P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\lambda t} - \lambda te^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ -\lambda^2 te^{\lambda t} & (\lambda t + 1)e^{\lambda t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

初期値問題（4.4）の解は、

$$\begin{aligned} U(t) &= \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = e^{tA}\, U_0 \\ &= \begin{pmatrix} e^{\lambda t} - \lambda te^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ -\lambda^2 te^{\lambda t} & (\lambda t + 1)e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

初期値問題（4.3）の解は第一成分 $u_1(t) := u(t)$ で与えられることに注意して、以上の結果を整理すると、

(iii) 判別式 $D/4 = b^2 - c = 0$ の場合：

$$\begin{aligned} &u(t) = e^{-bt}\, (A + Bt)\,, \\ &A = u_0, \quad B = u_1 + bu_0 \end{aligned}$$

5　常微分方程式の境界値問題

第 3 章では、2 階線形微分方程式を、主として初期値問題の立場から考察した。3.1 節で触れたように、ここでは、もう一方の重要な問題である境界値問題について考える。

それは、線形微分方程式

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0, \quad a < \forall x < b \tag{5.1}$$

の解で、区間の端点においてあらかじめ指定された条件

$$\begin{cases} B_a[y] = \alpha y(a) + \alpha' y'(a) = \gamma, \\ B_b[y] = \beta y(b) + \beta' y'(b) = \delta \end{cases} \tag{5.2}$$

を満足するものを求めよ、という問題である。ここで、$\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ は与えられた定数で、条件

$$\alpha^2 + \alpha'^2 \neq 0, \quad \beta^2 + \beta'^2 \neq 0$$

を満たす。(5.1) 式は**境界条件**と呼ばれる。区間の両端で条件が指定されているという意味で、この種の問題を、**2 点境界値問題**と呼ぶことがある。

境界値問題は、偏微分方程式、積分方程式、変分学などと深い係わりを持つ理論的にも応用上にも重要な問題である。本章ではこの境界値問題とそれに関連する事項について取り上げる。

5.1 自己共役な境界値問題

以下、特に断らなければ、与えられた関数も、未知関数も、諸定数も、すべて実数の範囲で考えることにする。閉区間 $J = [a, b]$ で、関数 $p_0(x)$ は連続的微分可能かつ正、関数 $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ は連続と仮定する。方程式 (5.1) に、関数

$$\frac{1}{p_0(x)} \exp\left[\int_a^x \frac{p_1(\xi)}{p_0(\xi)} d\xi\right]$$

を掛けて、

$$p(x) := \exp\left[\int_a^x \frac{p_1(\xi)}{p_0(\xi)} d\xi\right], \quad q(x) := \frac{p_2(x)}{p_0(x)} p(x), \quad f(x) := \frac{p_3(x)}{p_0(x)} p(x)$$

とおくと、(5.1) 式は

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + q(x)y = f(x) \tag{5.3}$$

となる。ここで、$p(x)$ は連続的微分可能かつ正、$q(x), f(x)$ は連続であることに注意。

(5.3) 式を**自己共役形あるいは発散形**の微分方程式と呼ぶ。左辺の微分作用素

$$L[y] = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + q(x)y \tag{5.4}$$

を自己共役 (self-adjoint) な微分作用素という。今後、一般論では、微分方程式は自己共役になっているものとする。

例 5.1 エアリー *(Airy)* の微分方程式

$$y'' + xy = 0$$

は自己共役である。実際、

$$p(x) = 1, \quad q(x) = x$$

例 5.2 ベッセル（*Bessel*）**の**微分方程式

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0$$

を自己共役形に直せば

$$\frac{d}{dx}\left[xy'\right] + \left(x - \frac{\alpha^2}{x}\right)y = 0$$

ここで、

$$p(x) = x, \quad q(x) = x - \frac{\alpha^2}{x}$$

まず、簡単な計算から、次の**ラグランジュの等式**と**グリーンの公式を得る：**

補題 5.1 L を自己共役作用素 *(5.4)* とすると、区間 J で 2 回連続的微分可能な任意の関数 $y(x),\ z(x)$ に対して、次の 2 式が成り立つ：

$$zL\left[y\right] - yL\left[z\right] = \frac{d}{dx}\left[p(x)(y'z - yz')\right], \tag{5.5}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \left\{zL\left[y\right] - yL\left[z\right]\right\} dx = \left[p(x)(y'z - yz')\right]_{x=x_1}^{x=x_2} \tag{5.6}$$

境界値問題 (5.2), (5.3) において、右辺がゼロの場合、すなわち、境界値問題

$$L\left[y\right] = \frac{d}{dx}\left[p(x)y'\right] + q(x)y = 0 \tag{5.7}$$

$$\begin{cases} B_a\left[y\right] = \alpha y(a) + \alpha' y'(a) = 0, \\ B_b\left[y\right] = \beta y(b) + \beta' y'(b) = 0 \end{cases} \tag{5.8}$$

を**斉次境界値問題**と呼ぶ。

定理 3.1 によれば、斉次な初期値問題

$$L\left[y\right] = 0, \quad y(x_0) = y'(x_0) = 0$$

の解は、恒等的に 0 であるもの $y(x) \equiv 0$ (自明解) に限られる。しかしながら、斉次境界値問題は (必ず自明解を持つが) 自明でない解を持つことがある。付随する斉次境界値問題が、自明でない解をもつかどうかは、初めの境界値問題が解けるかどうかに重大な影響を与える。

実際、次の定理が成り立つ：

定理 5.2 *(I)* 境界値問題 *(5.7), (5.8)* の解が自明解のみならば、境界値問題 *(5.2), (5.3)* は、任意のデータ $f(x)$, γ, δ に対して一意的な解を持つ。

(II) 境界値問題 *(5.7), (5.8)* が自明でない解を持つならば、境界値問題 *(5.2), (5.3)* は $f(x)$, γ, δ が適当な条件を満たす場合に限って解をもつ。そのとき、解は無数に存在する。

証明. (5.7) の解の基本系を $y_1(x)$, $y_2(x)$、(5.3) 式の特殊解を $y_p(x)$ とすれば、定理 1.5 より、(5.3) 式の一般解は、次式で与えられる：

$$y(x) = y_p(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

ここで、c_1, c_2 は定数である。この関数が、境界条件 (5.2) を満たすには

$$\begin{cases} B_a[y] = c_1 B_a[y_1] + c_2 B_a[y_2] + B_a[y_p] = \gamma, \\ B_b[y] = c_1 B_b[y_1] + c_2 B_b[y_2] + B_b[y_p] = \delta \end{cases}$$

あるいは、

$$\begin{pmatrix} B_a[y_1] & B_a[y_2] \\ B_b[y_1] & B_b[y_2] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma - B_a[y_p] \\ \delta - B_b[y_p] \end{pmatrix} \tag{5.9}$$

でなければならない。これは c_1, c_2 に関する連立一次方程式で、係数の行列式は

$$D = \begin{vmatrix} B_a[y_1] & B_a[y_2] \\ B_b[y_1] & B_b[y_2] \end{vmatrix}$$

である。

(I) 境界値問題 (5.7), (5.8) の解が**自明解のみの場合**：関数

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

が境界条件

$$B_a\left[y\right] = B_b\left[y\right] = 0$$

を満たすとき、

$$c_1 = c_2 = 0$$

となるので、斉次連立一次方程式

$$\begin{cases} c_1 B_a\left[y_1\right] + c_2 B_b\left[y_2\right] = 0, \\ c_1 B_b\left[y_2\right] + c_2 B_b\left[y_2\right] = 0 \end{cases} \tag{5.10}$$

の解は $c_1 = c_2 = 0$ に限る。従って

$$D = \begin{vmatrix} B_a[y_1] & B_a[y_2] \\ B_b[y_1] & B_b[y_2] \end{vmatrix} \neq 0$$

このとき、(5.9) 式は任意の γ, δ, $y_p(x)$ に対して一意的な解 c_1, c_2 をもつ。つまり、境界値問題 (5.2), (5.3) は解をもつ。

次に、解の一意性について証明する：境界値問題 (5.2), (5.3) の 2 つの解を

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x), \\ \tilde{y}(x) &= \tilde{c}_1 y_1(x) + \tilde{c}_2 y_2(x) + y_p(x) \end{aligned}$$

とする。このとき、

$$\tilde{y}(x) - y(x) = (\tilde{c}_1 - c_1) y_1(x) + (\tilde{c}_2 - c_2) y_2(x),$$

であって、$y_1(x)$, $y_2(x)$ は (5.7) 式の解なので、

$$L[\tilde{y} - y] = (\tilde{c}_1 - c_1) L[y_1] + (\tilde{c}_2 - c_2) L[y_2] = 0$$

よって、関数 $\tilde{y}(x) - y(x)$ も (5.7) 式の解である。さらに、

$$\begin{cases} B_a[\tilde{y} - y] = B_a[\tilde{y}] - B_a[y] = \gamma - \gamma = 0, \\ B_b[\tilde{y} - y] = B_b[\tilde{y}] - B_b[y] = \delta - \delta = 0 \end{cases}$$

