

確率論I

平良和昭

目次

- 第1部: 多項式近似定理の確率論的アプローチ
- 第2部: ブラウン運動の数理
- 第3部: 拡散過程と半群 (関数解析的アプローチ)

第1部

多項式近似定理の確率論的 アプローチ

講義の目的

Weierstrassの**多項式近似定理**をコ
イン投げを手がかりとしながら**確率
論的に証明する。**

Weierstrassの多項式近似定理

有界閉区間上で定義された任意の連続関数は、**多項式**によって**一様に近似**される。

3つの証明方法

① Stone-Weierstrassの定理を用いた
関数解析的証明

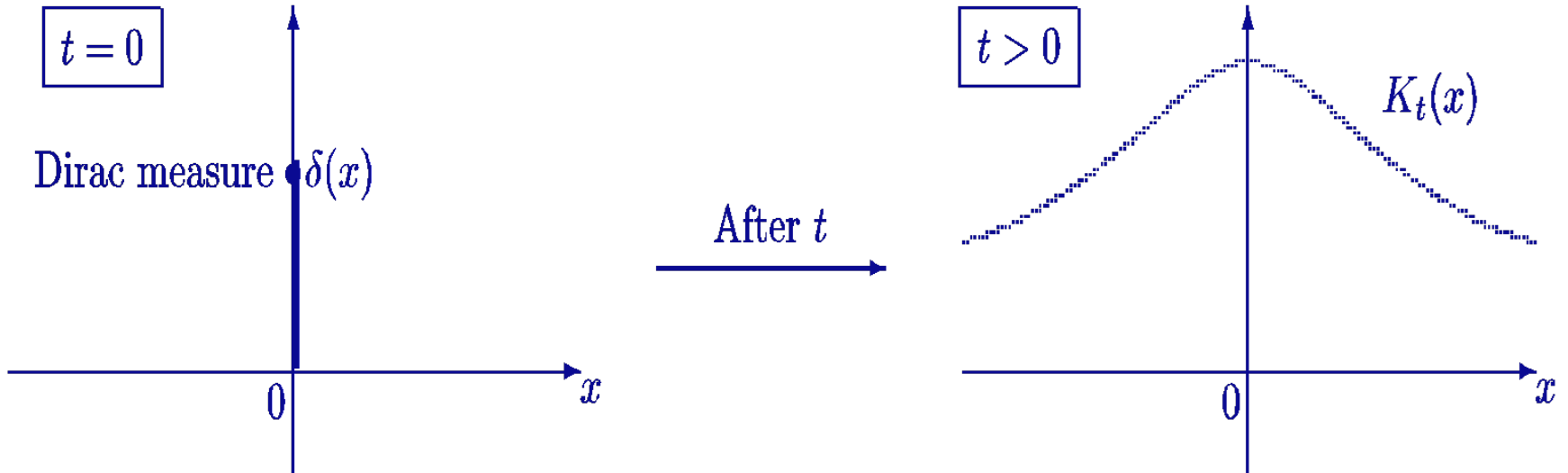
② 熱核を用いた偏微分方程式的証明

③ チェビシエフの不等式を用いた
確率論的証明

熱核 (Heat Kernel)

$$K_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, \quad t > 0$$

熱核の直観的意味

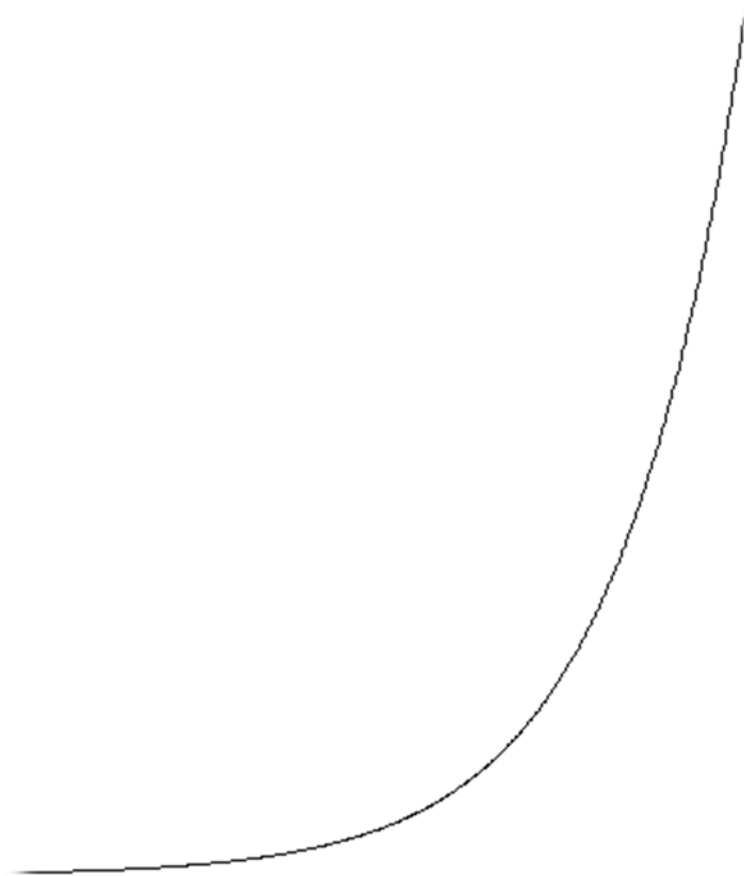


解析的関数の場合 (Taylor 展開による方法)

具体例 1

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Numerical Computing with BASIC

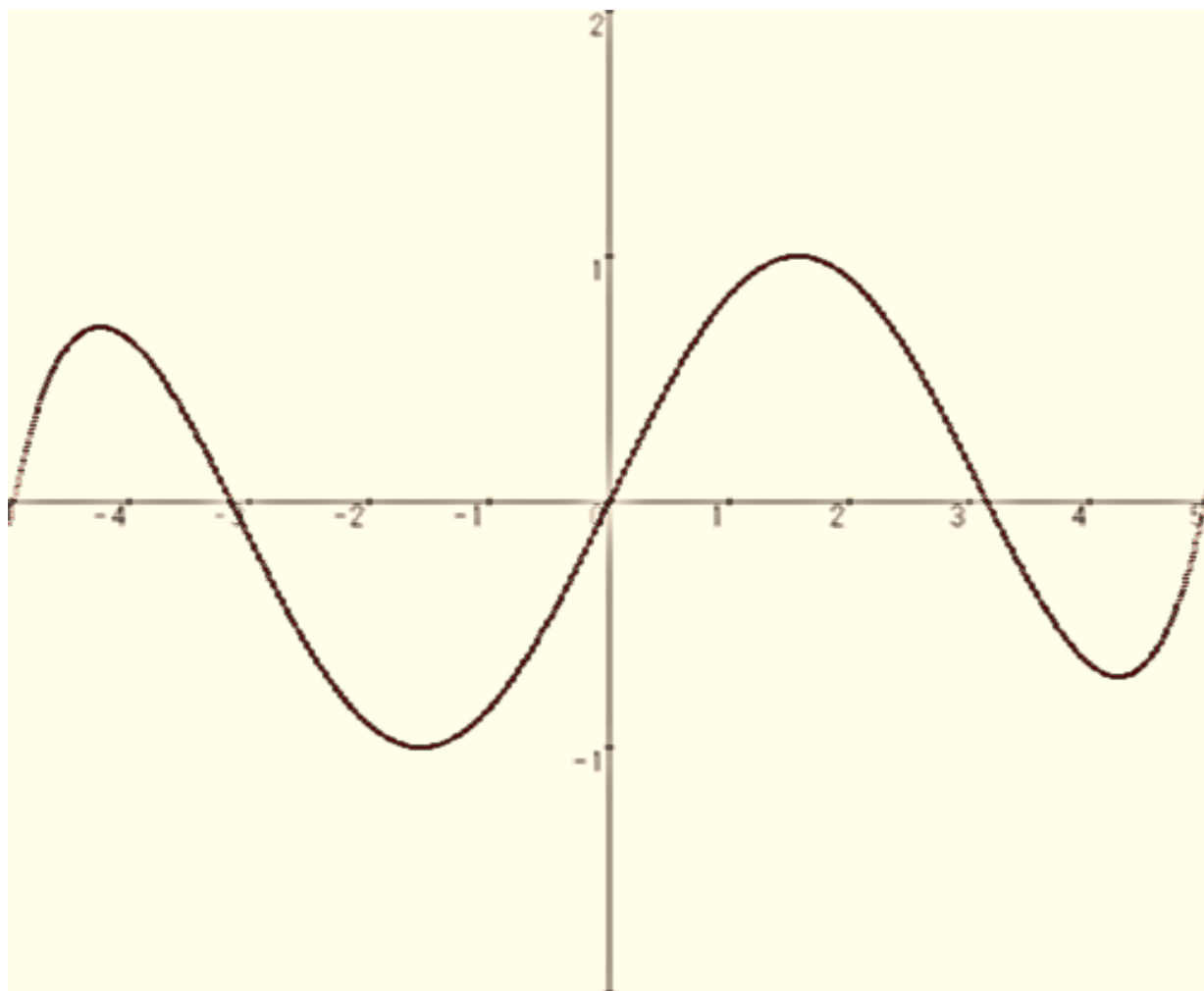


具体例 2

$\sin x$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Numerical Computing with BASIC

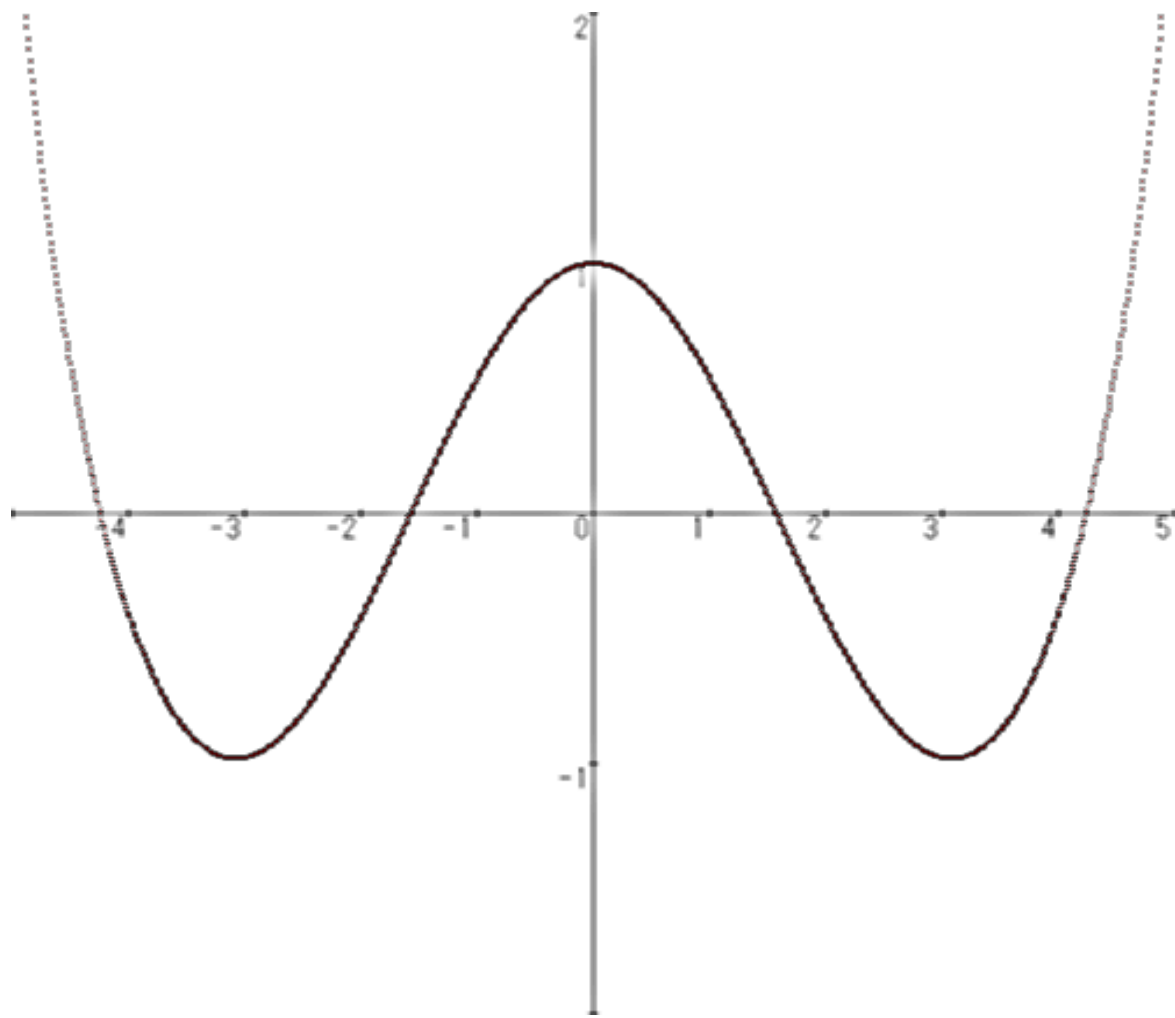


具体例3

$\cos x$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Numerical Computing with BASIC



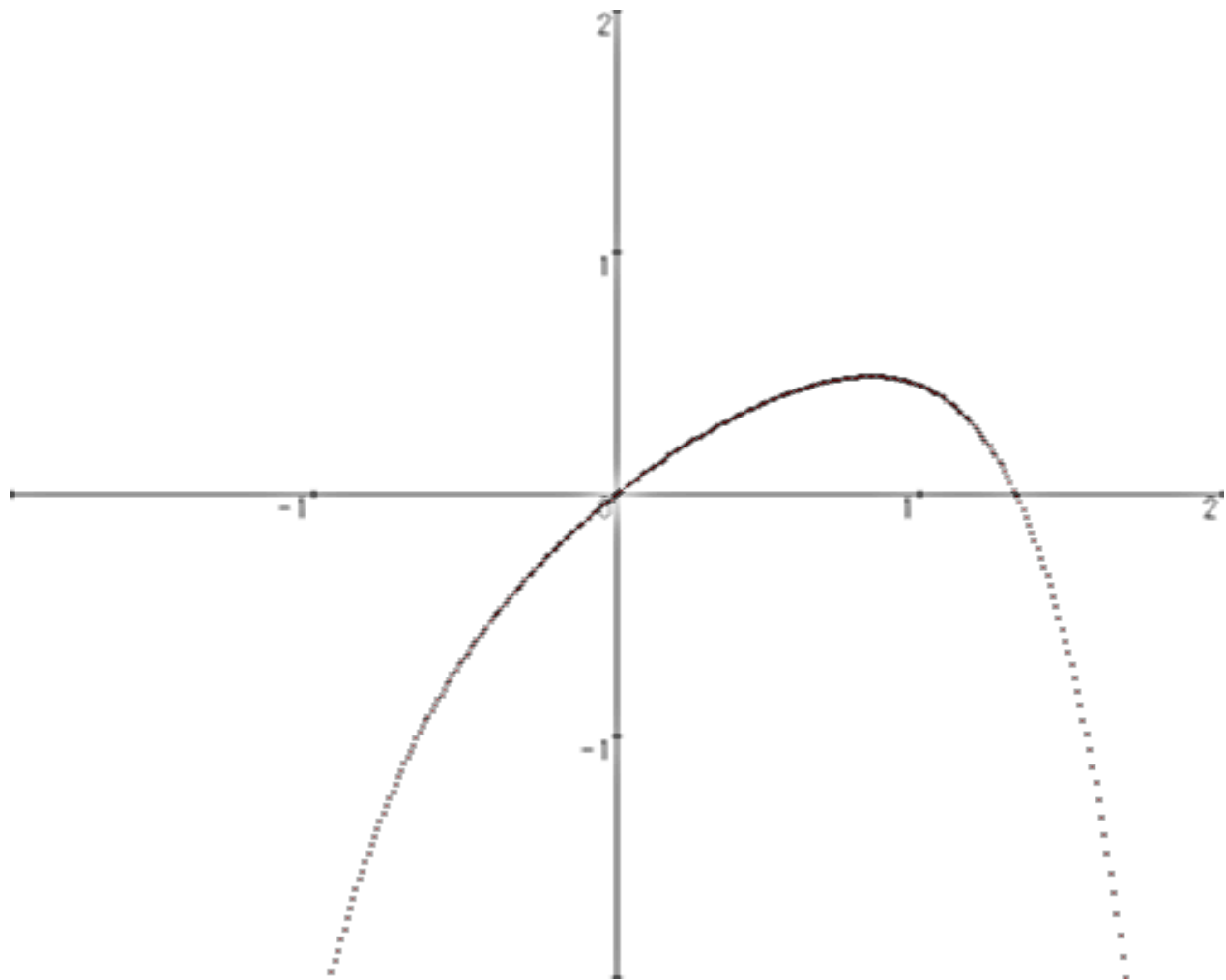
具体例4

$$\log_e(1+x)$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$(-1 < x \leq 1)$$

Numerical Computing with BASIC



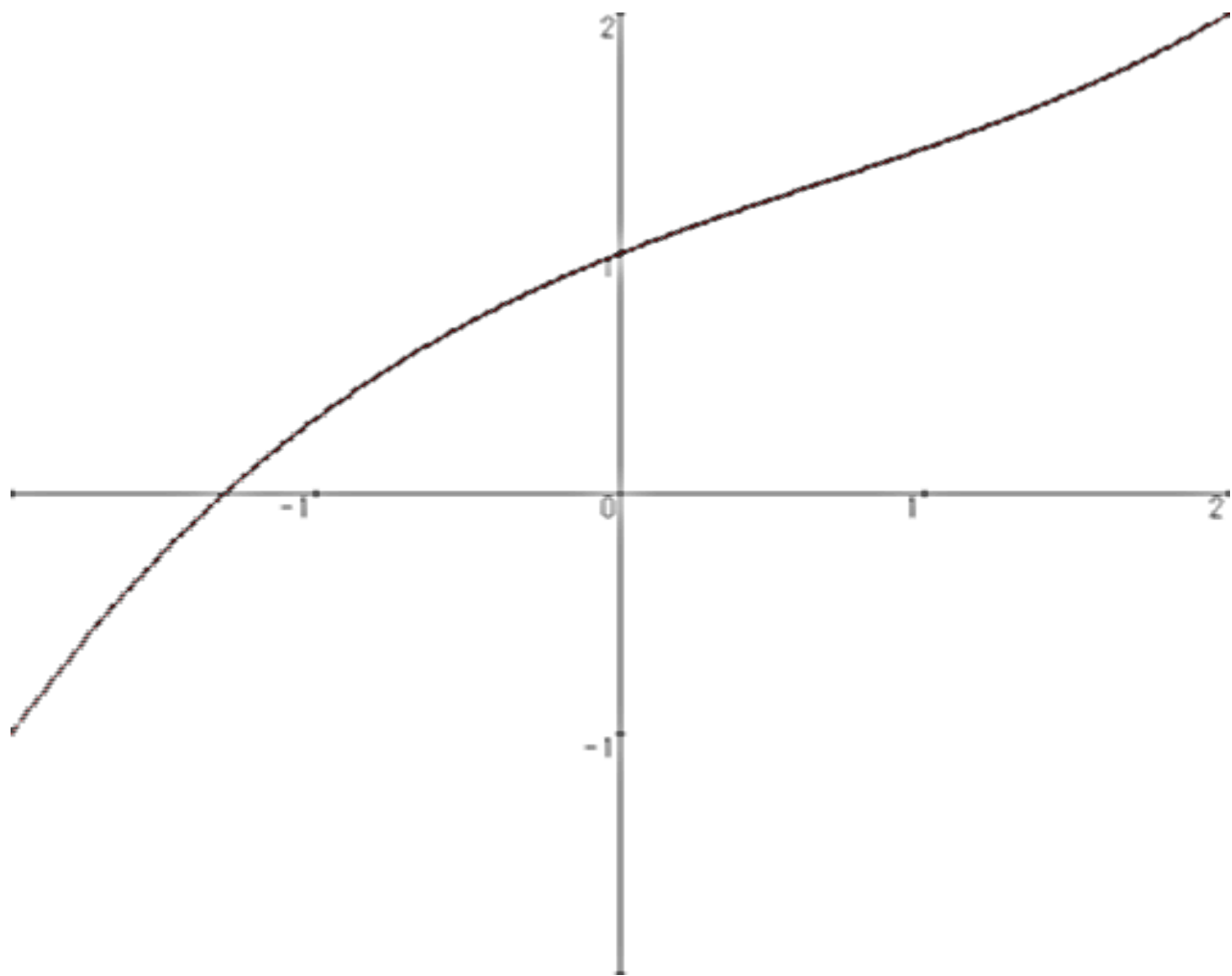
具体例5

$$\sqrt{1+x}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \dots$$

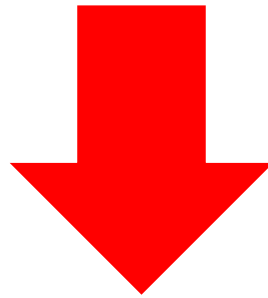
$$(-1 < x < 1)$$

Numerical Computing with BASIC



確率論的方法

\sqrt{x} can NOT be expanded
by Taylor's formula



Bernstein's Idea by Coin flipping

基本的なアイデア

Weierstrassの**多項式近似定理**をコイン投げを手がかりとしながら**確率論的に証明する**。

確率論的証明のメリット

関数解析的方法あるいは熱核による方法の証明では、近似多項式の具体的な形が分からないのに対し、確率論的方法の証明では**近似多項式の具体的な形**が分かる。

Bernsteinの多項式で与えられる。

Bernstein

多項式近似定理

$$f(x) \in C[0,1]$$

$$f_n(p) := \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad 0 \leq p \leq 1$$

(n -th Bernstein's polynomial)

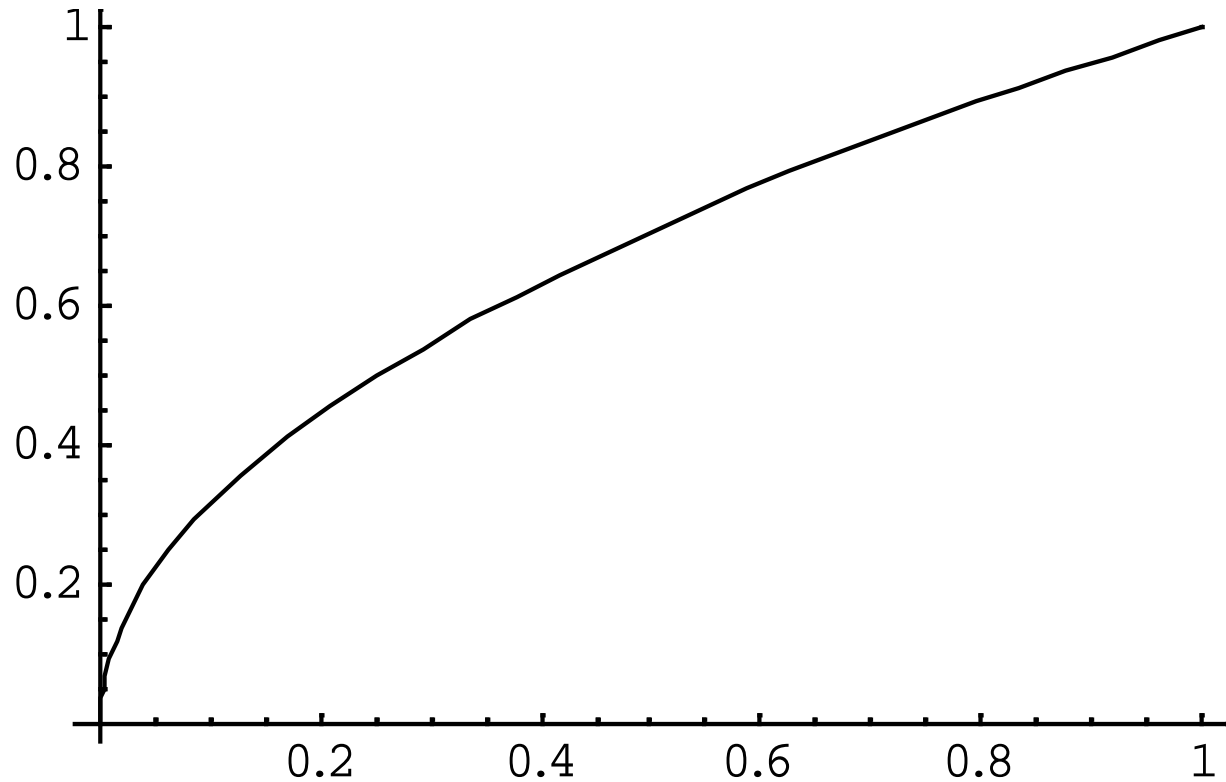
\Rightarrow

$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ such that

$$\forall n \geq N \Rightarrow \max_{0 \leq p \leq 1} |f(p) - f_n(p)| < \varepsilon$$

Numerical Computing
With
MATHEMATICA

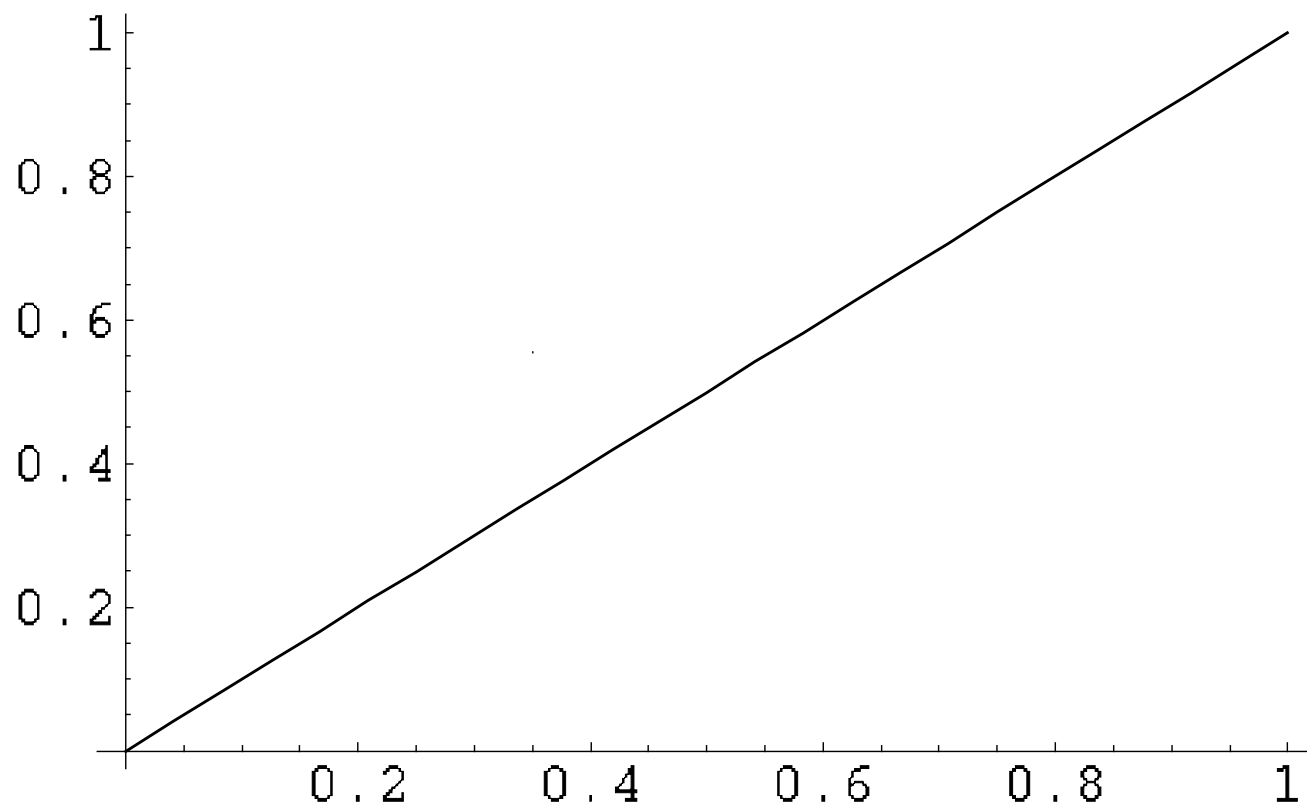
具体例 $f(x) = \sqrt{x}$



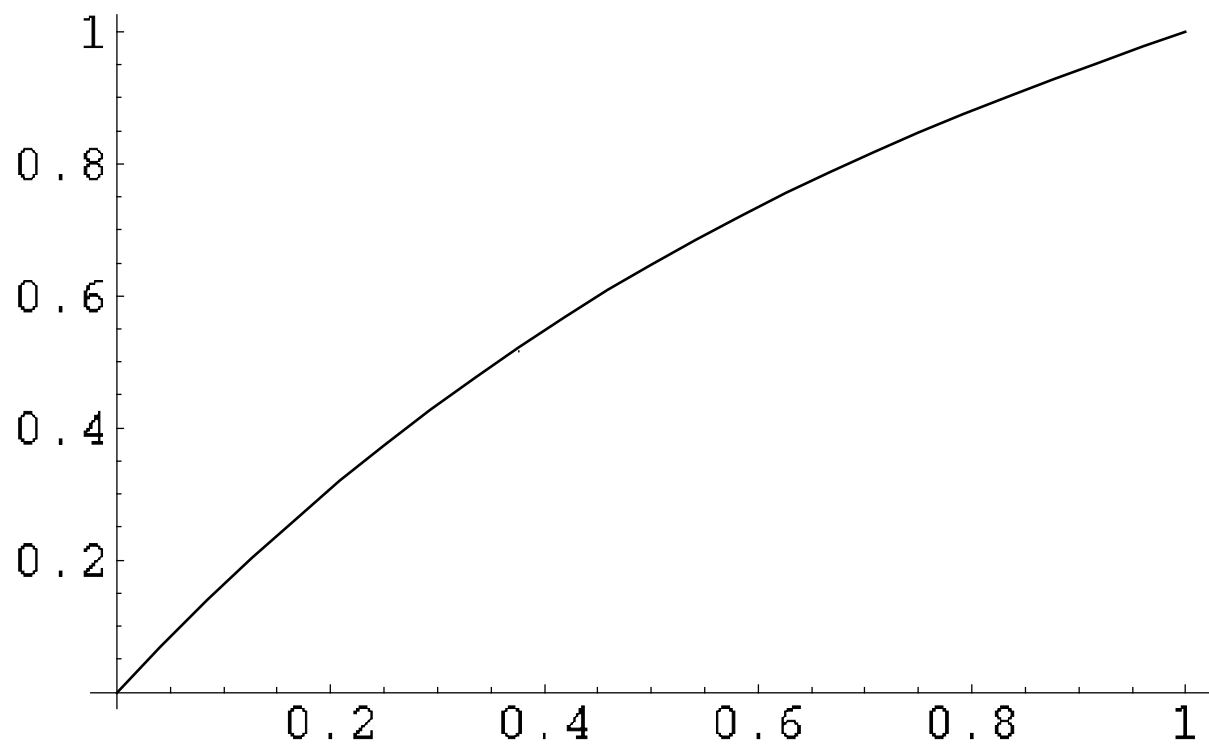
Bernstein の多項式

$$f_n(x) := \sum_{k=0}^n \sqrt{\frac{k}{n}} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