より、$\tilde{y}(x) - y(x)$ は境界条件 (5.8) を満たす。

以上から、$\tilde{y}(x) - y(x)$ は境界値問題 (5.7), (5.8) の解であるが、解は自明解のみだから、

$$\tilde{y}(x) - y(x) \equiv 0,$$

すなわち、

$$\tilde{y}(x) \equiv y(x)$$

となり、境界値問題 (5.2), (5.3) は一意的な解を持つ。

(II) 境界値問題 (5.7), (5.8) が**自明でない解をもつ場合**：このときは、(5.10) 式は $c_1 = c_2 = 0$ 以外の解をもつから、$D = 0$. (5.9) 式が解をもつためには、$\gamma - B_a[y_p]$, $\delta - B_b[y_p]$ が何か適当な条件を満たさなければならない。つまり、$f(x)$, γ, δ が制約を受けなければならない。この場合、(5.9) 式の解 c_1, c_2 の組は無数にあることに注意。□

5.2　グリーン関数

閉区間 $J = [a, b]$ において関数 $p_0(x)$ は連続的微分可能かつ正、$p_1(x), p_2(x)$ は J で連続と仮定する。2 階線形作用素 L を

$$L[y] \equiv p_0(x) y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y$$

によって定義する。区間 J で連続な関数 $f(x)$ が与えられた時

$$L(y) = f(x) \tag{5.11}$$

および、端点 $x = a, x = b$ における境界条件：

$$
(5.12) \qquad \begin{cases} B_a\,[y] = \alpha y(a) + \alpha' y'(a) = 0, \\ B_b\,[y] = \beta y(b) + \beta' y'(b) = 0 \end{cases}
$$

を同時にみたす解 $y(x)$ を求める問題を考える。それを積分表示式

$$
(5.13) \qquad y(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi
$$

の形で表すことを試みる。ただし、関数 $G(x, \xi)$ には、以下の３条件を課す：

( ) 関数 $G(x, \xi)$ は、区間

$$
[a, b] \times [a, b] = \{(x, \xi) : a \leq x, \xi \leq b\}
$$

において x, ξ の連続関数である。

( ) $x \neq \xi$ ならば、関数 $G_x(x, \xi), G_{xx}(x, \xi)$ は x, ξ の連続関数であり、

$$
L\,[G(x, \xi)] = 0
$$

が成り立つ。また、すべての $\xi \in J$ に対してつぎの境界条件を満たす：

$$
\begin{cases} B_a\,[G(\cdot, \xi)] = \alpha G(a, \xi) + \alpha' G'(a, \xi) = 0, \\ B_b\,[G(\cdot, \xi)] = \beta G(b, \xi) + \beta' G'(b, \xi) = 0 \end{cases}
$$

(III) 関数 $G_x(x, \xi)$ は $x = \xi$ で不連続関数であり、

$$
G_x(x+0, x) - G_x(x-0, x) = \frac{1}{p_0(x)} \quad \left(= G_x(x, x-0) - G_x(x, x+0)\right).
$$

上の性質 (I), (II), (III) をもつ関数 $G(x, \xi)$ を境界値問題 (5.11), (5.12) の**グリーン関数**という。

例 5.3 閉区間 $[-1, 1]$ における境界値問題

$$
\frac{d^2 y}{dx^2} = 0, \quad y(-1) = y(1) = 0
$$

のグリーン関数は

$$
G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\xi - 1)(x + 1), & x \leq \xi, \\ \frac{1}{2}(x - 1)(\xi + 1), & \xi \leq x \end{cases}
$$

である。

定理 5.3 グリーン関数 $G(x,\xi)$ に対して、

$$y(x) = \int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi$$

と定めると、関数 $y(x)$ は境界値問題 *(5.11), (5.12)* の解である。

証明. まず、

$$y(x) = \int_a^x G(x,\xi)f(\xi)d\xi + \int_x^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi$$

と積分範囲を分けて両辺を 2 回微分すると

$$\begin{aligned} &y'(x) = \textstyle\int_a^b G_x(x,\xi)f(\xi)d\xi \\ &y''(x) \textstyle\int_a^b G_{xx}(x,\xi)f(\xi)d\xi + \frac{1}{p_0(x)}f(x). \end{aligned}$$

したがって、

$$L\left[y\right] = \int_a^b L\left[G(x,\xi)\right] f(\xi)\, d\xi + f(x)$$

が成り立つ。さらに、積分範囲を $[a,x]$, $[x,b]$ に分ければ、おのおのの区間で $L\left[G(x,\xi)\right] = 0$ であるから

$$\begin{aligned} L\left[y\right] &= \int_a^b L\left[G(x,\xi)\right] f(\xi)\, d\xi + f(x) \\ &= \int_a^x L\left[G(x,\xi)\right] f(\xi)\, d\xi + \int_x^b L\left[G(x,\xi)\right] f(\xi)\, d\xi + f(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

となる。

境界条件 $B_a\left[G\right]$ については

$$\begin{aligned} B_a\left[G\right] &= \alpha \textstyle\int_a^b G(a,\xi)f(\xi)d\xi + \alpha' \int_a^b G_x(a,\xi)f(\xi)d\xi \\ &= \textstyle\int_a^b B_a\left[G(x,\xi)\right] f(\xi)\, d\xi = 0 \end{aligned}$$

境界条件 $B_b\left[G\right]$ についても、同様に、

$$\begin{aligned} B_b\left[G\right] &= \beta \textstyle\int_a^b G(b,\xi)f(\xi)d\xi + \beta' \int_a^b G_x(b,\xi)f(\xi)d\xi \\ &= \textstyle\int_a^b B_b\left[G(x,\xi)\right] f(\xi)\, d\xi = 0 \end{aligned}$$

以上から、関数 $y(x)$ は境界値問題 (5.11), (5.12) の解である。 □

5.2.1　グリーン関数 $G(x,\xi)$ の構成

まず、基本解 $K(x,\xi)$ を構成する。そこで、

$$y(x) = \int_a^b K(x,\xi) f(\xi) d\xi$$

とおけば、$y(x)$ は方程式 (5.11) の解である。ところが、これは境界条件 (5.12) を満たさない。そこで境界条件を満たすように $K(x,\xi)$ を補正して、**グリーン関数**$G(x,\xi)$ を構成する。

さて、$L[y]=0$ の一組の解の基本系を $y_1(x)$, $y_2(x)$ とする。これらを変数 $\xi \in J$ の関数として、そのロンスキー行列式を

$$W[\xi] := W[\xi; y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1(\xi) & y_2(\xi) \\ y_1'(\xi) & y_2'(\xi) \end{vmatrix} = y_1(\xi) y_2'(\xi) - y_2(\xi) y_1'(\xi)$$

で表す。$x \in J$ の関数 $K(x,\xi)$ を次式で定義する：

$$K(x,\xi) = \begin{cases} \frac{1}{p_0(\xi) W(\xi)} \begin{vmatrix} y_1(\xi) & y_2(\xi) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix} & \text{if } \xi \leq x, \\ 0 & \text{if } \xi > x. \end{cases} \tag{5.14}$$

このとき、(5.14) 式で定義された関数 $K(x,\xi)$ は次の性質をもつ：

補題 5.4 *(1)* $K(x,\xi)$ は、閉区間 $[a,b] \times [a,b] = \{(x,\xi) : a \leq x, \xi \leq b\}$ において x,ξ の連続関数である。

(2) $x \neq \xi$ ならば、$K_x(x,\xi), K_{xx}(x,\xi)$ は x,ξ の連続関数であり、

$$L[K(x,\xi)] = 0$$

(3) 関数 $K_x(x,\xi)$ は $x=\xi$ で不連続である：

$$\begin{cases} K_x(\xi+0,\xi) = K_x(\xi,\xi-0) = \frac{1}{p_0(\xi)}, \\ K_x(\xi-0,\xi) = K_x(\xi,\xi+0) = 0 \end{cases}$$

証明. (1) まず、

$$K(\xi+0,\xi) = K(\xi-0,\xi) = 0 \tag{5.15}$$

したがって、関数 $K(x,\xi)$ は、ξ も J の中を動くとき、x,ξ の関数として連続である。

(2) 関数 $K_x(x,\xi)$ は $x \neq \xi$ ならば、定義から、x に関する 2 階導関数までが x,ξ について連続である。また、偏導関数 $K_x(x,\xi)$ は $x=\xi$ で不連続であり、$\frac{1}{p_0(\xi)}$ の跳びをもつが、$p_0(\xi) \neq 0$ より x,ξ の関数として有界である。実際、

$$K_x(x,\xi) = \begin{cases} \frac{1}{p_0(\xi)W(\xi)} \begin{vmatrix} y_1(\xi) & y_2(\xi) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} & \text{if } \xi \leq x, \\ 0 & \text{if } \xi > x. \end{cases}$$