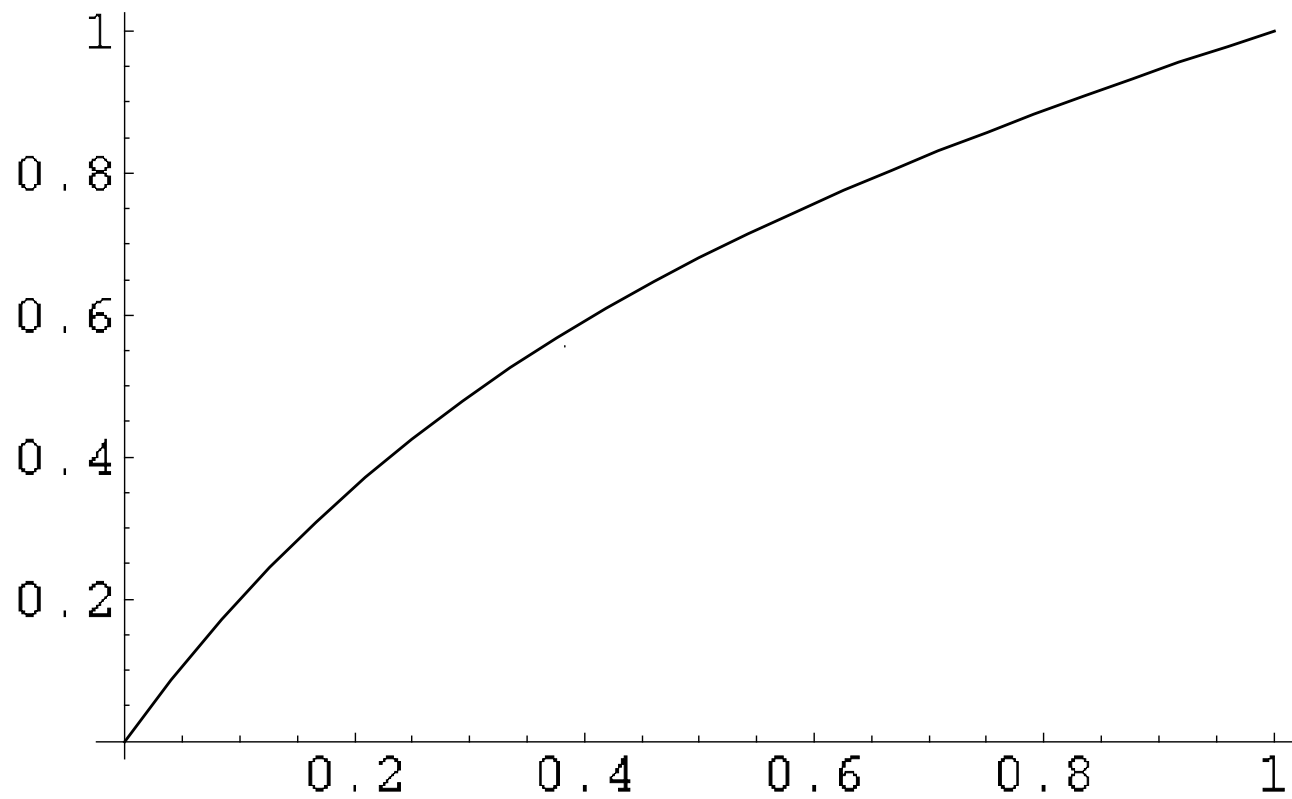
$$f_1(x)$$



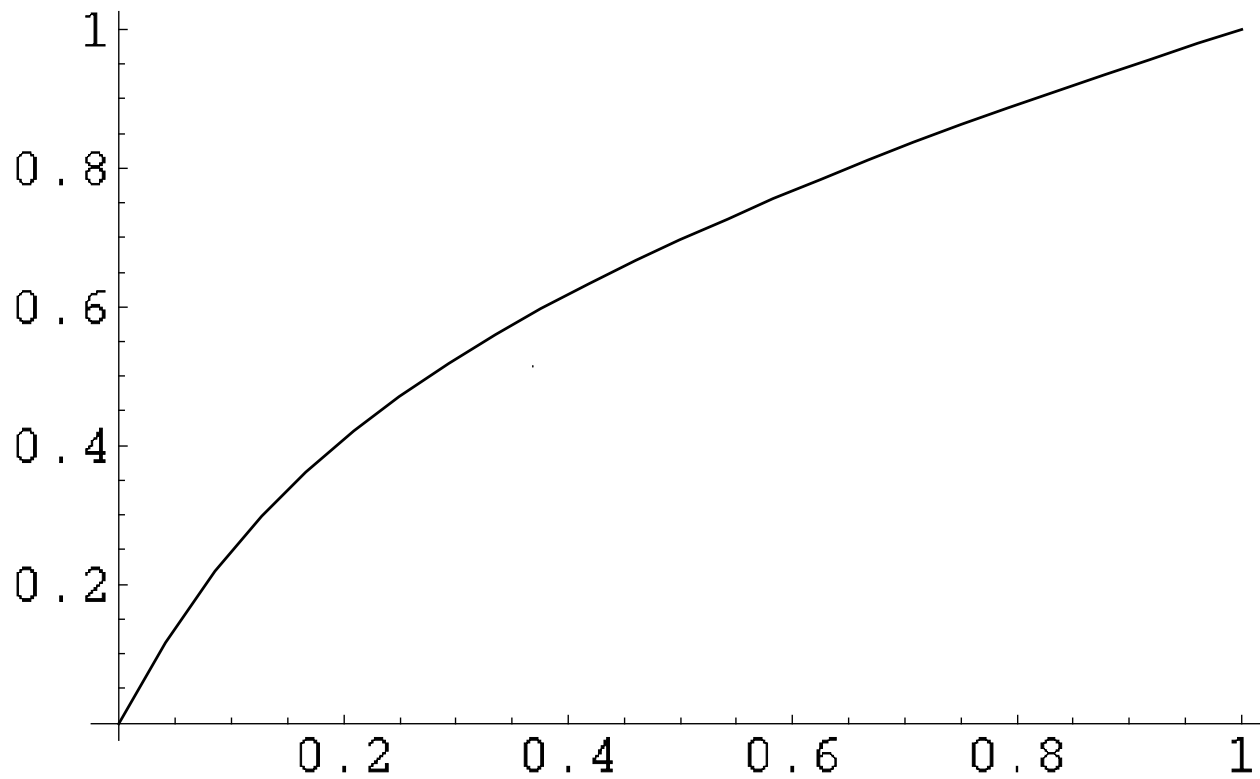
$$f_3(x)$$



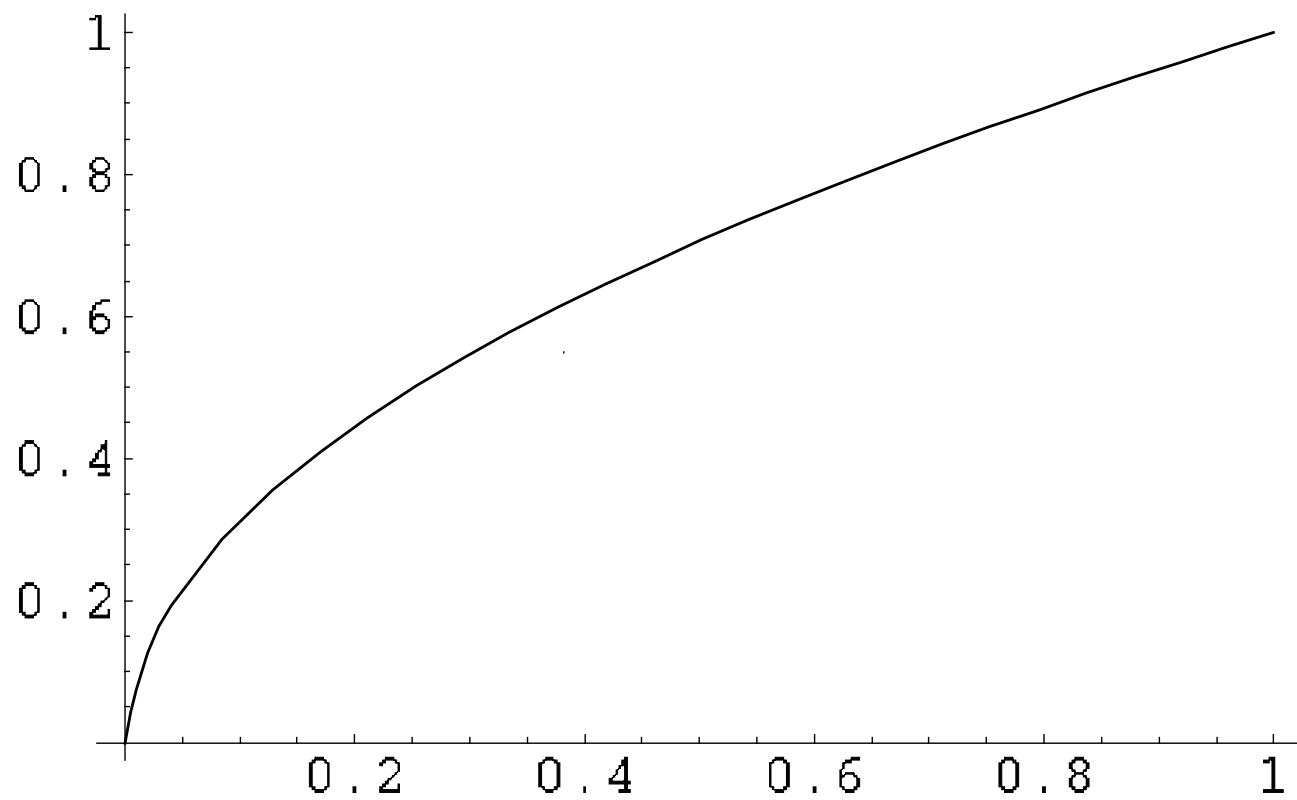
$$f_5(x)$$



$$f_{10}(x)$$



$$f_{100}(x)$$



確率論からの 準備

確率空間

Ω : 標本空間

\mathfrak{B} : 完全加法族

P : 確率測度

$(\Omega, \mathfrak{B}, P)$: 確率空間

X_i : 確率変数 (可測関数)

$E(X_i) = \int_{\Omega} X_i(\omega) dP$: 平均 (期待値)

$V(X_i) = E\left((X_i - E(X_i))^2\right)$: 分散

Chebychev の不等式

(Ω, \mathcal{B}, P) 確率空間
 X : 確率変数
 $E(X^2) < \infty$

\Rightarrow

$\forall \varepsilon > 0$

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega \mid |X(\omega) - E(X)| \geq \varepsilon\right\}\right) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Chebychev の不等式の証明

$$V(X)$$

$$= \int_{\Omega} (X(\omega) - E(X))^2 dP(\omega)$$

$$\geq \int_{|X(\omega) - E(X)| \geq \varepsilon} (X(\omega) - E(X))^2 dP(\omega)$$

$$\geq \varepsilon^2 \int_{|X(\omega) - E(X)| \geq \varepsilon} dP(\omega)$$

$$= \varepsilon^2 P\left(\left\{\omega \in \Omega \mid |X(\omega) - E(X)| \geq \varepsilon\right\}\right).$$

独立な確率変数

$(\Omega, \mathfrak{B}, P)$: 確率空間

X_1, X_2 **独立**

\Leftrightarrow
def

\forall 1次元Borel 集合 A_1, A_2

$$\begin{aligned} & P(\{\omega \in \Omega \mid X_1(\omega) \in A_1, X_2(\omega) \in A_2\}) \\ &= P(\{\omega \in \Omega \mid X_1(\omega) \in A_1\}) P(\{\omega \in \Omega \mid X_2(\omega) \in A_2\}) \end{aligned}$$

コイン投げ

Bernoulli 分布

{ 表 1 が出る確率 : p ($0 \leq p \leq 1$)
{ 裏 0 が出る確率 : $1 - p$

X_n : n -回目の試行

\Rightarrow

{ $P(X_n = 1) = p$
{ $P(X_n = 0) = 1 - p$

平均と分散の計算(1)

$$(1) E(X_n) = 1 \cdot P(X_n = 1) + 0 \cdot P(X_n = 0) = p$$

$$(2) E(X_n^2) = 1 \cdot P(X_n^2 = 1) + 0 \cdot P(X_n^2 = 0)$$

$$= 1 \cdot P(X_n = 1) + 0 \cdot P(X_n = 0)$$

$$= 1 \cdot P(X_n = 1) = p$$

平均と分散の計算(2)

$$\begin{aligned} V(X_n) &= \int_{\Omega} (X_n(\omega) - E(X_n))^2 dP(\omega) \\ &= \int_{\Omega} (X_n(\omega) - p)^2 dP(\omega) \\ &= \int_{\Omega} X_n(\omega)^2 dP(\omega) - 2p \int_{\Omega} X_n(\omega) dP(\omega) + p^2 \\ &= E(X_n^2) - E(X_n)^2 = p(1-p) \end{aligned}$$

平均と分散の計算(3)

$$E(X_k) = p, \quad V(X_k) = p(1-p)$$

$$Y_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

$$(1) E(Y_n) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n E(X_k) = p$$

$$(2) V(Y_n) = \sum_{k=1}^n V\left(\frac{X_k}{n}\right) = n \cdot \frac{p(1-p)}{n^2} \leq \frac{1}{4n},$$

$$0 \leq \forall p \leq 1.$$

補題1

$$0 \leq \forall k \leq n,$$

$$P(X_1 + \cdots + X_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

ここで

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{(n-k+1) \cdots n}{k!}$$

補題2

$$Y_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}, 0 \leq Y_n \leq 1.$$

$$f \in C[0,1]$$

\Rightarrow

$$E(f(Y_n)) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

補題2の証明

$$\begin{aligned} E(f(Y_n)) &= \int_{\Omega} f(Y_n(\omega)) dP(\omega) \\ &= \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) P\left(\left\{\omega \in \Omega \mid Y_n(\omega) = \frac{k}{n}\right\}\right) \\ &= \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) P\left(\left\{\omega \in \Omega \mid (X_1 + \dots + X_n)(\omega) = k\right\}\right) \\ &= \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

Bernsteinの多項式近似定理

$$f(x) \in C[0,1]$$

$$f_n(p) := \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad 0 \leq p \leq 1$$

(n -th Bernstein's polynomial)

\Rightarrow

$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ such that

$$\forall n \geq N \Rightarrow \max_{0 \leq p \leq 1} |f(p) - f_n(p)| < \varepsilon$$

多項式近似定理の証明(1)

$$\begin{aligned} f_n(p) - f(p) &= E(f(Y_n)) - f(p) \\ &= \int_{\Omega} f(Y_n(\omega)) dP(\omega) - f(p) \\ &= \int_{\Omega} \{f(Y_n(\omega)) - f(p)\} dP(\omega) \\ &= \int_{\{\omega \mid |Y_n(\omega) - p| < \delta\}} \{f(Y_n(\omega)) - f(p)\} dP(\omega) \\ &\quad + \int_{\{\omega \mid |Y_n(\omega) - p| \geq \delta\}} \{f(Y_n(\omega)) - f(p)\} dP(\omega) \end{aligned}$$

多項式近似定理の証明(2)

$$A(p) := \int_{\{\omega \mid |Y_n(\omega) - p| < \delta\}} \{f(Y_n(\omega)) - f(p)\} dP(\omega)$$

$$y := Y_n(\omega)$$

\Rightarrow

$$|A(p)| \leq \int_{\{\omega \mid |Y_n(\omega) - p| < \delta\}} |f(Y_n(\omega)) - f(p)| dP(\omega)$$

$$\leq \max_{\{|y - q| \leq \delta\}} |f(y) - f(q)| \cdot \int_{\Omega} dP(\omega)$$

$$= \max_{\{|y - q| \leq \delta\}} |f(y) - f(q)|, \quad 0 \leq \forall p \leq 1$$

多項式近似定理の証明(3)

$$B(p) := \int_{\{\omega \mid |Y_n(\omega) - p| \geq \delta\}} \{f(Y_n(\omega)) - f(p)\} dP(\omega)$$

$$y := Y_n(\omega)$$

\Rightarrow

$$|B(p)| \leq \int_{\{\omega \mid |Y_n(\omega) - p| \geq \delta\}} |f(Y_n(\omega)) - f(p)| dP(\omega)$$

$$\leq \max_{\{|y - q| \geq \delta\}} |f(y) - f(q)| \int_{\{\omega \mid |Y_n(\omega) - p| \geq \delta\}} dP(\omega)$$

$$\leq 2 \max_{0 \leq y \leq 1} |f(y)| \cdot P\left(\left\{\omega \in \Omega \mid |Y_n(\omega) - p| \geq \varepsilon\right\}\right)$$

ところで、**チェビシエフの不等式**から

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega \mid |Y_n(\omega) - E(Y_n)| \geq \delta\right\}\right) \leq \frac{V(Y_n)}{\delta^2} = \frac{V(X_n)}{n\delta^2}$$

実際

$$\begin{aligned} V(Y_n) &= E\left((Y_n - p)^2\right) \\ &= E\left(\left(\frac{1}{n}(X_1 - p) + \cdots + \frac{1}{n}(X_n - p)\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\left(V(X_1) + \cdots + V(X_n)\right) \\ &= \frac{1}{n^2}nV(X_1) = \frac{1}{n}V(X_1) = \frac{1}{n}V(X_n) \end{aligned}$$

従って

$$V(X_n) = p(1-p) \leq \frac{1}{4}, \quad \forall 0 \leq p \leq 1$$

に注意して、

$$\begin{aligned} |B(p)| &\leq 2 \max_{0 \leq y \leq 1} |f(y)| \frac{V(X_n)}{n\delta^2} \\ &= 2 \max_{0 \leq y \leq 1} |f(y)| \frac{p(1-p)}{n\delta^2} \\ &\leq 2 \max_{0 \leq y \leq 1} |f(y)| \frac{1}{n\delta^2} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2} \max_{0 \leq y \leq 1} |f(y)| \frac{1}{n\delta^2} \end{aligned}$$

多項式近似定理の証明(4)

$$B(p) := \int_{\{\omega \mid |Y_n(\omega) - p| \geq \delta\}} \{f(Y_n(\omega)) - f(p)\} dP(\omega)$$

\Rightarrow

$$|B(p)| \leq 2 \max_{0 \leq y \leq 1} |f(y)| \cdot \mathbf{P}\left(\{\omega \in \Omega \mid |Y_n(\omega) - p| \geq \delta\}\right)$$

$$\leq 2 \max_{0 \leq y \leq 1} |f(y)| \cdot \frac{p(1-p)}{n\delta^2}$$

$$\leq \frac{1}{2n\delta^2} \max_{0 \leq y \leq 1} |f(y)|, \quad 0 \leq \forall p \leq 1.$$

多項式近似定理の証明(5)

$$\begin{aligned} & |f_n(p) - f(p)| \\ &= |A(p) + B(p)| \\ &\leq |A(p)| + |B(p)| \\ &\leq \max_{|y-q| \leq \delta} |f(y) - f(q)| \\ &\quad + \frac{1}{2} \max_{0 \leq y \leq 1} |f(y)| \frac{1}{n\delta^2} \end{aligned}$$

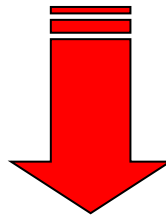
一樣連續性

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$ such that

$$|y - p| < \delta_0 \implies |f(y) - f(p)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

多項式近似定理の証明(6)

$$\begin{aligned} & \max_{0 \leq p \leq 1} |f_n(p) - f(p)| \\ & \leq \max_{\{|y-q| \leq \delta\}} |f(y) - f(q)| + \frac{1}{2n\delta^2} \max_{0 \leq y \leq 1} |f(y)| \end{aligned}$$



$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ such that
 $\forall n \geq N \Rightarrow \max_{0 \leq p \leq 1} |f(p) - f_n(p)| < \varepsilon$

参考文献

[1] 志賀徳造:「ルベীগ積分から確率論」
共立講座21世紀の数学、共立出版
(2000年)

[2] 佐藤 担:「初めての確率論 測度から確率へ」共立出版 (1994年)

[3] 伊藤清三:「ルベীগ積分入門」
裳華房 (1963年)

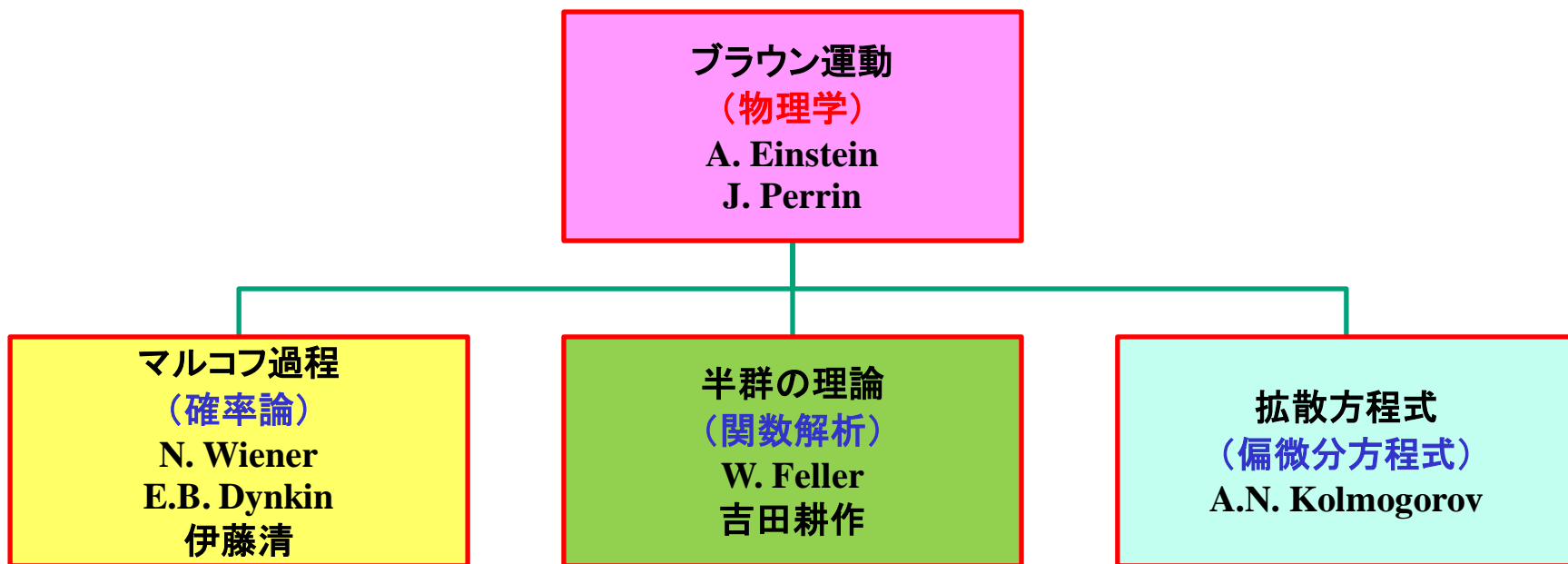
第2部

ブラウン運動の数理

講義の目的

- **ブラウン運動**の数学的研究を通して、解析学の3分野**確率論**、**関数解析**、**偏微分方程式**の密接な関係を概観すること。

ブラウン運動の数学的研究



結論

- 領域の内部での拡散現象は、連続的な拡散と不連続な拡散(ジャンプ)の2つの現象によって特徴付けられる。
- 境界上の拡散現象は、吸収、反射、粘性、連続的な拡散と不連続な拡散(ジャンプ)等の6つの現象によって分類される。

問題の背景

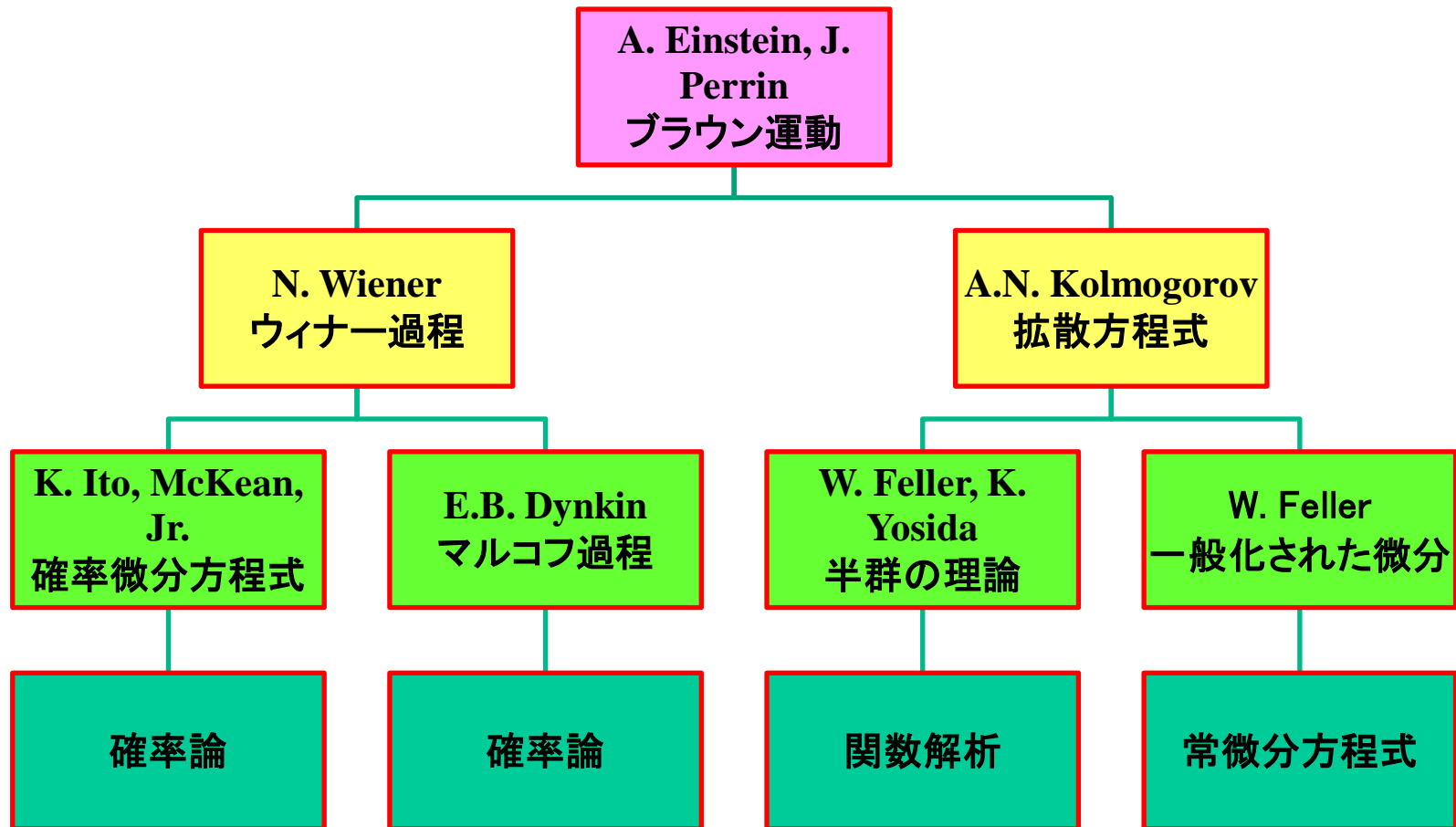
ブラウン運動小史

- 1828年 **ブラウン**: 水面上の**花粉の運動**の観察
- 1905年 **アインシュタイン**: **ブラウン運動の統計物理学**的解明(拡散係数とアヴォガドロ数の関係)
- 1908年 **ペラン**: ブラウン運動の**アインシュタイン理論**の実験的検証(アヴォガドロ数の実験値の測定)
- 1923年 **ウィナー**: **ブラウン運動**の数学的研究(ウィナー過程の構成)

1次元拡散過程の分類問題 (解決済み)

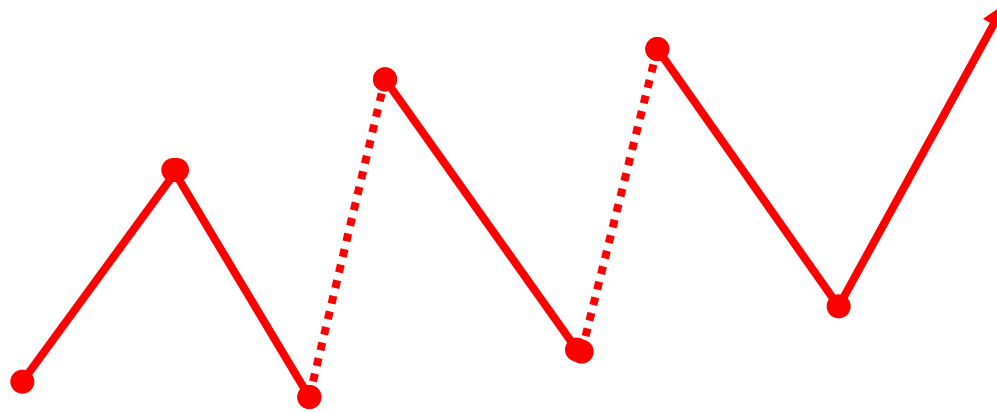
- ◆ 1931年 コルモゴロフ: 偏微分方程式的研究
(フォッカー・プランク方程式)
- ◆ 1952年 フェラー 吉田耕作: 関数解析的研究
(半群の生成作用素の特徴付け)
- ◆ 1965年 ディンキン: 確率論的研究 (マルコフ
過程の構成)
- ◆ 1965年 伊藤清 マッキーン: 確率微分方程式
的研究 (ブラウン運動の微分積分学)

ブラウン運動研究の学問的系譜

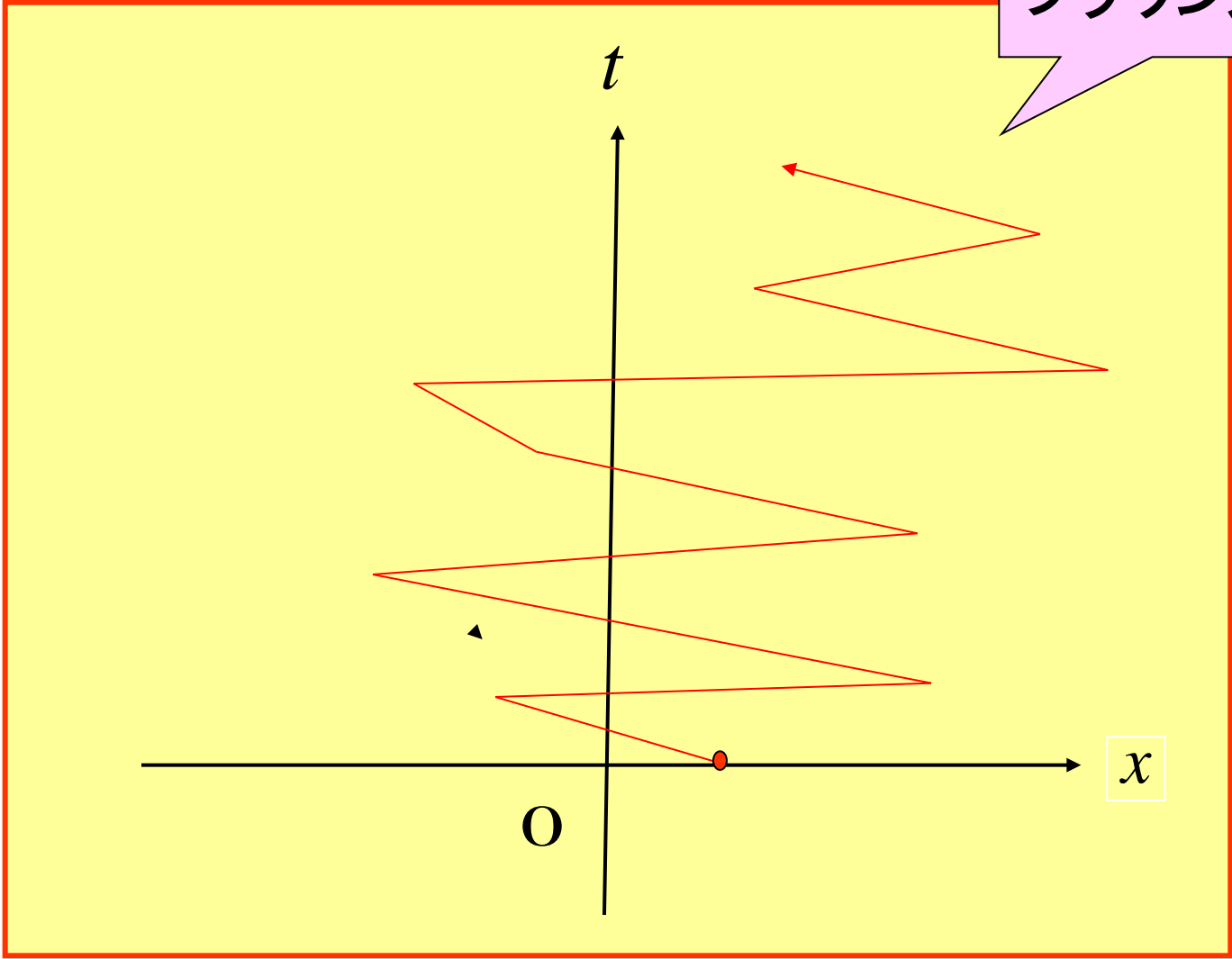


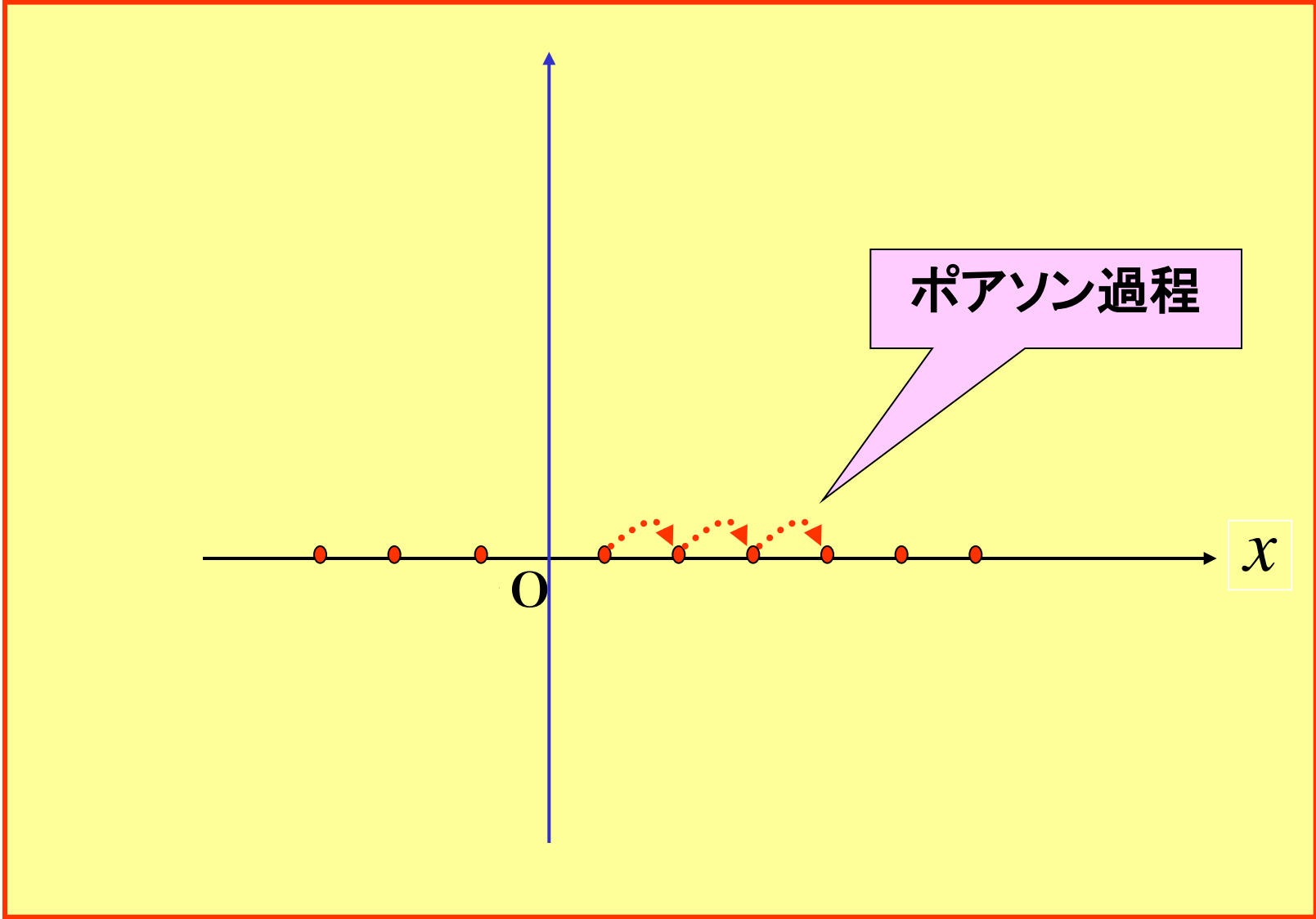
確率論的アプローチ (ミクروسコピック的視点)