だから、

$$\begin{cases} [c]cK_x(\xi+0,\xi) = K_x(\xi,\xi-0) = \frac{1}{p_0(\xi)}, \\ K_x(\xi-0,\xi) = K_x(\xi,\xi+0) = 0 \end{cases} \tag{5.16}$$

さらに、

$$L\left[K(x,\xi)\right] = 0 \quad (x \neq \xi) \tag{5.17}$$

が成り立つ。 □

そこで、

$$y(x) := \int_a^b K(x,\xi)f(\xi)d\xi = \int_a^x K(x,\xi)f(\xi)d\xi$$

とおくと、次が成り立つ：

補題 5.5 関数 $y(x)$ は、区間 J において連続であるが、さらに、この区間 J において 2 回連続的微分可能で、微分方程式

$$L\left[y\right] \equiv p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f$$

をみたす。

証明. (1) $h > 0$ のとき、

$$\begin{aligned} &\tfrac{y(x+h)-y(x)}{h} \\ &= \tfrac{1}{h}\left\{\int_a^{x+h} K(x+h,\xi)f(\xi)d\xi - \int_a^x K(x,\xi)f(\xi)d\xi\right\} \\ &= \int_a^x \tfrac{K(x+h,\xi)-K(x,\xi)}{h} f(\xi)d\xi + \tfrac{1}{h}\int_x^{x+h} K(x+h,\xi)f(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

ここで、$h \to 0$ とすれば

$$\begin{aligned} y_+'(x) &= \int_a^x K_x(x,\xi)f(\xi)d\xi + K(x+0,x)f(x) \\ &= \int_a^x K_x(x,\xi)f(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

同様にして、$h<0, h \to 0$ の場合も、

$$y_-'(x) = \int_a^x K_x(x,\xi)f(\xi)d\xi$$

したがって、

$$y'(x) = \int_a^x K_x(x,\xi) f(\xi) d\xi \tag{5.18}$$

もう一度微分する。$h > 0$ として、

$$\begin{aligned} \tfrac{y'(x+h)-y'(x)}{h} &= \textstyle\int_a^x \tfrac{K_x(x+h,\xi)-K_x(x,\xi)}{h} f(\xi)d\xi \\ &\quad + \tfrac{1}{h}\textstyle\int_x^{x+h} K_x(x+h,\xi)f(\xi)d\xi \end{aligned}$$

$h \to 0$ とすると、(5.16) 式より

$$\begin{aligned} y''_+(x) &= \textstyle\int_a^x K_{xx}(x,\xi)f(\xi)d\xi + K_x(x+0,x)f(x) \\ &= \textstyle\int_a^x K_{xx}(x,\xi)f(\xi)d\xi + \tfrac{1}{p_0(x)}f(x) \end{aligned}$$

$h < 0$ ならば、

$$\begin{aligned} \tfrac{y'(x+h)-y'(x)}{h} &= \textstyle\int_a^{x+h} \tfrac{K_x(x+h,\xi)-K_x(x,\xi)}{h} f(\xi)d\xi - \tfrac{1}{h}\textstyle\int_{x+h}^x K_x(x,\xi)f(\xi)d\xi \\ &= \textstyle\int_a^{x+h} \tfrac{K_x(x+h,\xi)-K_x(x,\xi)}{h} f(\xi)d\xi + \tfrac{1}{h}\textstyle\int_x^{x+h} K_x(x,\xi)f(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

$h \to 0$ として、

$$\begin{aligned} y''_-(x) &= \textstyle\int_a^x K_{xx}(x,\xi)f(\xi)d\xi + K_x(x,x-0)f(x) \\ &= \textstyle\int_a^x K_{xx}(x,\xi)f(\xi)d\xi + \tfrac{1}{p_0(x)}f(x). \end{aligned}$$

したがって、

$$y''(x) = \int_a^x K_{xx}(x,\xi)f(\xi)d\xi + \frac{1}{p_0(x)}f(x). \tag{5.19}$$

この右辺は x の連続関数なので、関数 $y(x)$ は区間 J において 2 回連続的微分可能である。

(2) また、(5.17), (5.18), (5.19) 式より、

$$L[y] = \int_a^x L[K(x,\xi)]f(\xi)d\xi + f(x) = f(x)$$

が成り立つ。 □

以下では、境界条件 (5.12) を満たすように関数 $K(x,\xi)$ を修正して $G(x,\xi)$ を構成する：

定理 5.6 境界値問題 *(5.11), (5.12)* に付随する斉次境界値問題

$$\begin{cases} L[y] = 0, \\ B_a[y] = B_b[y] = 0 \end{cases}$$

の解が自明解に限るならば、境界値問題 *(5.11), (5.12)* のグリーン関数が一意的に存在する。

証明.

$$G(x,\xi) = K(x,\xi) + c_1(\xi)y_1(x) + c_2(\xi)y_2(x)$$

ここで、$c_1(\xi)$, $c_2(\xi)$ はこれから定められる ξ の未知関数とする。このとき、$L\left[y_1\right] = L\left[y_2\right] = 0$ より、$G(x,\xi)$ は x の関数として

$$L\left[G(x,\xi)\right] = 0 \quad (x \neq \xi)$$

をみたす。

(5.16) 式より、$\xi = a$ における $K_x(x,\xi)$ の値を

$$K_x(a, a+0) = K_x(a,a) = 0$$

$\xi = b$ における $K_x(x,\xi)$ の値を

$$K_x(b, b-0) = K_x(b,b) = \frac{1}{p_0(b)}$$

で定義すれば $B_a\left[K(x,\xi)\right]$, $B_b\left[K(x,\xi)\right]$ は ξ の関数として区間 J で連続になる。

そこで、

$$\begin{cases} B_a\left[G(x,\xi)\right] = B_a\left[K(x,\xi)\right] + c_1(\xi)B_a[y_1] + c_2(\xi)B_a[y_2] = 0, \\ B_b\left[G(x,\xi)\right] = B_b\left[K(x,\xi)\right] + c_1(\xi)B_b[y_1] + c_2(\xi)B_b[y_2] = 0 \end{cases}$$

が成り立つように関数 $c_1(\xi), c_2(\xi)$ を定めたい。この連立方程式を書き改めると

$$\begin{cases} B_a\left[y_1\right]c_1(\xi) + B_a\left[y_2\right]c_2(\xi) = -\alpha K(a,\xi) - \alpha' K_x(a,\xi), \\ B_b\left[y_1\right]c_1(\xi) + B_b\left[y_2\right]c_2(\xi) = -\beta K(b,\xi) - \beta' K_x(b,\xi) \end{cases}$$

あるいは、

$$\begin{pmatrix} B_a[y_1] & B_a[y_2] \\ B_b[y_1] & B_b[y_2] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(\xi) \\ c_2(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha K(a,\xi) - \alpha' K_x(a,\xi) \\ -\beta K(b,\xi) - \beta' K_x(b,\xi) \end{pmatrix} \tag{5.20}$$

ここで、係数の行列式

$$D = \begin{vmatrix} B_a[y_1] & B_a[y_2] \\ B_b[y_1] & B_b[y_2] \end{vmatrix}$$

が零でなければ、$c_1(\xi)$, $c_2(\xi)$ は ξ の連続関数として (5.20) 式から一意的に解けて $G(x,\xi)$ は斉次境界条件を満たす。

もし

$$D = \begin{vmatrix} B_a[y_1] & B_a[y_2] \\ B_b[y_1] & B_b[y_2] \end{vmatrix} = 0$$

と仮定すると

$$B_a[y_1]c_1 + B_a[y_2]c_2 = 0,$$
$$B_b[y_1]c_1 + B_b[y_2]c_2 = 0$$

あるいは

$$\begin{pmatrix} B_a[y_1] & B_a[y_2] \\ B_b[y_1] & B_b[y_2] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が非自明な解 $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ をもつ。そこで

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

と定義すれば、

$$y(x) \not\equiv 0, \quad L[y] = 0, \quad B_a[y] = B_b[y] = 0$$

これは、付随する境界値問題の解が自明解のみという仮定に反する。

以上より、$G(x, \xi)$ が (5.11), (5.12) のグリーン関数であることは補題 5.4 より明らかである。

グリーン関数の一意性の証明：いま、$\hat{G}(x, \xi)$ を境界値問題 (5.11), (5.12) のもうひとつのグリーン関数であるとして、

$$u(x, \xi) = G(x, \xi) - \hat{G}(x, \xi)$$

とおく。この関数 $u(x, \xi)$ が付随する斉次境界値問題

$$\begin{cases} L\,[y] = 0, \\ B_a\,[y] = B_b\,[y] = 0 \end{cases}$$

の解であるから、一意性を証明することが出来る。 □

例題 5.1 a, b は実数で、$ab \neq 0, l > 0$ とする。このとき斉次境界値問題

$$L[y] = \tfrac{d^2y}{dx^2} + a\tfrac{dy}{dx} + by = 0,$$
$$\begin{cases} u(0) - u(l) = 0, \\ u'(0) - u'(l) = 0 \end{cases}$$