見本経路の追跡



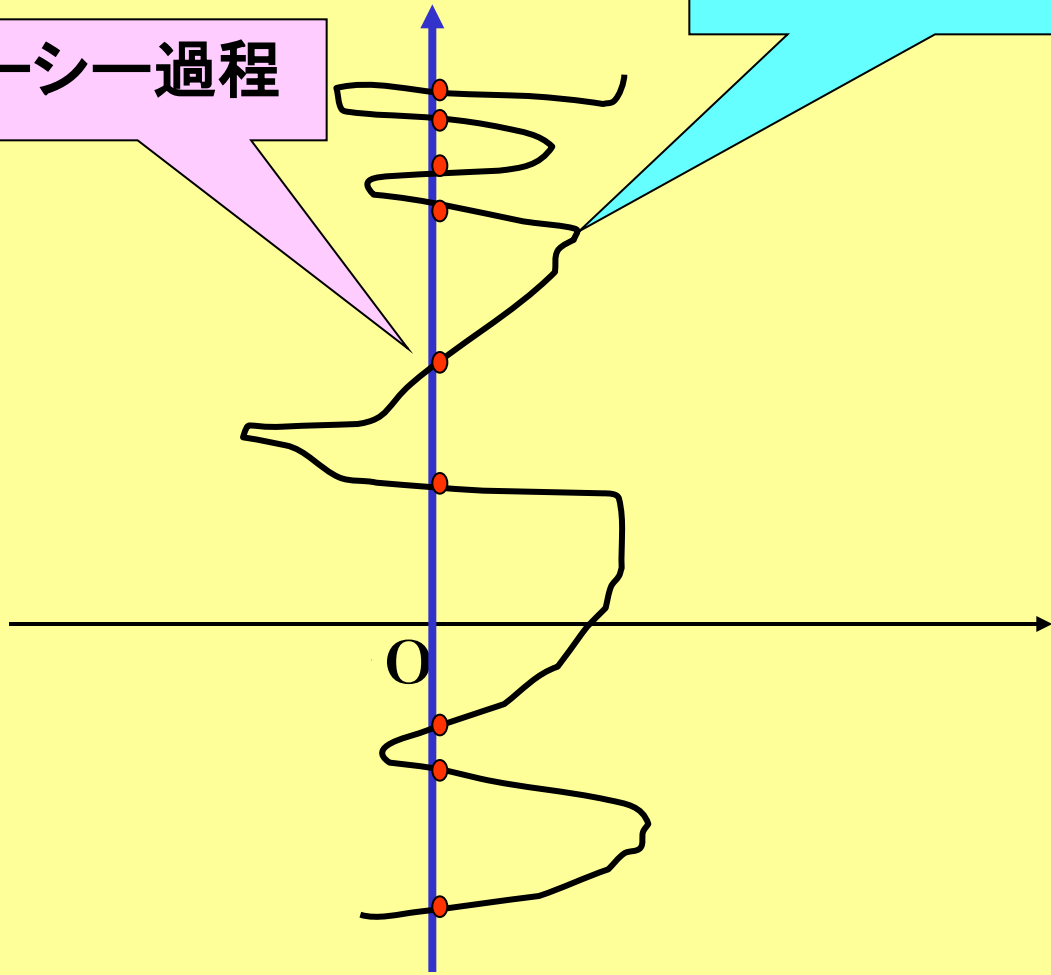
ブラウン運動





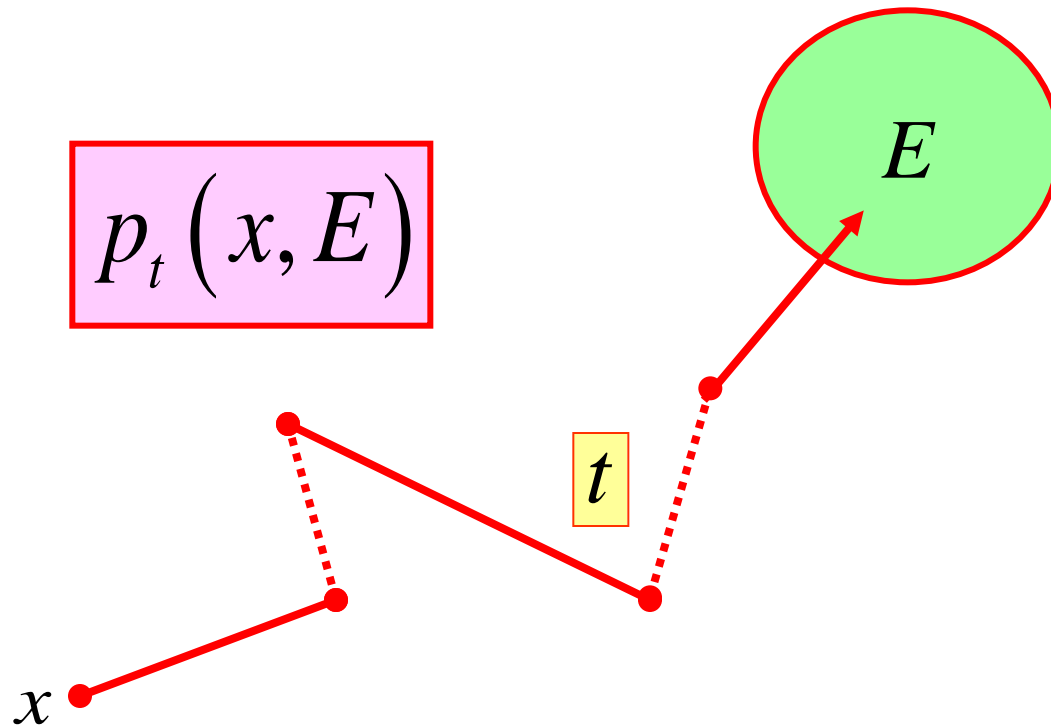
2次元ブラウン運動

コーシー過程

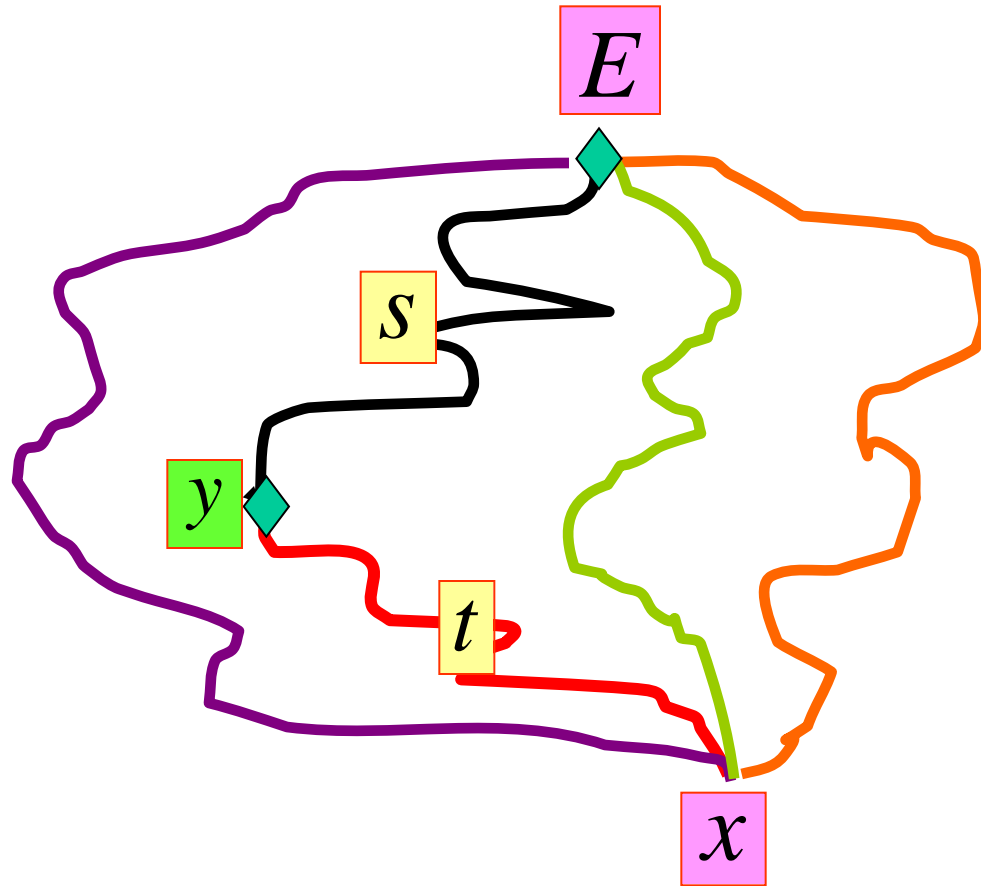


関数解析的アプローチ (マクロスコピック的視点)

推移確率の追跡

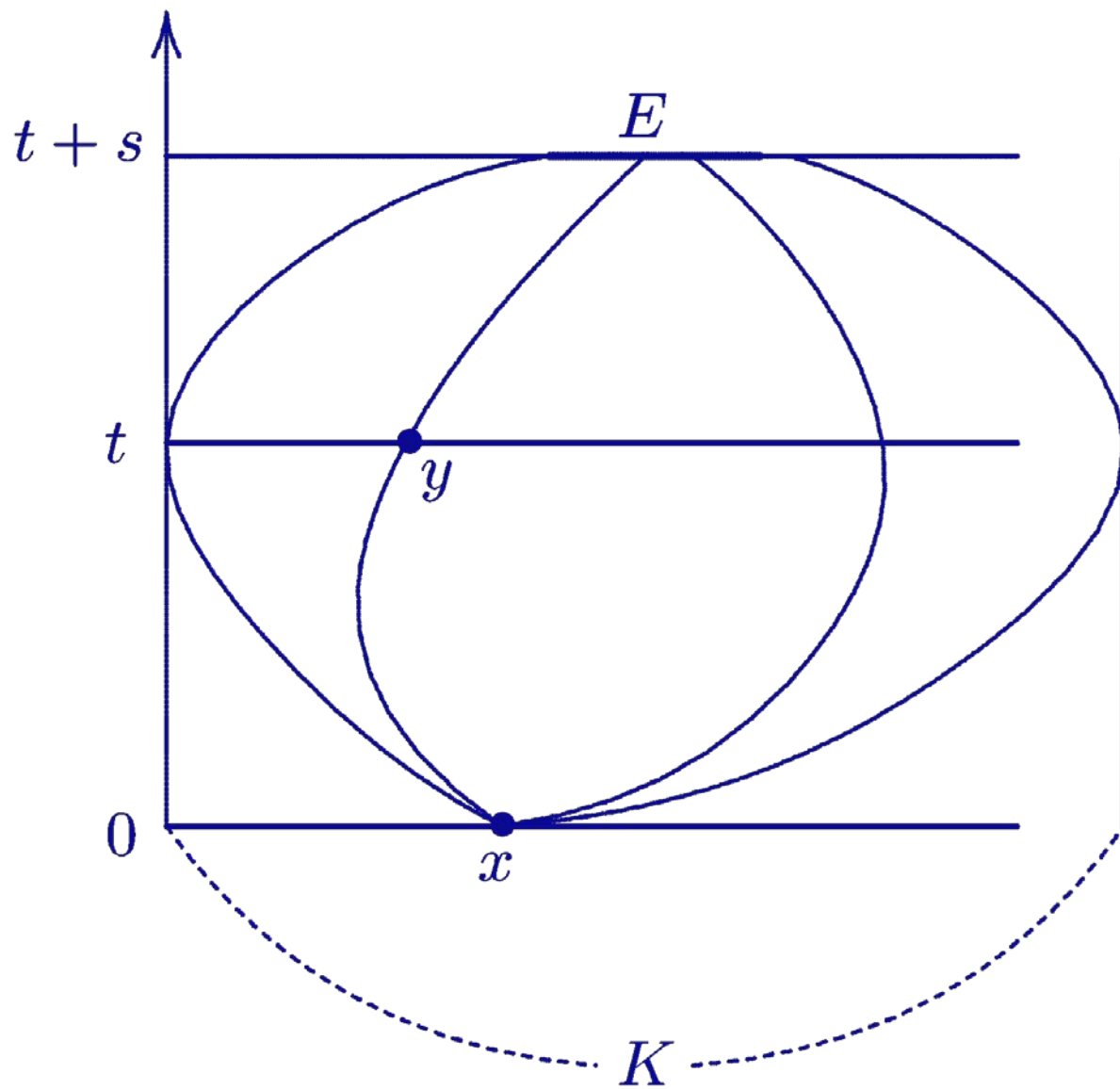


マルコフ性



チャップマン・コルモゴロフ式

$$p_{t+s}(x, E) = \int_K p_s(y, E) p_t(x, dy)$$



推移確率の例 (1次元の場合)

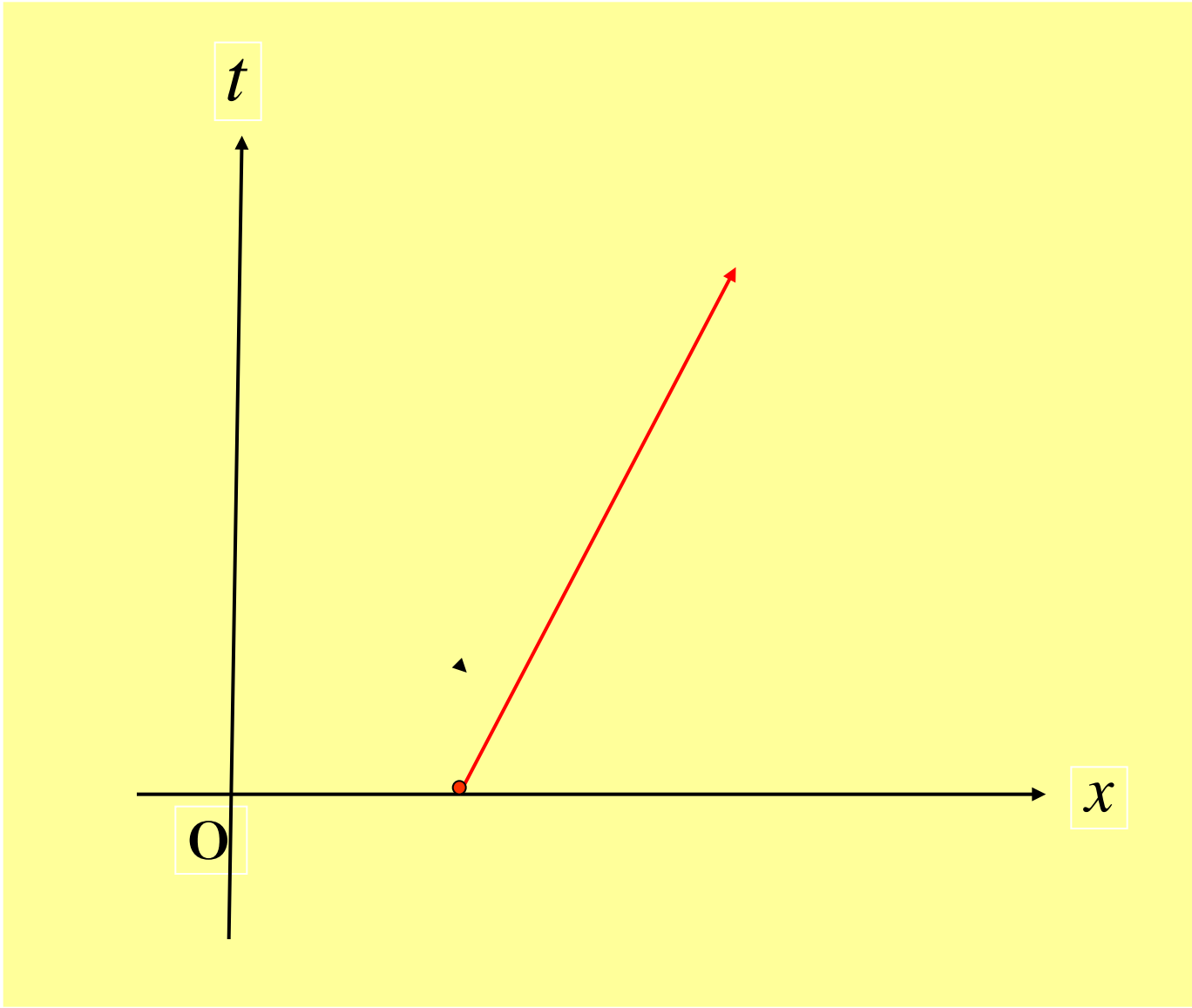
一様運動

$$K = \mathbf{R}$$

$$p_t(x, E) = \chi_E(x + vt), \quad \forall x \in \mathbf{R}, \forall E \in \mathfrak{B}(K)$$

この過程は、点 x を出発して、

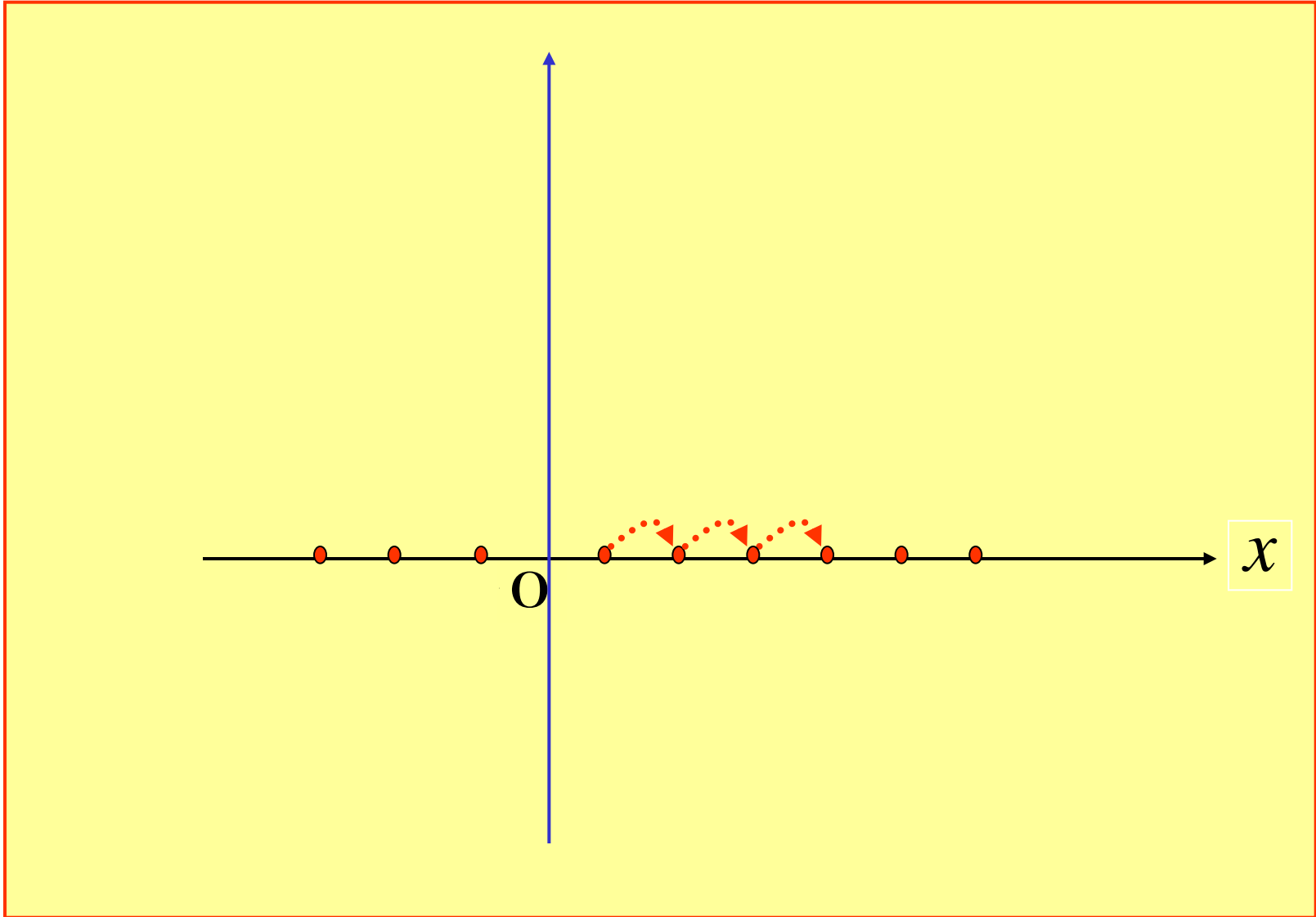
一定速度 v で動く運動を記述している。



ポアソン過程

$$p_t(x, E) = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \chi_E(x+n), \quad \lambda > 0$$

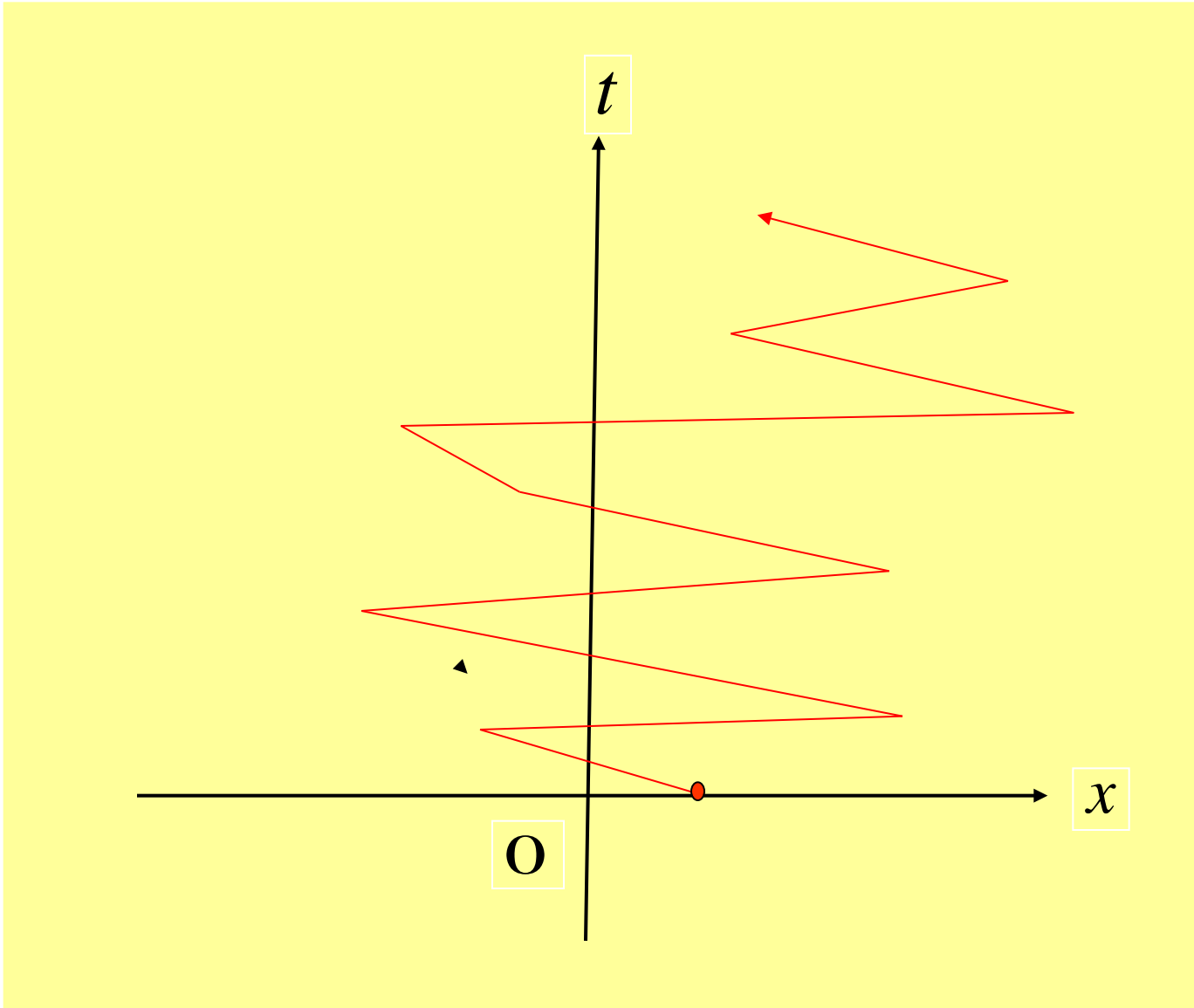
この過程は、点 x を出発して、
ポアソン時計に従って、右にワンステップ進む
ジャンプ運動を記述している。



ブラウン運動 (アインシュタイン)

$$p_t(x, E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_E \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2t}\right] dy$$

- 静止水面上の花粉の運動



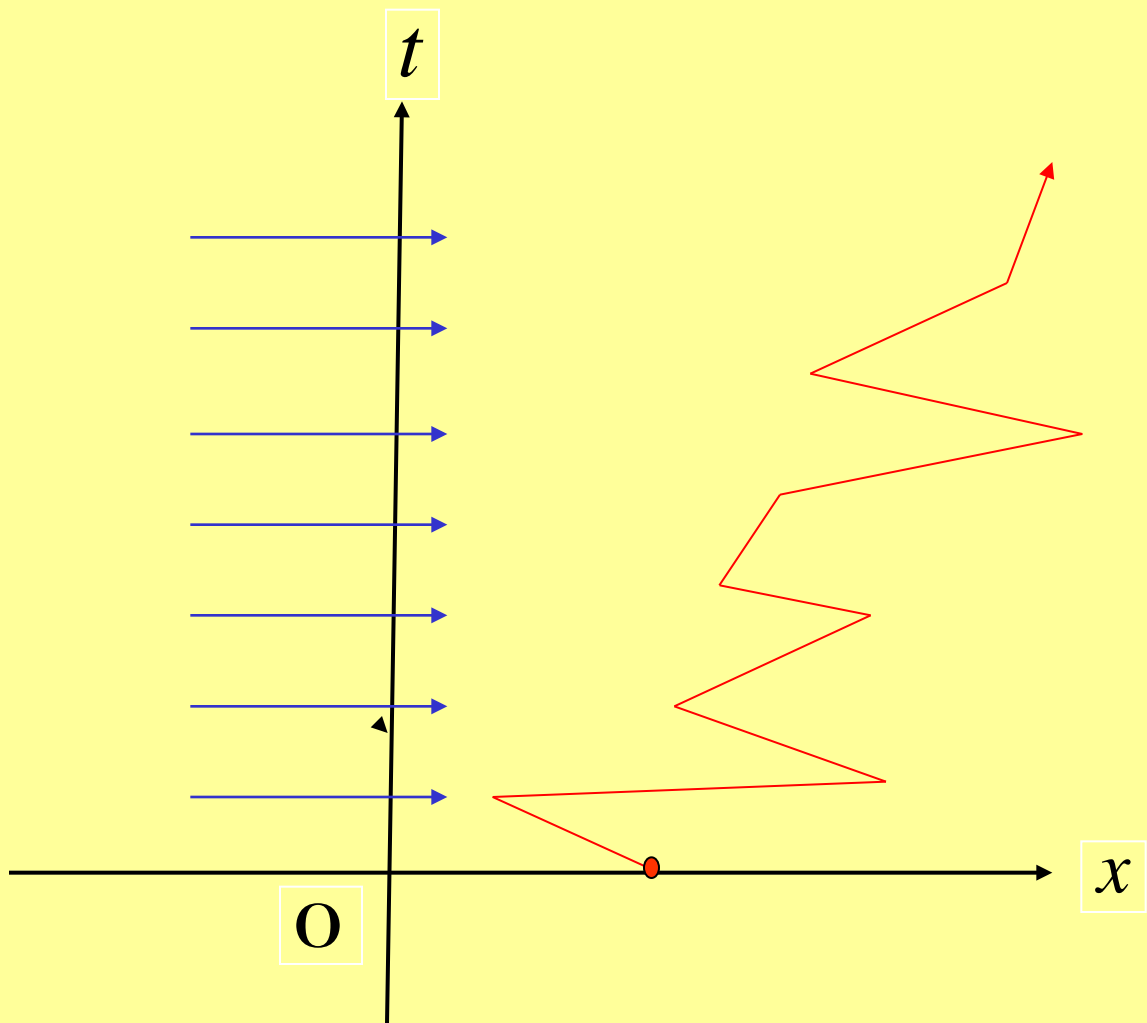
ドリフト付きのブラウン運動

$K = \mathbf{R}$

$$p_t(x, E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_E \exp\left[-\frac{(y - mt - x)^2}{2t}\right] dy,$$

$\forall x \in \mathbf{R}, \forall E \in \mathfrak{B}(K).$

速度 m で流れる川の中の一次元ブラウン運動



反射壁を持ったブラウン運動

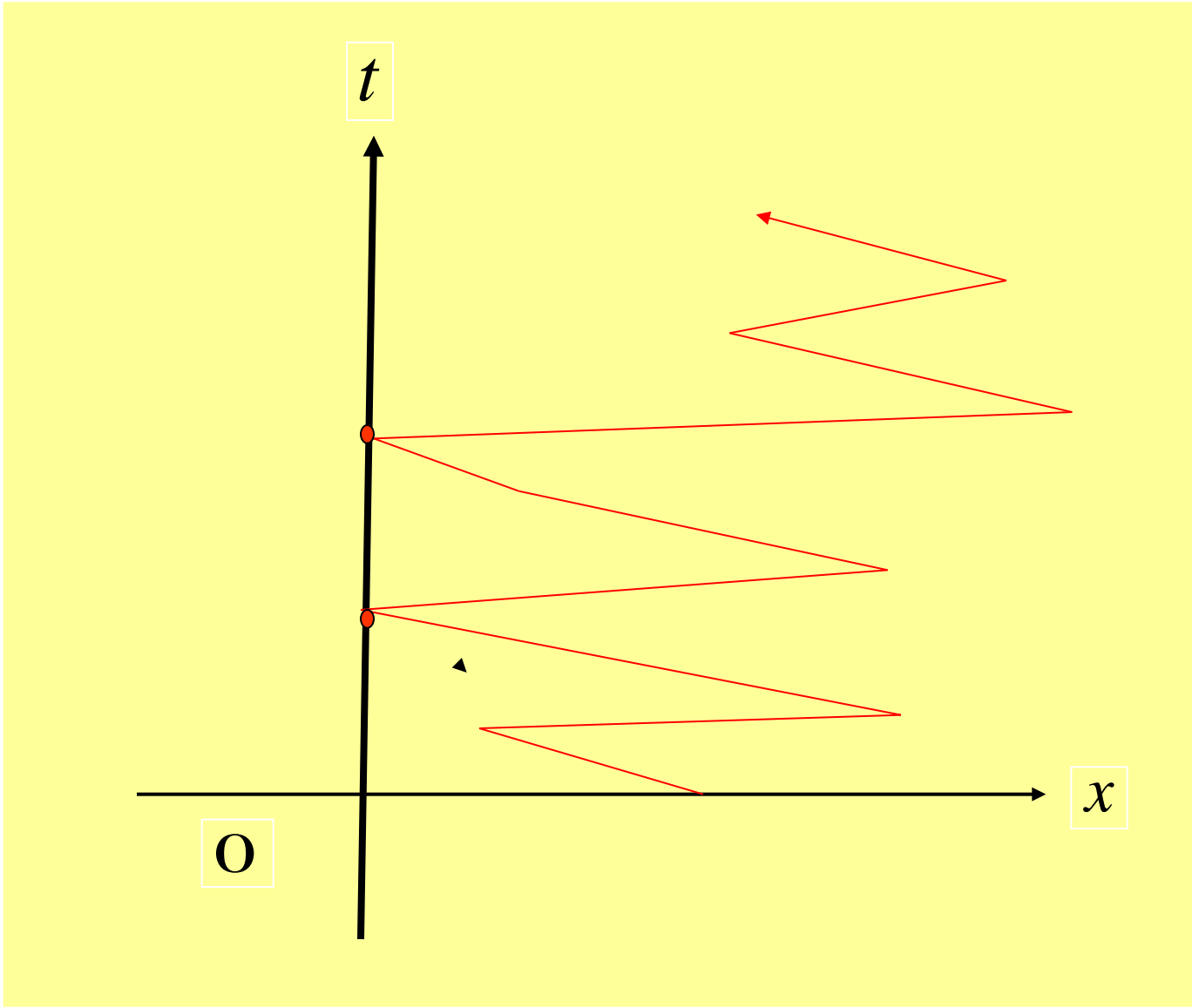
$$K = [0, \infty)$$

$$p_t(x, E)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left(\int_E \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2t}\right] dy + \int_E \exp\left[-\frac{(y+x)^2}{2t}\right] dy \right),$$