のグリーン関数は一意的に存在することを確かめよ。

解答 5.1 $L[y] = 0$ の任意の解は c_1, c_2 を任意の定数として補題 *1.2* から

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{\lambda_1 x} \quad (\lambda_1 = \lambda_2),$$
$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2)$$

ここで、定数 $\lambda_1,\ \lambda_2$ は特性方程式

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

の 2 解である。 $ab \neq 0$ から、いずれの場合にも境界条件から $c_1 = c_2 = 0$ が得られる。従って、定理 *5.6* により、一意的にグリーン関数が存在する。

6　フーリエ級数による解法（変数分離法）

Ω をユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ の有界領域とし、$\partial\Omega$ を Ω の境界とする。このとき、熱伝導現象を記述する、次の初期値・境界値問題を考える：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{in } \Omega, \\ u(t,x') = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0,\infty). \end{cases} \tag{6.1}$$

ここで、

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial {x_n}^2}$$

はラプラス作用素，$u_0(x)$ は初期温度分布，$u(t,x)$ は時刻 t における温度分布を表している。また、考える境界条件は、ディィリクレ境界条件（等温条件）である。

フーリエは、どのような複雑な解も、単純な解の重ね合わせによって得られることを主張した。以下では、彼の考えに沿って、初期値・境界値問題（6.1）を解いてみる。

第 1 段：そのために、関数

$$u(t,x) = T(t)X(x)$$

と変数分離した特別な形の解を求める。まず、熱伝導方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$$

に代入すると、

$$T'(t)X(x) = T(t)\Delta X(x).$$

書き直すと、

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{\Delta X(x)}{X(x)}$$

ところが、左辺は変数 t のみに依存し、右辺は変数 x のみに依存するから、両辺は t にも x にも依存しない定数である。そこで、$-\lambda$ とおく。

このとき、

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{\Delta X(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

第 2 段：考える初期値・境界値問題（6.1）は、次の 2 つの問題になる：

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0,$$

$$\begin{cases} \Delta X + \lambda X = 0 & \text{in } \Omega, \\ X = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{6.2}$$

以下で、$\lambda > 0$ であることを示す。

ディリクレ境界条件

$$X = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

に注意して、部分積分を行うと、

$$\begin{aligned}\lambda \int_\Omega X(x)^2\,dx &= -\int_\Omega \mathit{\Delta} X(x)\cdot X(x)\,dx \\ &= \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left(\frac{\partial X}{\partial x_i}(x)\right)^2 dx \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

よって、

$$\lambda \geq 0.$$

ここで、$\lambda = 0$ とすると、

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial X}{\partial x_i}(x)\right)^2 dx = 0$$

だから、$X(x)$ は定数となる。ところが、境界条件 $X|_{\partial\Omega} = 0$ だから、

$$X(x) \equiv 0 \quad \text{in } \Omega$$

となり、$u(t,x)$ が自明解となり不適である。よって、$\lambda > 0$ であることが示せた。

第 3 段：したがって、問題 (H) の解の候補として、

$$u(t,x) = Ae^{-\lambda t}X(x), \quad \lambda > 0.$$

ただし、$A,\ \lambda$ は任意定数である。

第 4 段： 一方、偏微分方程式論の基本的な結果として、次の固有関数の完全性定理が知られている：

定理 6.1 ディリクレ境界値問題

$$\begin{cases}\mathit{\Delta} u + \lambda u = 0 & \mathit{in}\ \Omega, \\ u = 0 & \mathit{on}\ \partial\Omega\end{cases}$$

は、可算個の解

$$\{\lambda_j, u_j\}_{j=1}^\infty$$

をもつ。さらに、可算個の関数系

$$\{u_j\}_{j=1}^\infty$$

は、ヒルベルト空間 $L^2(\Omega)$ の完全正規直交系となる。ただし、

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots, \quad u_1 > 0.$$

第 5 段：したがって，ディリクレ境界値問題

$$\begin{cases} \varDelta X_j + \lambda_j X_j = 0 & \text{in } \Omega, \\ X_j = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

は可算個の解 $\{\lambda_j, X_j\}_{j=1}^{\infty}$ をもつ。

このとき、変数分離した関数

$$u_j(t,x) = A_j\, e^{-\lambda_j t}\, X_j(x), \quad j = 1, 2, \ldots$$

は、熱伝導方程式と境界条件

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \varDelta\right) u_j = 0 & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ u_j = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

をみたしている。

さらに、重ね合わせの原理より、無限級数

$$u(t,x) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j\, e^{-\lambda_j t}\, X_j(x)$$

は、問題（6.1）の初期条件を除いて、解の候補になる。ここで、A_j は任意の定数である。

第 6 段：最後に、残っている初期条件

$$u(0,x) = u_0(x), \quad \forall x \in \Omega$$

より、可算個の定数 A_j については、

$$u_0(x) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j\, X_j(x).$$

でなければならないことが分かる。

したがって、数学的に問題となるのは，次の問題である：

問題 6.1 ディリクレ境界値問題（*6.2*）の固有関数 $X_j(x)$ の無限級数和として、関数 $u_0(x)$ が フーリエ級数展開できるか？

上に述べた定理 6.1 から、実際に

$$\begin{cases} u_0(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j\, X_j(x), \\ a_j = \displaystyle\int_{\Omega} u_0(y)\, X_j(y) dy \end{cases}$$

とフーリエ級数展開できる。

第 7 段：以上をまとめると、問題（6.1）の解 $u(t,x)$ は、次の形で与えられる：

$$u(t,x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j\, e^{-\lambda_j t}\, X_j(x), \quad a_j = \int_{\Omega} u_0(y)\, X_j(y) dy$$

6.1 フーリエ級数展開の応用例

前節の内容を、簡単な場合に詳しく解説する。

長さ l の針金を考える。左端は $x = 0$, 右端は $x = l$ の位置にあるとし、この針金の温度分布を問題にする。温度分布は時間の経過に従って変化することに注意し、針金の上の点 x の、時刻 t における温度を $u(x,t)$ とすれば、最も単純化された状況のもとで、$u(x,t)$ は熱伝導方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{6.3}$$

を満足することが知られている。ここで c は針金を構成する物質の密度や比熱等と関係のある定数である。(6.3) 式は未知関数の偏導関数を含むいわゆる偏微分方程式で、**熱伝導の方程式**と呼ばれる。

物理的には、ある時刻 $t = 0$ における針金の温度分布が与えられ、それ以後の時刻における両端の温度の状態が規定されるならば、針金の温度分布は一意的に確定する。時刻 $t = 0$ における針金の温度分布を指定することは、閉区間 $0 \leq x \leq l$ で定義された関数 $\varphi(x)$ を与えて、$t = 0$ のとき $u(x,t)$ が条件

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq \forall x \leq l \tag{6.4}$$

を満たすことを要求することである。一方、$t \geq 0$ のおける両端の温度の規定の仕方は様々で、例えば、(i) 両端の温度を常に 0 に保つ、(ii) 両端を断熱的に (熱の出入りがないように) 保つ、(iii) 左端の温度は 0 に保つが、右端では温度に比例した熱輻射があるようにする、等が典型的なものである。これらを順に式で表せば、

$$\begin{cases} u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad \forall t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l,t), \quad \forall t > 0, \\ u(0,t) = 0, \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) + hu(l,t) = 0, \quad \forall t > 0 \end{cases} \tag{6.5}$$

となす。ここで h は正の定数である。このように、針金の温度分布をもとめる物理の問題は、偏微分方程式 (6.3) の解 $u(x,t)$ で、条件 (6.4) および (6.5)(のどれか一つ) を満足するものを求めるという数学の問題に帰着される。(6.4) 式を**初期条件**、(6.5) 式を**境界条件**と呼ぶ。

最も基本的な解の一意性定理について述べる：

定理 6.2 関数 $f(x)$ は閉区間 $J = [0,l]$ で連続とする。このとき、初期値・境界値問題

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < \forall x < l, \forall t > 0, \\ u(0,t) = u(l,t), & \forall t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & 0 < \forall x < l. \end{cases} \tag{6.6}$$

の解 $u(x,t)$ は一意的である。

証明. $u_1(x,t), u_2(x,t)$ を問題 (6.6) の 2 つの解とする。このとき

$$u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$$

とおくと

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < \forall x < l,\ \forall\, t > 0, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & \forall t > 0, \\ u(x,0) = 0, & 0 < \forall x < l. \end{cases} \tag{6.7}$$

そこで、総熱量

$$E(t) = \int_0^l u(x,t)^2 dx$$

を考えると、部分積分の公式により、

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= 2\int_0^l \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \cdot u(x,t) dx \\ &= 2\int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \cdot u(x,t) dx \\ &= 2\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \cdot u(x,t)\right]_{x=0}^{x=l} - 2\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)^2 dx \\ &= -2\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)^2 dx \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

これより、非負関数 $E(t)$ は、t について単調減少である。
　ところが、

$$E(0) = \int_0^l u(x,0)^2 dx = 0$$

　従って、

$$E(t) = \int_0^l u(x,t)^2 dx \equiv 0,\ \forall t \geq 0$$

だから、解の一意性

$$u_1(x,t) - u_2(x,t) = u(x,t) \equiv 0, \quad 0 < \forall x < l, \forall\, t \geq 0$$

が成り立つ。 □
　我々は、定理 6.2 より、(6.3) 式の解で、初期条件 (6.4) 及びディリクレ境界条件 (6.5)(i) を満足するものを見つけることができればよいことになった。そのために、いわゆる**変数分離法**を用いる。はじめに x だけの関数と t だけの関数の積

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{6.8}$$

の形に表わされる特別な解を求める。ただし $u(x,t) \equiv 0$ は自明解なので、関数 $X(x), T(t)$ はともに零でない関数とする。(6.8) 式を (6.3) 式に代入して、

$$X(x)T'(t) = c^2 X''(x)T(t)$$

つまり、

$$\frac{1}{c^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \ (= -\lambda)$$

左辺は、x によらない、右辺は t によらない関数であるから、t と x によらないから λ は定数である。これから、

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (X(x) \not\equiv 0) \tag{6.9}$$

および

$$T'(t) + c^2\lambda T(t) = 0 \quad (T(t) \not\equiv 0) \tag{6.10}$$

が得られる。ディリクレ境界条件 (6.5)(i) が満たされるためには、関数 $X(x)$ は

$$X(0) = X(l) = 0 \tag{6.11}$$

なる境界条件を満たさねばならない。すなわち、関数 $X(x)$ は 2 階線形常微分方程式に対するディリクレ境界値問題 (6.9), (6.11) の非自明解でなければならない。

（I）$\lambda < 0$ の場合：ディリクレ境界値問題 (6.9), (6.11) の解は $X(x) \equiv 0$ に限る。実際、(6.9) 式の一般解は

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{\sqrt{-\lambda}x}$$

であるが、境界条件 (6.11) 式より、

$$c_1 = c_2 = 0 \quad X(x) \equiv 0$$

（II）$\lambda = 0$ の場合：ディリクレ境界値問題 (6.9), (6.11) の解は $X(x) \equiv 0$ に限る。実際、この場合、(6.9) 式の一般解は

$$X(x) = c_1 + c_2 x$$

であるが、境界条件 (6.11) 式より、 $X(x) \equiv 0$

（III）$\lambda > 0$ の場合：(6.9) の一般解は

$$X(x) = D_1 \cos\sqrt{\lambda}x + D_2 \sin\sqrt{\lambda}x$$

である。また、ディリクレ境界条件 (6.11) 式より、

$$\begin{aligned} 0 &= X(0) = D_1, \\ 0 &= X(l) = D_2 \sin\sqrt{\lambda} l. \end{aligned}$$

ここで、$X(x) \not\equiv 0$ ならば、$D_2 \neq 0$. よって、条件

$$\sin\sqrt{\lambda} l = 0$$

より、

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{l} \ (n = 1, 2, 3 \cdots)$$

従って、ディリクレ境界値問題 (6.9), (6.11) が非自明な解を持つためには、

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \ n = 1, 2, 3 \cdots \tag{6.12}$$

でなければならない。このとき、対応する解は、

$$X_n(x) = D_n \sin\frac{n\pi}{l} x, \ \ n = 1, 2, 3 \cdots \tag{6.13}$$

ここで、D_n は任意の定数である。

以上を要約すれば、ディリクレ境界値問題 (6.9), (6.11) は、パラメータ λ が (6.12) で与えられる、限られた離散値をとる場合にのみ、非自明解 (6.13) をもつ。

(6.12) 式の値 λ_n を**固有値**、(6.13) 式の関数 $X_n(x)$ を固有値 λ_n に対応する**固有関数**と呼ぶ。この $\lambda = \lambda_n$ に対応する (6.10) 式の解は、

$$T_n(t) = c_n e^{-c^2 \lambda_n t} \tag{6.14}$$

ここで、c_n は任意定数となる。

(6.13) 式および (6.14) 式を、(6.8) 式に代入すれば、

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) = A_n e^{-c^2 \lambda_n t} \sin\frac{n\pi}{l} x$$

が得られる。A_n は定数である。

こうして得られた一連の関数 $u_n(x, t)$ は、いずれも熱伝導方程式 (6.3) の解で、ディリクレ境界条件 (6.5)(i) を満足するが、まだ、初期条件 (6.4) は満足していない。

初期条件 (6.4) を満たす解を求めるために、関数 $u_n(x, t)$ を**重ね合わせ**て、無限級数を考える：

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-c^2 \lambda_n t} \sin\frac{n\pi}{l} x \tag{6.15}$$

この関数 $u(x, t)$ がディリクレ境界条件を満たすことは明らかである。さらに、初期条件 (6.4) を満たすためには、条件

$$\varphi(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{l} x, \quad 0 \leq \forall x \leq l \tag{6.16}$$

を満たすように係数 A_n を決めることができ、かつそのとき、(6.15) 式の級数が $0 < x < 1,\ t > 0$ で t に関して 1 回、x に関して 2 回項別微分可能であることを確認することができれば、(6.15) 式の関数 $u(x,t)$ は、熱伝導方程式の初期値・境界値問題の解になる。

無限級数の項別微分可能性の問題をさし当たって度外視すれば、解決しなければならない数学的な問題は、次の問題である：

問題 6.2 閉区間 $[0,1]$ で与えられた任意の関数 $\varphi(x)$ を *(6.16)* 式の形の三角級数に展開することが出来るか？

この種の問題を解決するために、いわゆるフーリエ級数の理論が作られた。それによれば、適当な条件の下で、関数 $\varphi(x)$ は (6.15) 式の形に展開され、係数 A_n は、公式

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx, \quad n = 1,2,3\cdots \tag{6.17}$$

で定められる。

これらの事実を認めれば、(6.15) 式および (6.17) 式で定義される関数 $u(x,t)$ が初期条件 (6.4)、ディリクレ境界条件 (6.5)(i) を満たす、熱伝導方程式 (6.3) の解になる。針金を構成する金属の密度、比熱等が定数でなく、位置 x の関数である場合には、より一般的な偏微分方程式

$$r(x)\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] + q(x)u \tag{6.18}$$

によって記述される。境界条件は、一般に、

$$\begin{cases} \alpha u(a,t) + \alpha' u'(a,t) = 0; \quad \forall t > 0, \\ \beta u(b,t) + \beta' u'(b,t) = 0; \quad \forall t > 0 \end{cases} \tag{6.19}$$

ただし、係数については、条件

$$\alpha^2 + {\alpha'}^2 \neq 0, \quad \beta^2 + {\beta'}^2 \neq 0$$

を満たしているとする。境界条件 (6.5) 式は、(6.19) 式の特別な場合である。

偏微分方程式 (6.18) の解 $u(x,t)$ で初期条件 (6.4) と境界値問題 (6.19) を満足するものを、上述の変数分離法で求めようとすれば、次の問題が提起される：

問題 6.3 常微分方程式に対する境界値問題

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + [q(x) + \lambda r(x)]\,y = 0 \tag{6.20}$$

$$\text{(6.21)} \qquad \alpha y(a) + \alpha' y'(a) = 0\,, \quad \beta y(b) + \beta' y'(b) = 0$$

の非自明解 **(固有関数)** と対応するパラメータ λ の値 ***(固有値)*** を求めよ。さらに、固有値は可算無限個存在するか、対応する固有関数はどのような性質を持っているか。

固有関数と固有値の例として、(6.20) 式において $p(x) \equiv 1,\ q(x) \equiv 0$,$r(x) \equiv 1$ とした簡単な微分方程式

$$y'' + \lambda y = 0$$

に対する固有値問題を考える。

境界条件を、ディリクレ条件（等温条件）

$$y(a) = y(b) = 0$$

とすれば、上述の熱伝導問題における固有値と固有関数が出る。

これとは異なる境界条件、例えば、ノイマン条件（断熱条件）

$$y'(a) = y'(b) = 0$$

をとれば

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2; \quad y_n(x) = \cos\sqrt{\lambda_n}(x-a),\ n = 0, 1, 2, \cdots$$

となり、固有値は等しいが固有関数が異なる。

まとめ 6.3 簡単のために、$a = 0, b > 0$ として、以上の事実を一覧表にまとめると、

境界条件	固有値	固有関数	注
ディリクレ条件	$\frac{m^2\pi^2}{b^2}$	$\sqrt{\frac{2}{b}}\sin\frac{m\pi}{b}x$	奇関数拡張
ノイマン条件	$\frac{m^2\pi^2}{b^2}$	$\sqrt{\frac{2}{b}}\cos\frac{m\pi}{b}x$	偶関数拡張

さらに、境界条件を混合型条件

$$y(0) = y'(b) = 0$$

の場合を考えると、

$$\lambda_n = \left[\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{b}\right]^2, \qquad y_n(x) = \sin\sqrt{\lambda_n}x,\ n = 0, 1, 2, \cdots$$