$$\forall x \in \mathbf{R}, \forall E \in \mathfrak{B}(K).$$

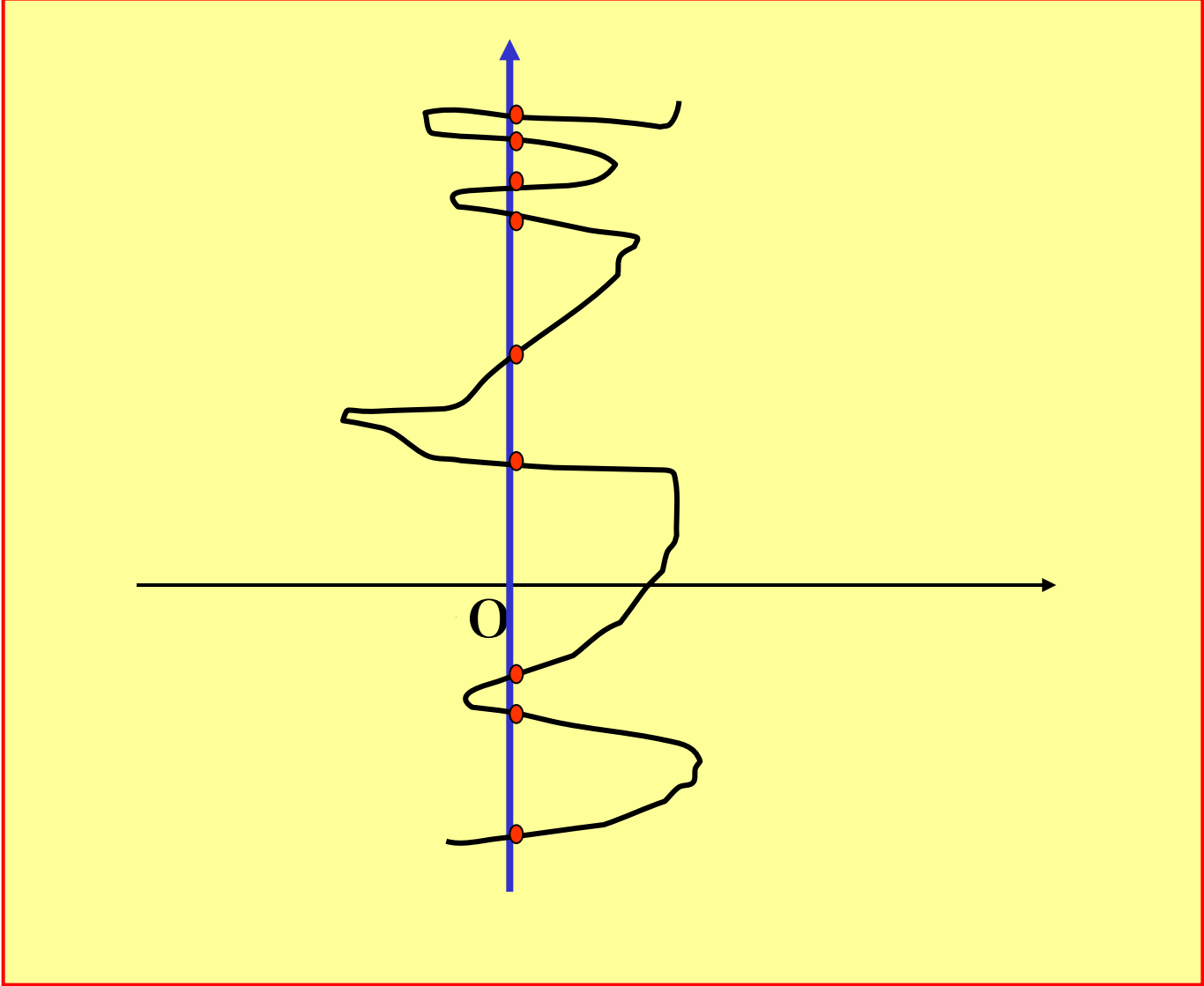
原点 $x = 0$ で**反射する**一次元ブラウン運動



コーシー過程

$$p_t(x, E) = \frac{1}{\pi} \int_E \frac{t}{t^2 + (y - x)^2} dy,$$

2次元ブラウン運動の y 軸への軌跡



多次元拡散過程の分類問題

◆ 多次元拡散過程を解析的に分類すること。

偏微分方程式的アプローチ (メゾスコピック的視点)

結論

- 領域の内部での拡散現象は、連続的な拡散と不連続な拡散(ジャンプ)の2つの現象によって特徴付けられる。
- 境界上の拡散現象は、吸収、反射、粘性、連続的な拡散と不連続な拡散(ジャンプ)等の6つの現象によって分類される。

多次元拡散過程 の研究小史

研究小史(1)

- 1959年: A.D. Wentzell (境界条件の特徴付け)
- 1964年: W.v. Waldenfels (領域内部での積分微分作用素の特徴付け)
- 1965年: K. Sato and T. Ueno (半群のアプローチ, 抽象的枠組み)
- 1968年: J.M.Bony, P.Courrege and P.Priouret (半群のアプローチ, 古典的ポテンシャル論の枠組み)

研究小史(2)

- 1979年: K. Taira (半群のアプローチ, 擬微分作用素の理論)
- 1986年: C. Canelier (半群のアプローチ, 楕円型正則摂動法)
- 1988年: S. Takanobu and S. Watanabe (確率微分方程式的アプローチ)

文献

■ **K. Taira: Diffusion Processes and Partial Differential Equations**
Academic Press, 1988

■ **K. Taira: Semigroups, Boundary Value Problems and Markov Processes**
Springer-Verlag, 2004

追加文献

- **K. Taira**: Semigroups, boundary value problems and Markov processes, **Second Edition**, Springer–Verlag, Springer Monographs in Mathematics, 2014

第3部

拡散過程と半群

(関数解析的アプローチ)

関数解析からの準備

鳥瞰図

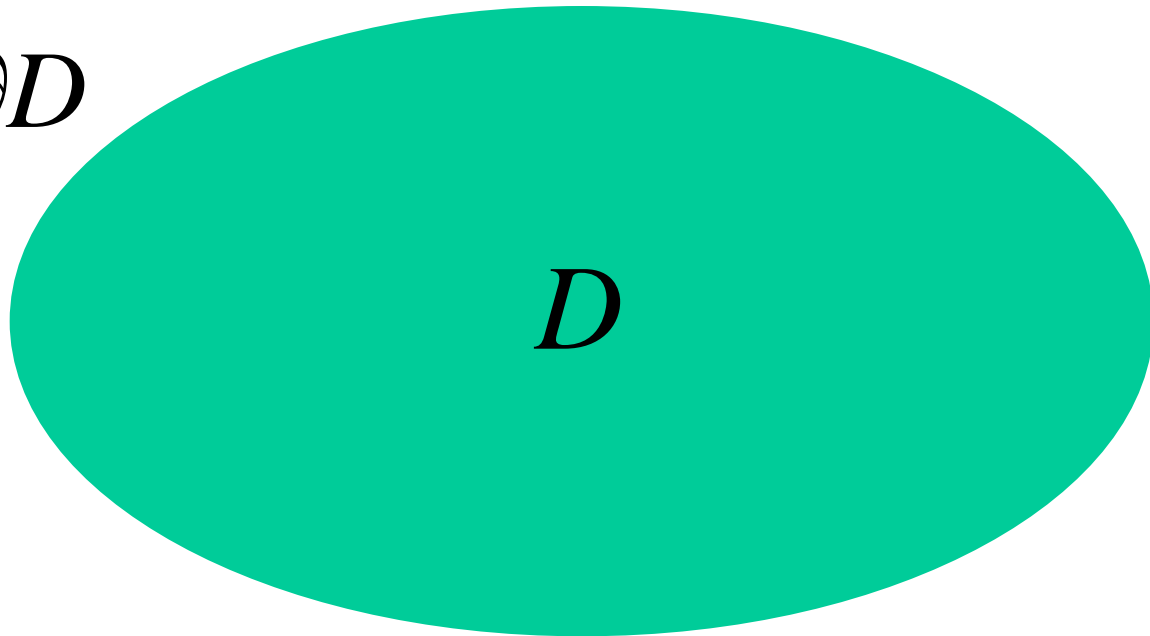
確率論	関数解析	境界値問題
マルコフ過程	フェラー半群	生成作用素 による特徴付け
マルコフ性 (チャップマン・コル モゴロフ方程式)	半群の性質	•ワルデンフェルス 積分微分作用素 •ヴェンツェル境界 条件
リースの表現定理 (連続関数空間版)	ヒレ・吉田の半群理論 (連続関数空間版)	

ヒレ・吉田の半群理論 (連続関数空間版)

有界領域

$$\mathbf{R}^N, \quad N \geq 2$$

∂D



基礎となる関数空間

$C(\bar{D})$ = 閉包 \bar{D} 上の実数値連続関数の全体

$$\|u\| = \max_{x \in \bar{D}} |u(x)| \quad (\text{最大値ノルム})$$

フェラー半群

$C(\bar{D})$ 上の有界線形作用素の族

$$\{T_t\}_{t \geq 0}$$

が、次の3条件を満たすとき、
フェラー半群という。

$$(1) T_{t+s} = T_t \cdot T_s, \quad \forall t, s \geq 0.$$

$$(2) \lim_{s \downarrow 0} \|T_{t+s} f - T_t f\| = 0, \quad \forall f \in C(\bar{D}).$$

$$(3) \forall f \in C(\bar{D}), 0 \leq f \leq 1 \text{ on } \bar{D} \Rightarrow 0 \leq T_t f \leq 1 \text{ on } \bar{D}.$$

半群と生成作用素

半群 (抽象的指数関数)

$$T_t = e^{t\mathcal{A}}$$

\mathcal{A} 生成作用素

ヒレ・吉田の定理

線形作用素

$$\mathfrak{A} : C(\bar{D}) \rightarrow C(\bar{D})$$

が、次の4条件を満たせば、
フェラー一半群 $\{T_t\}_{t \geq 0}$ を生成する。

(a) $D(\mathfrak{A})$ is **dense** in $C(\bar{D})$.

(b) $\exists u \in D(\mathfrak{A})$ s.t. $(\alpha - \mathfrak{A})u = f$, $\forall f \in C(\bar{D})$.

(c) $\forall f \in C(\bar{D})$, $f \geq 0$ on $\bar{D} \Rightarrow (\alpha - \mathfrak{A})^{-1} f \geq 0$ on \bar{D} .

(d) $\|(\alpha - \mathfrak{A})^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha}$, $\forall \alpha > 0$.

Riesz-Markov の表現定理 (線形作用素と測度)

Riesz-Markov の表現定理

$$T_t f(x) = \int_{\bar{D}} p_t(x, dy) f(y), \quad \forall f \in C(\bar{D})$$

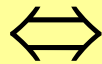
\Leftrightarrow

$$0 \leq \exists! p_t(x, \bullet) \leq 1, \quad \forall t \geq 0, \forall x \in \bar{D}$$

チャップマン・コルモゴロフ方程式 と半群の性質

チャップマン・コルモゴロフ式と半群の性質

$$T_{t+s} = T_t \cdot T_s, \quad \forall t, s \geq 0$$



$$p_{t+s}(x, E) = \int_{\bar{D}} p_t(x, dy) p_s(y, E), \quad \forall t, s \geq 0$$

生成作用素 の概形

生成作用素の概形

拡散現象	生成作用素
連続的な拡散 (ジャンプなし)	微分作用素 (局所的性質)
不連続な拡散 (ジャンプあり)	積分作用素 (大局的性質)

生成作用素の例 (1次元の場合)

一様運動

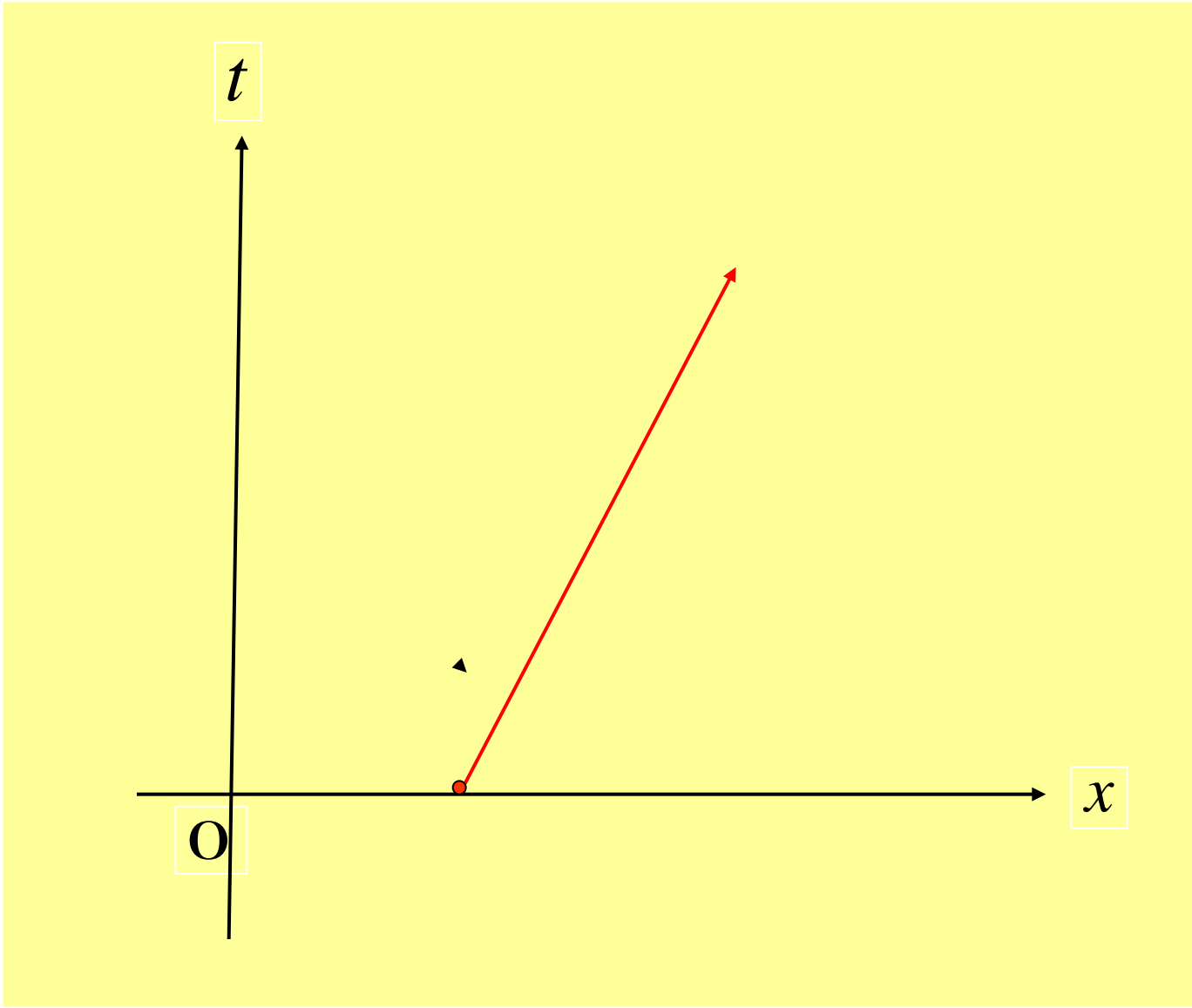
$$K = \mathbf{R}$$

$$D(\mathfrak{A}) = \left\{ f \in C_0(K) \cap C^1(K) : f' \in C_0(K) \right\}$$

$$\mathfrak{A}f = v f', \quad \forall f \in D(\mathfrak{A})$$

$C_0(K) =$ 無限遠点 $\pm\infty$ でゼロになる

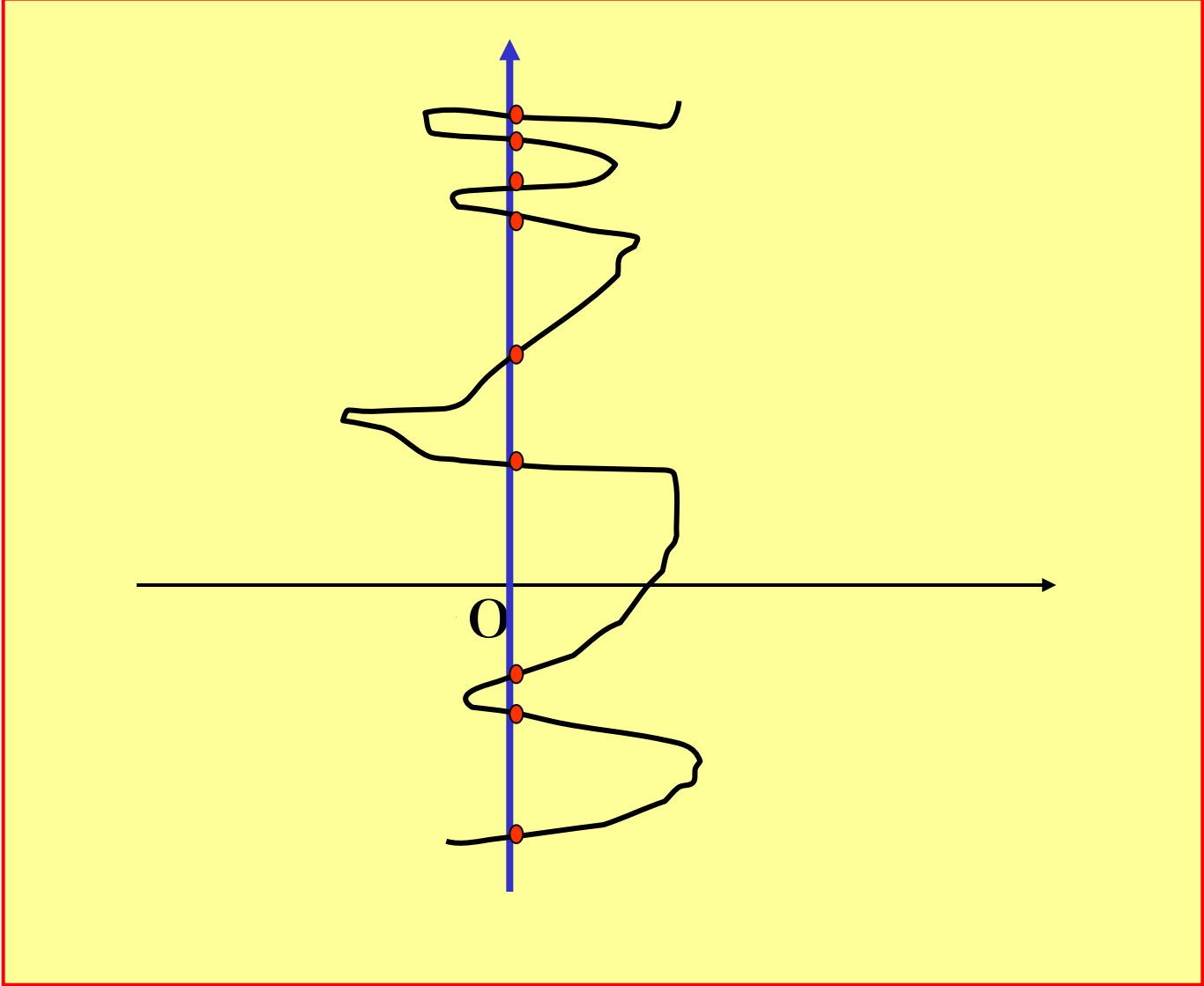
\mathbf{R} 上の実数値連続関数の全体



ブラウン運動

$$\mathcal{A}f = \frac{1}{2} f''$$

(微分作用素)