となり、固有関数は等しいが、対応する固有値が異なっている。

6.1.1　長方形の場合

2 次元の長方形の場合に、変数分離法により、固有値および固有関数を求めてみる。

例 6.1 $\Omega = (0,a) \times (0,b)$ を長方形として、熱伝導方程式に対する次の初期値・境界値問題を考える：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & in\ \Omega \times (0,\infty), \\ u(0,x) = u_0(x) & in\ \Omega, \\ u(t,x') = 0 & on\ \partial\Omega \times (0,\infty). \end{cases}$$

ここで、

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

はラプラス作用素，$u_0(x)$ は初期温度分布，$u(t,x)$ は時刻 t における温度分布を表している。また、考える境界条件は、ディリクレ境界条件（等温条件）である。この初期値・境界値問題（*6.1*）を、

$$u(t,x,y) = T(t)X(x,y) = T(t)U(x)V(y)$$

と変数分離した形の解を求める。

(1) まず、熱伝導方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$$

より、

$$T'(t)X(x,y) = T(t)\Delta X(x,y).$$

よって、

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{\Delta X(x,y)}{X(x,y)} = \frac{U''(x)V(y) + U(x)V''(y)}{U(x)V(y)}$$

ところが、左辺は変数 t のみに依存し，右辺は変数 x, y のみに依存するから，両辺は t にも x, y にも依存しない定数である。そこで、$-\lambda$ とおく。

(2) このとき、

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{U''(x)}{U(x)} + \frac{V''(y)}{V(y)} = -\lambda.$$

したがって、初期値・境界値問題（*6.1*）は、さらに、変数分離されて、次の 3 つの問題に帰着される：

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0, \quad \lambda = \alpha + \beta,$$

$$\begin{cases} U''(x) + \alpha U(x) = 0 & in\ (0,a), \\ U(0) = U(a) = 0 \end{cases} \tag{6.22}$$

$$
(6.23)\qquad \begin{cases} V''(y) + \beta V(y) = 0 \quad in\ (0,b), \\ V(0) = V(b) = 0 \end{cases}
$$

ここで、α, β は正の定数である。

ディリクレ境界値問題（*6.22*）およびを（*6.23*）を解くと、固有値と固有関数は、それぞれ、

$$\alpha_m = \frac{m^2\pi^2}{a^2}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

$$U_m(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{m\pi}{a} x, \quad m = 1, 2, \ldots$$

および

$$\beta_n = \frac{n^2\pi^2}{a^2}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$V_n(y) = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin \frac{n\pi}{b} y, \quad n = 1, 2, \ldots$$

である。

まとめ 6.4 以上の事実を一覧表にまとめると、

境界条件	固有値	固有関数	注
ディリクレ条件	$\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}$	$\frac{2}{\sqrt{ab}} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y$	奇関数拡張

6.1.2　2 次元円板の場合

2 次元円板の場合に、変数分離法により、固有値および固有関数を求めてみる。

例 6.2 2 次元の円板 $\Omega = \{x^2 + y^2 \leq a^2\}$ に対して，ラプラス方程式

$$\Delta u = 0 \quad in\ \Omega$$

を考える。2 次元ラプラス作用素の極座標表示は

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

となるので、ラプラス作用素の固有値問題 $\Delta u = -\lambda u$ は、

$$
(6.24)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = -\lambda u
$$

となる。さらに、ここでは、ディリクレ境界条件

$$u|_{\partial\Omega} = 0$$

で考える。
　さて、解 $u(r,\theta)$ を

$$u(r,\theta) = U(r)V(\theta) \tag{6.25}$$

と変数分離した形の解で求める。*(6.25)* 式を *(6.24)* 式へ代入して整理すると、

$$\frac{r^2U''(r) + rU'(r) + r^2\lambda U(r)}{U(r)} = -\frac{V''(\theta)}{V(\theta)} = \mu$$

となる。μ は r にも θ にも依存しないので定数である。これより、2 つの境界値問題

$$\begin{cases} V''(\theta) = -\mu V(\theta), \\ V(0) = V(2\pi) \end{cases} \tag{6.26}$$

および

$$U''(r) + \frac{1}{r}U'(r) + \left(\lambda - \frac{\mu}{r^2}\right)U(r) = 0 \tag{6.27}$$

$$U(a) = 0 \tag{6.28}$$

が得られる。境界値問題 *(6.26)* の固有値と固有関数は、それぞれ、

$$\mu_n = n^2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\begin{cases} V_n(\theta) = \cos n\theta, & n = 0, 1, 2, \ldots, \\ V_n(\theta) = \sin n\theta, & n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

となる。
　これらの μ の値に対して後の方の境界値問題 *(6.27), (6.28)* を解く。 *(6.27)* 式において、$\sqrt{\lambda}r = s$ と変数変換すると、

$$J''(s) + \frac{1}{s}J'(s) + \left(1 - \frac{\mu}{s^2}\right)J(s) = 0 \tag{6.29}$$

あるいは、

$$s^2J''(s) + sJ'(s) + \left(s^2 - \mu\right)J(s) = 0$$

となる。 ただし、$U(r) = J(\sqrt{\lambda}r)$. この微分方程式を**ベッセルの微分方程式**という。 $\mu = n^2$ に対して *(6.29)* 式の 1 次独立な 2 つの解のうち原点で滑らかなものは、

$$J_n(s) = \left(\frac{s}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}\left(\frac{s}{2}\right)^{2k} \tag{6.30}$$

という無限級数で表される。すなわち、n 次のベッセル関数となる。$J_n(s)$ は正の実軸上に無限大に発散する零点の無限列をもつので、これを各 n に対して、

$$\nu_{n,m}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

とおく。このとき，$U(r)$ に対する境界条件 $U(a) = 0$ は、 $J_n(\sqrt{\lambda}a) = 0$ となり、

$$\lambda_{nm} = \frac{\nu_{n,m}^2}{a^2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad m = 1, 2, \ldots$$

と同値である。つまり、固有値 λ は種々の次数のベッセル関数の零点を小さいほうから順に並べたものである。対応する固有関数は、

$$\begin{cases} J_n(\nu_{n,m}r/a)\cos n\theta, & n = 0, 1, 2, \ldots, \quad m = 1, 2, \ldots \\ J_n(\nu_{n,m}r/a)\sin n\theta, & n = 1, 2, \ldots, \quad m = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{6.31}$$

である。

まとめ 6.5 以上の事実を一覧表にまとめると、

境界条件	固有値	固有関数	注
ディリクレ条件	$\frac{\nu_{n,m}^2}{a^2}$	$J_n(\nu_{n,m}r/a)\cos n\theta, J_n(\nu_{n,m}r/a)\sin n\theta,$	ベッセル関数の零点

7　関数解析学からのアプローチ

逐次近似法の理論的な背景として、線形代数学及び微分積分学の無限次元版である関数解析的な考え方を知ることは、極めて有用である。より具体的には，それらの対照表を作れば，次のようになる：

線形代数学	**微分方程式論**	**関数解析学**
有限次元ベクトル	関数	無限次元ベクトル
行列	積分核	線形作用素
連立一次方程式	微分方程式	線形方程式
単位行列	ディラック超関数	恒等作用素
逆行列	グリーン関数	逆作用素

また，登場する関数の舞台についての対照表を作れば，次のようになる：

分野	定義域	値域（完備）
微分積分学	区間	実数体
複素関数論	複素領域	複素数体
関数解析学	区間	バナッハ空間

以下では、定理 3.1 の証明における逐次近似法の考え方は、数学的には、バナッハの不動点定理と同値であることを解説する。

7.1 ベクトル空間とノルム空間

集合 X は，次の諸条件を満たすとき，実数体または複素数体 $\mathbf{K}$ 上の線形空間またはベクトル空間という：

(i) 任意の $x, y \in X$ に対して，和 $x+y \in X$ が定義されて，

(a) $x+y=y+x$.

(b) $(x+y)+z=x+(y+z)$.

(c) ゼロベクトル $0 \in X$ が存在して，

$$x+0=x, \quad \forall x \in X.$$

(d) 各元 $x \in X$ に対して，逆元 $-x \in X$ が存在して，

$$x+(-x)=0.$$

(ii) 任意の $x \in X, \alpha \in \mathbf{K}$ に対して，スカラー倍 $\alpha x \in X$ が定義されて，

(a) $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$.

(b) $1x=x$.

(c) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$.

(d) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$.

X の元はベクトルと呼ばれ，$\mathbf{K}$ の元はスカラーと呼ばれる。 $\mathbf{K}$ をベクトル空間 X の係数体という。 $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ あるいは $\mathbf{K}=\mathbf{C}$ に応じて，ベクトル空間を，実ベクトル空間あるいは複素ベクトル空間という。$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \in X$ に対して，$\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\ldots+\alpha_n x_n(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n \in \mathbf{K})$ の形のベクトルを一次結合あるいは線形結合という。ベクトル $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ は次の 条件を満たすとき，一次独立あるいは線形独立という：

$\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\ldots\alpha_n x_n=0 \implies \alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0.$

ベクトル $x_1, x_2, \ldots, x_n$ は一次独立でないとき， 一次従属あるいは線形従属という。ベクトル空間 X が， n 個の一次独立なベクトルを含み，$n+1$ 以上の一次独立なベクトルを含まないとき，X は n 次元であるといい， $\dim X=n$ と表す。X の一次独立なベクトルが有限でないとき，X は無限次元という。

例 7.1 $L^p(\mathbf{R}^n)$ は無限次元である。

n 次元ベクトル空間 X の n 個の一次独立なベクトル $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ を，X の基底という。このとき，任意のベクトル $x \in X$ は，

$$x=\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\ldots\alpha_n x_n$$

と，一意的に表される。スカラー α_1,α_2, $\ldots$, α_n を，ベクトル x の成分という。部分集合 $M \subset X$ は， X での和とスカラー倍の演算に関してベクトル空間になると

き，M を X の部分空間という。従って，部分集合 M は次の条件を満たすとき，部分空間になる：

$$x,\ y \in M,\ \alpha \in \mathbf{K} \implies x + y \in M,\ \alpha x \in M.$$

X の部分集合 A に対して，A を含む最小の部分空間 $[A]$ が存在する。実際，部分空間 $[A]$ は，A を含むすべての部分空間の交わり，あるいは A の任意の有限個の元の一次結合の全体で与えられる。部分空間 $[A]$ を，集合 A によって生成される部分空間という。M, N を X の 2 つの部分空間とする。和集合 $M \cup N$ によって生成される部分空間を，M と N の和といい，$M + N$ で表す。もし $M \cap N = \{0\}$ の場合は，和 $M + N$ は M と N の直和といい，

$$M \dot{+} N$$

で表す。直和 $M \dot{+} N$ の任意の元 x は，

$$x = y + z, \quad y \in M,\ z \in N$$

という形に一意的に表される。

部分集合 $A \subset X$ が次の条件を満たすとき，凸であるという：

$$x,\ y \in A \implies \alpha x + (1 - \alpha) y \in A, \quad 0 < \forall \alpha < 1.$$

X 上の実数値関数 $\|\cdot\|$ が，次の 3 条件（ノルムの公理）を満たすとき，ノルムと呼ばれる：

(N1) $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
(N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, $\forall \alpha \in \mathbf{K}$, $\forall x \in X$.
(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x$, $\forall y \in X$ (三角不等式).

7.2　ノルム空間の位相

X をノルム空間とする：

(N1) $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
(N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, $\forall \alpha \in \mathbf{K}$, $\forall x \in X$.
(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x$, $\forall y \in X$ (三 角 不 等 式).

ノルム空間 X の位相は，距離

$$d(x, y) := \|x - y\|$$

によって定義される。実際，$d(x, y)$ は，距離の公理を満たすことが分かる：

(M1) $d(x, y) \geq 0,\ d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$ (正値性).
(M2) $d(x, y) = d(y, x)$ (対称性).

(M3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, $\forall x,\ y,\ z \in X$ (三 角不等式).
ノルム空間 X における収束

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

は,

$$s - \lim_{n\to\infty} x_n = x$$

あるいは，単に,

$$x_n \longrightarrow x$$

と表記される。このとき，点列 $\{x_n\}$ は x に強収束するとい う。

定理 7.1 ノルム空間 X において，ベクト ル演算やノルムは連続である：
(1) $x_n \to x$, $y_n \to y$ ならば，$x_n + y_n \to x + y$.
(2) $x_n \to x$, $\alpha_n \to \alpha$ ならば，$\alpha_n x_n \to \alpha x$.
(3) $x_n \to x$ ならば，$\|x_n\| \to \|x\|$.

証明. (1) については,

$$\|(x_n + y_n) - (x+y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \quad \longrightarrow 0.$$

(2) については,

$$\|\alpha_n x_n - \alpha x\| \leq |\alpha_n - \alpha|\ \|x_n - x\| + |\alpha_n - \alpha|\ \|x\| + |\alpha|\ \|x_n - x\| \quad \longrightarrow 0.$$

(3) については，三角不等式より,

$$|\|x_n\| - \|x\|| \leq \|x_n - x\| \quad \longrightarrow 0.$$

以上で，定理 7.1 が証明された。 □

定義 7.2 X の点列 $\{x_n\}$ は，次のコーシー *(Cauchy)* の条件を満たすとき，コーシー *(Cauchy)* 列と呼ばれる：

$$\lim_{n,m\to\infty} \|x_n - x_m\| = 0.$$

ノルム空間 X の任意の *Cauchy* 列が，X の点に強収束するとき，X は完備であるという。完備なノルム空間を，バナッハ（*Banach*）空間と呼ぶ。

X 上の 2 つのノルム $\|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|_2$ は，次の条件を満たすとき，同値であるという：

$$\exists c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \exists C\|x\|_1, \quad \forall x \in X.$$

同値なノルムは，ベクトル空間 X に同じ位相を定めることに注意。$x \in X$ と $r > 0$ に対して,

$$B(x,r) := \{y \in X : \|y - x\| < r\}$$

を，中心 x, 半径 r の開球という。以下では，点 x の近傍ということもある。

定義 7.3 部分集合 $G \subset X$ が次の条件を満たすとき，開集合という：

$$\forall x \in G,\ \exists r = r(x) > 0 \quad such\ that\ B(x, r) \subset G.$$

定理 7.4 ノルム空間 X の開集合について，次の性質が成り立つ：
(G1) $\emptyset$, X は開集合.
(G2) 任意の有限個の開集合の共通部分も開集合.
(G3) 任意の開集合の族の和集合も開集合.

定義 7.5 部分集合 $F \subset X$ の補集合 $F^c = X \setminus F$ が開集合のとき， F を閉集合という。

定理 7.6 ノルム空間 X の閉集合について，次の性質が成り立つ：
(F1) $\emptyset$, X は閉集合.
(F2) 任意の有限個の閉集合の和集合も閉集合.
(F3) 任意の閉集合の族の共通部分も閉集合.

定義 7.7 M を X の部分集合とする。点 $x \in X$ の任意の近傍の中に，x と異なる M の点が少なくとも一つ存在するとき，点 x を M の集積点という。

次の集積点に関する判定条件は，非常に有用である：

定理 7.8 M を X の部分集合とする。点 $x \in X$ が M の集積点であるための必要十分条件は，x に収束する M の点列 $\{x_n\}$ が存在することである：

$$\exists \{x_n\} \subset M \quad such\ that\ x_n \neq x,\ \|x_n - x\| \to 0. \tag{7.1}$$

証明. (1) 必要性：点 x の近傍として $B(x, 1/n)$, $n \in \mathbf{N}$, を取れば,

$$\exists x_n \in M \quad \text{such that } x_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right),\ x_n \neq x.$$

従って，条件 (7.1) が成り立つ。
(2) 十分性：逆に，点 x の任意の近傍 $B(x, \varepsilon)$ に対して， 条件 (7.1) より，n 十分大ならば,

$$\exists x_n \in M \quad \text{such that } x_n \in B(x, \varepsilon),\ x_n \neq x.$$

従って，点 $x \in X$ は M の集積点である。
以上で，定理 7.8 が証明された。 □
次の閉集合に関する判定条件は，非常に有用である：

定理 7.9 F を X の部分集合とする。F が閉集合であるための必要十分条件は，F の集積点がすべて F に属することである。

証明. (1) 必要性：F を閉集合，x を F の任意の集積点とする。もし $x \notin F$ ならば，補集合 F^c は開集合だから，ある近傍 $B(x,r)$ が存在して，

$$B(x,r) \cap F = \emptyset.$$

これは，x が F の集積点であることに矛盾する。従って，$x \in F$.

(2) 十分性：補集合 F^c が開集合であることを示す。

x_0 を補集合 F^c の任意の点とする。x_0 は F の集積点ではないから，ある近傍 $B(x_0,r)$ が存在して，

$$B(x_0,r) \cap F = \emptyset.$$

従って，

$$B(x_0,r) \subset F^c.$$

これより，点 x_0 は F^c の内点である。よって，補集合 F^c は開集合である。

以上で，定理 7.9 が証明された。 □

定理 7.10 F を X の部分集合とする。F が閉集合であるための必要十分条件は，F の点列が収束すれば，その極限点がすべて F に属することである。

証明. (1) 必要性：F を閉集合とする。$x_n \in F$, $x_n \to x_0$ とすると，x_0 は F の点か F の集積点である。従って，定理 7.9 より，$x_0 \in F$.

(2) 十分性：x_0 を F の任意の集積点とする。このとき，任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して，

$$\exists x_n \in F \quad \text{such that } x_n \in B\left(x_0, \frac{1}{n}\right), \, x_n \neq x_0.$$

従って，点 x_0 は F の点列 $\{x_n\}$ の極限点だから，仮定より，F に属する。定理 7.9 より，F は閉集合である。

以上で，定理 7.10 が証明された。 □

定義 7.11 A を X の部分集合とする。A の集積点の全体を A^d で表す。集合

$$\overline{A} := A \cup A^d$$

を，A の閉包という。

注意 7.1 *(1)* 定義 *7.11* から，明らかに

$$A \subset \overline{A},$$
$$A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}.$$

(2) 集合 F が閉ならば，定理 *7.9* より， $F^d \subset F$. 従って，$\overline{F} = F$ である。

次の定理は，集合の閉包に関する特徴付けを与えている：

定理 7.12 A を X の部分集合とする。A の閉包 $\overline{A}$ は，A を含む最小の閉集合である。

証明. (1) A の閉包 $\overline{A}$ は閉集合であることを示す。そのために，定理 7.9 を使う。
x を $\overline{A}$ の任意の集積点とすると，x の任意の近傍 $B(x,r)$ に対して，x と異なる点 y で

$$y \in B(x,r) \cap \overline{A}$$

をみたすものが存在する。$y \in \overline{A}$ より，

$$r' := r - \|y - x\|$$

とおくと，

$$B(y,r') \subset B(x,r),$$
$$B(y,r') \cap A \neq \emptyset.$$

である。よって，$B(x,r) \cap A \neq \emptyset$ だから，$x \in \overline{A}$ である。
(2) F を A を含む任意の閉集合とすると。$A \subset F$. 従って，注意 7.1 から

$$\overline{A} \subset \overline{F} = F.$$

以上で，定理 7.12 が証明された。□
定理 7.1 と定理 7.12 より，

定理 7.13 X をノルム空間，M を X 部分空間とする。このとき，M の 閉包 $\overline{M}$ は X の 部分空間である。

定義 7.14 X の部分集合 A が，$\overline{A} = X$ を満たすとき，集合 A は X で稠密であるという。

例 7.2 有理数の全体 $\mathbf{Q}$ は，1 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}$ で稠密である。

例 7.3 ワイエルシュトラスの多項式近似定理によって，実数値係数の多項式の全体 $P(x)$ は，実数値連続関数の空間 $C[a,b]$ において 稠密である。

定義 7.15 ノルム空間 X に稠密な可算集合が存在するとき，X は可分であるという。

例 7.4 例 *7.2* において，有理数の全体 $\mathbf{Q}$ は可算集合だから，1 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}$ は可分である。

例 7.5 例 *7.3* において，有理数係数の多項式の全体 $Q(x)$ は可算集合であって，実数値係数の多項式の全体 $P(x)$ において稠密である。従って，実数値連続関数の空間 $C[a,b]$ は可分である。

7.3　バナッハ (Banach) の不動点定理

有名なバナッハ (Banach) の不動点定理（縮小写像の原理）を証明する：

定理 7.16 (バナッハ (Banach) の不動点定理) バナッハ空間 X から X への写像 F が縮小写像の条件

$$\|F(x) - F(y)\| \leq k\|x - y\|, \quad 0 < \exists k < 1, \tag{7.2}$$

を満たすとする。このとき，写像 F はただ一つの不動点 z を持つ： $F(z) = z$.

証明.　任意の点 $x_0 \in X$ を取り，

$$x_1 = F(x_0), \quad x_2 = F(x_1), \ \ldots, \ x_{n+1} = F(x_n)$$

とおく。このとき、条件 (7.2) から

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - x_n\| &= \|F(x_n) - F(x_{n-1})\| \\ &\leq k\|x_n - x_{n-1}\| \\ &\leq k^2\|x_{n-1} - x_{n-2}\| \\ &\cdots \\ &\leq k^n\|x_1 - x_0\|.\end{aligned}$$

従って，$m > n$ に対して，三角不等式により，

$$\begin{aligned}\|x_n - x_m\| &\leq \|x_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x_{n+2}\| + \ldots + \|x_{m-1} - x_m\| \\ &\leq \left(k^n + k^{n+1} + \ldots + k^{m-1}\right)\|x_1 - x_0\| \\ &\leq \frac{k^n}{1-k}\|x_1 - x_0\|\end{aligned}$$

だから，点列 $\{x_j\}$ は Cauchy 列である。ノルム空間 X は完備だから，

$$\exists z \in X \quad \text{such that } x_n \longrightarrow z.$$

ところで，再び、条件 (7.2) から，写像 F は（一様）連続だから，

$$z = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} F(x_{n-1}) = F(z).$$

従って，写像 F は不動点 z を持つことが分かった。

不動点の一意性を示す：$F(z) = z$, $F(z') = z'$ とすると，条件 (7.2) から，

$$\|z - z'\| = \|F(z) - F(z')\| \leq k\|z - z'\|.$$

ここで，$0 < k < 1$ に注意すれば，

$$\|z - z'\| = 0$$

となり，$z = z'$ を得る。

以上で，定理 7.16 が証明された．□

バナッハ (Banach) の不動点定理 7.16 は、次のように拡張される：

系 7.17 バナッハ空間 X から X への写像 F に対して，写像 $F^n,\ n \geq 2,$ を

$$F^n x = F(F^{n-1}x), \quad \forall x \in X$$

と定義する。ある $n_0 \in \mathbf{N}$ に対して，写像 F^{n_0} が縮小写像の条件

$$\|F^{n_0}(x) - F^{n_0}(y)\| \leq k\|x - y\|, \quad 0 < \exists k < 1,$$

を満たすとする。このとき，写像 F はただ一つの不動点 z を持つ：$F(z) = z$.

証明. 不動点の一意性を示す：$Fz = z$, $Fz' = z'$, $z, z' \in X$ を 2 つの不動点とすると，

$$F^{n_0}(z) = Fz = z, \quad F^{n_0}(z') = Fz' = z'.$$

従って，定理 7.16 に示したように、写像 F^{n_0} に対する不動点の一意性より，$z = z'$.

不動点の存在を示す：写像 F^{n_0} は縮小写像だから，定理 7.16 から，不動点 x_0 を持つ：

$$F^{n_0}(x_0) = x_0.$$

ところで，両辺に写像 F を施すと，

$$F^{n_0}(Fx_0) = F(F^{n_0}(x_0)) = Fx_0.$$

よって，点 Fx_0 も写像 F^{n_0} の不動点である。写像 F^{n_0} に対する不動点の一意性から，

$$Fx_0 = x_0.$$

以上で，系 7.17 が証明された。 □

7.4 常微分方程式の初期値問題への応用

バナッハ (Banach) の不動点定理 7.16 の応用として、次の常微分方程式の初期値問題の基本定理を証明しよう。

定理 7.18 ρ, r を正の数とし、点 (a, b) を中心とする閉矩形

$$D = \{(t, y) : |t - a| \leq r,\ |y - b| \leq \rho\}$$

を考える。与えられた関数 $f(x, y)$ は D で連続かつ変数 y についてリプシッツ連続とする。すなわち、定数 L が存在して

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|\,, \quad \forall\ (t, y_1), (t, y_2) \in D$$

このとき、初期値問題

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y), \\ y(a) = b \end{cases} \tag{7.3}$$

は、閉区間

$$I = [a-c, a+c],$$
$$c = \min\left\{r, \frac{\rho}{M}\right\}, \quad M = \max\{|f(t, y)| : (t, y) \in D\}$$

において、解 $y(t)$ が存在して一意的である。

証明. 閉区間 I 上の連続関数の空間を X として、そのノルムは最大値ノルムとする：

$$X = C(I),$$
$$\|x\| = \max\{|x(t)| : t \in I\}$$

最大値ノルムの収束は一様収束だから、X はバナッハ空間になることに注意。

このとき、 X から X への写像 F を次のように定義することができる：

$$Fx(t) = b + \int_a^t f(s, x(s))ds$$

さらに、定理 3.1 の証明と同様にして、任意の自然数 n に対して、不等式

$$\|F^n(x_1) - F^n(x_2)\| \leq \frac{c^n L^n}{n!}\|x_1 - x_2\|$$

が成り立つことがわかる。

従って、十分大きな $n_0 \in \mathbf{N}$ に対して，写像 F^{n_0} が縮小写像の条件

$$\|F^{n_0}(x) - F^{n_0}(y)\| \leq k\|x - y\|, \quad 0 < \exists k < 1,$$

を満たすので、写像 F 自身がただ一つの不動点 y を持つ：

$$y(t) = Fy(t) = b + \int_a^t f(s, y(s))ds$$

以上により、初期値問題 (7.3) に対する一意存在定理が証明された。 □

参考文献

[1] 斉藤利弥：「常微分方程式論」朝倉書店（2004 年)

[2] 木村俊房：「常微分方程式に解法」培風館（1958 年)

[3] 高橋陽一郎：「微分方程式入門」東京大学出版会（1988 年)

[4] 松澤忠人・原優・小川吉彦：「微分方程式入門」学術図書出版社（1996 年）

[5] 辻岡邦夫：「微分方程式」朝倉書店（1989 年)

[6] 矢嶋信男「常微分方程式」岩波書店（2003 年)

[7] 高橋健人：「物理数学」培風館（2005 年)

[8] 谷島賢二：「物理数学入門」東京大学出版会（1994 年)

[9] 溝畑茂：「積分方程式入門」朝倉書店（2004 年)