ドリフト付きのブラウン運動

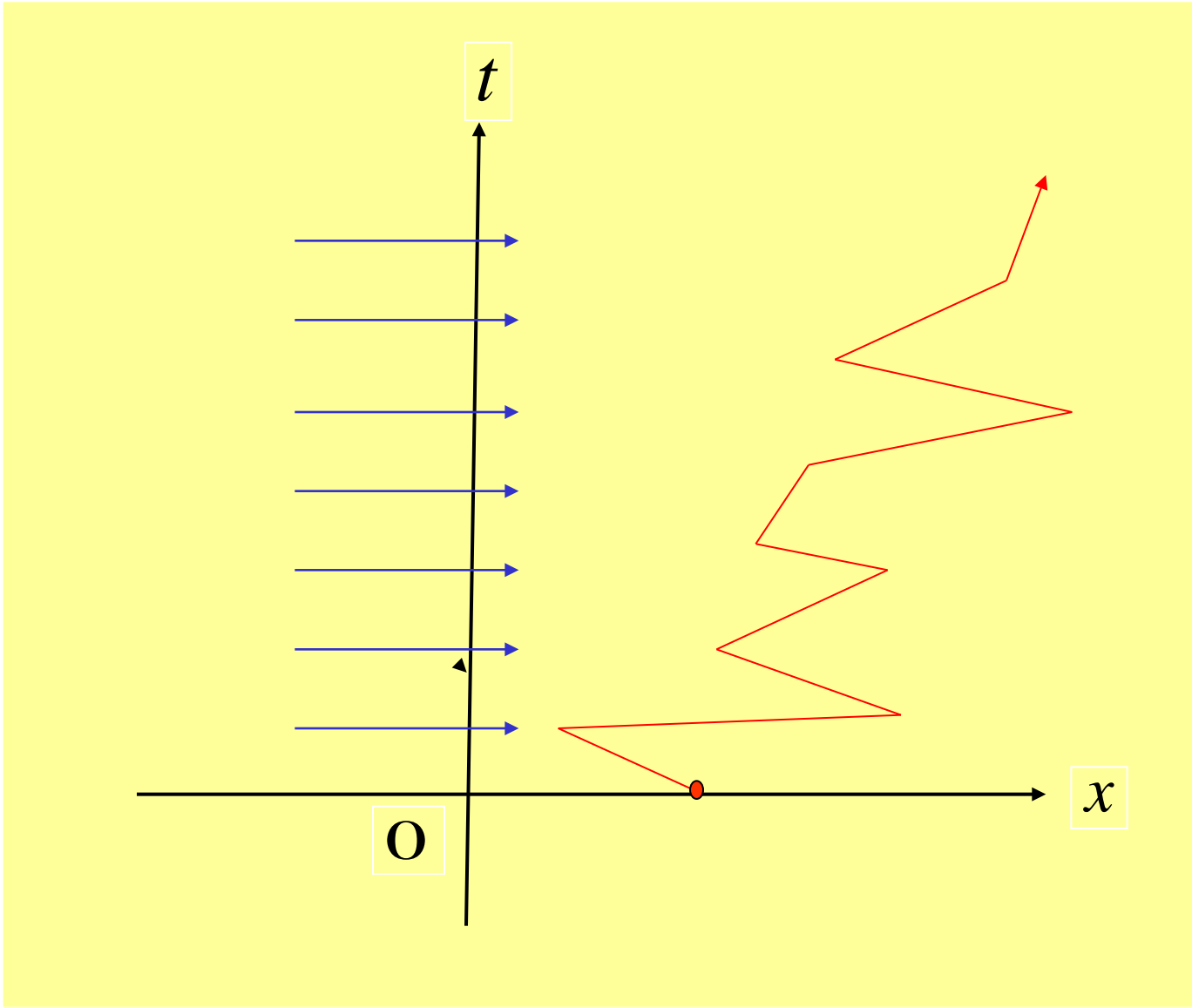
$$K = \mathbf{R}$$

$$D(\mathfrak{A}) = \{f \in C_0(K) \cap C^2(K) : f' \in C_0(K), \\ f'' \in C_0(K)\}$$

$$\mathfrak{A}f = \frac{1}{2} f'' + mf', \quad \forall f \in D(\mathfrak{A})$$

速度 m で流れる川の中の一次元ブラウン運動

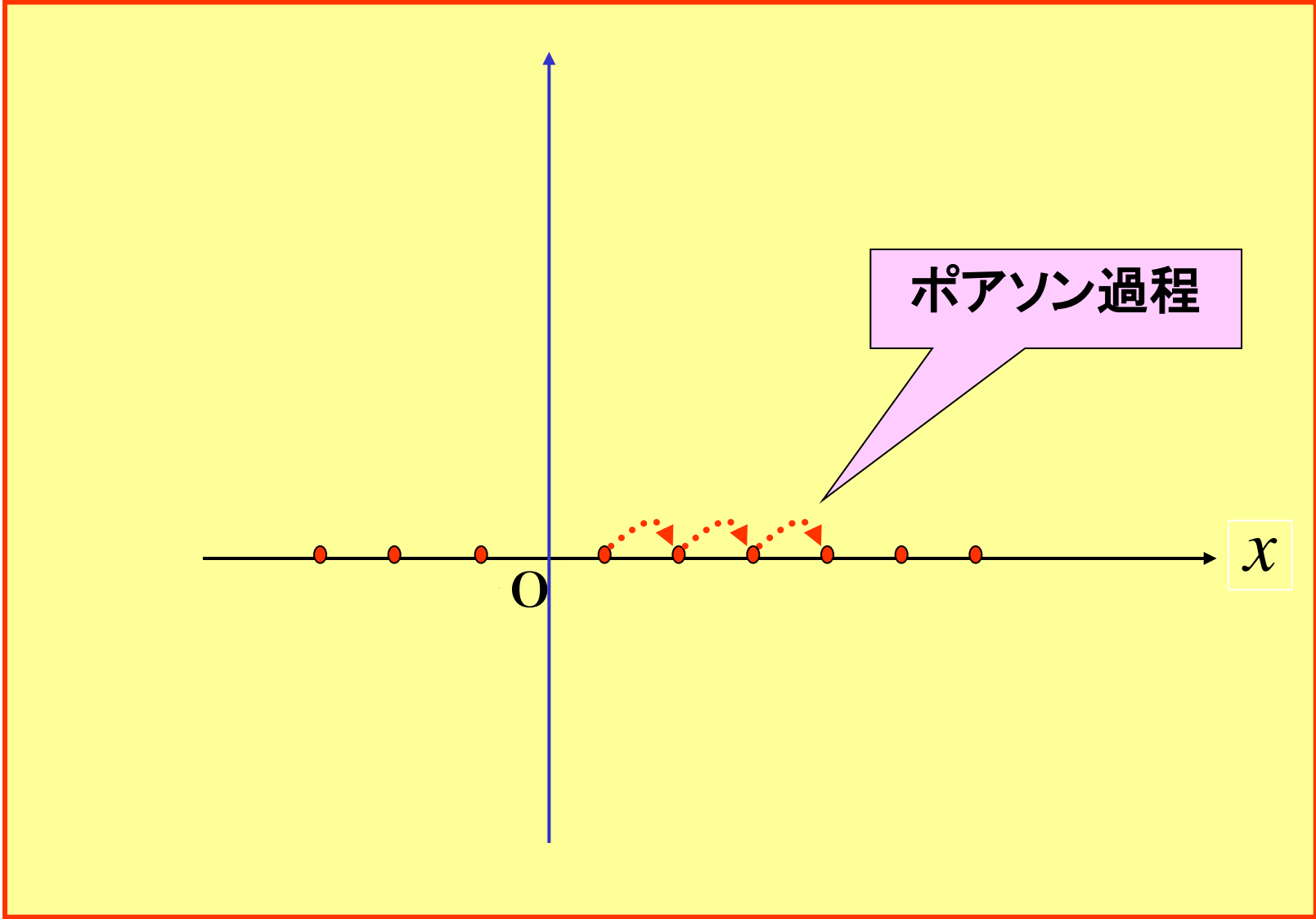
- ◆ 流れる川の中の花粉の運動
- ◆ 風の中の煙の運動



ポアソン過程

$$\mathcal{A}f = \lambda(f(x+1) - f(x))$$

(差分作用素)



反射壁を持ったブラウン運動

$$K = [0, \infty)$$

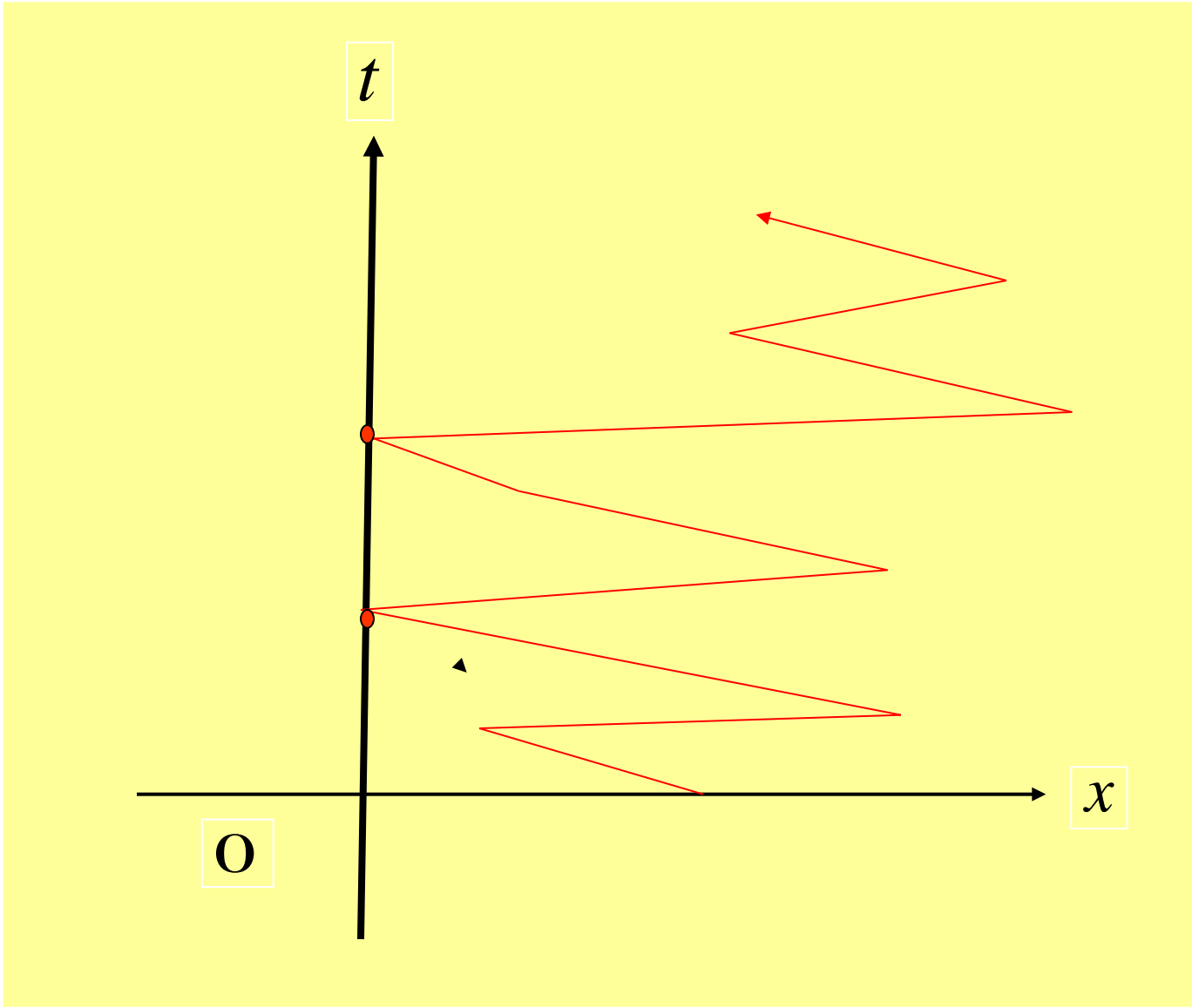
$$D(\mathfrak{A}) = \{f \in C_0(K) \cap C^2(K) : f' \in C_0(K), \\ f'' \in C_0(K), f'(0) = 0\}$$

$$\mathfrak{A}f = \frac{1}{2} f'', \quad \forall f \in D(\mathfrak{A})$$

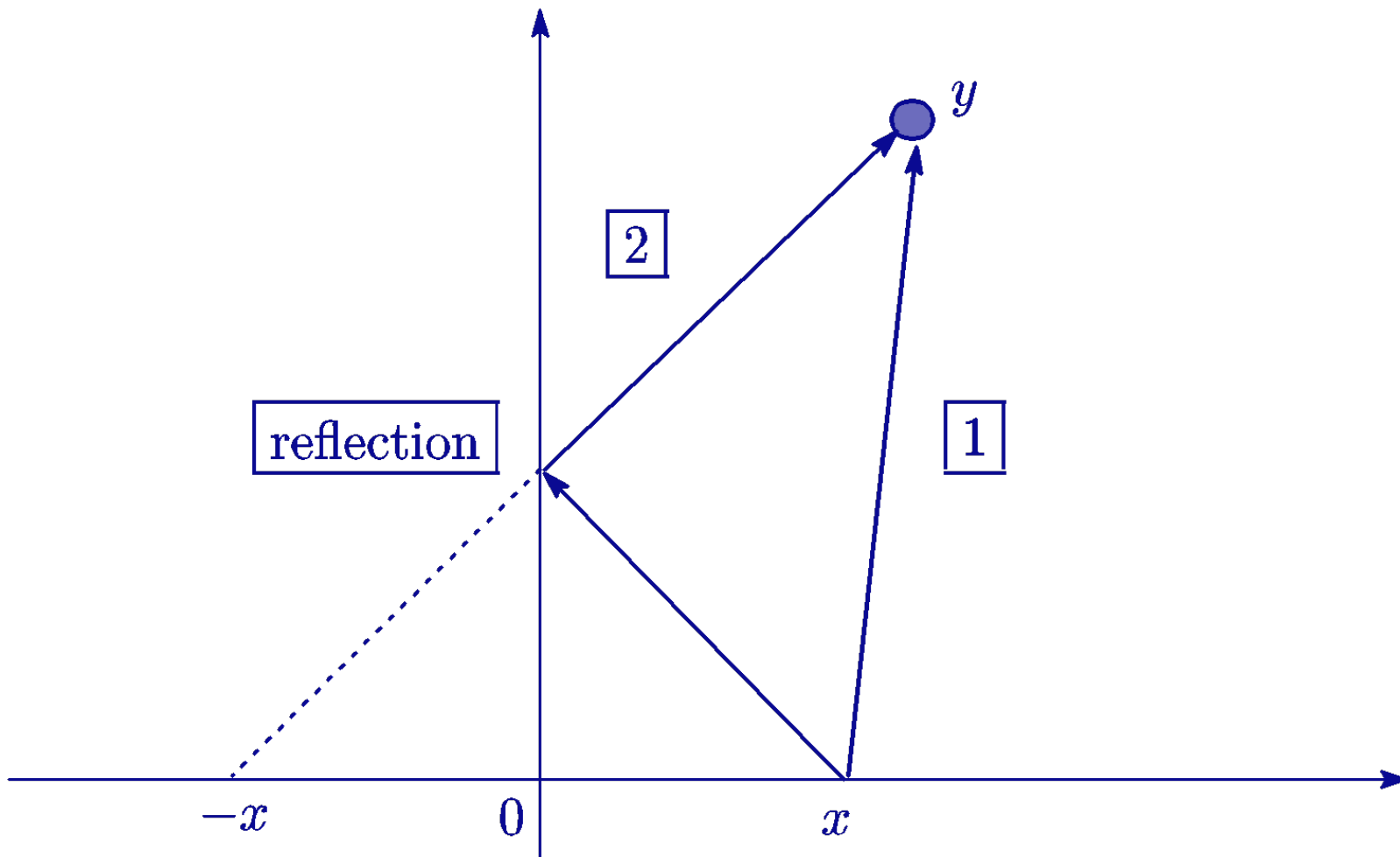
原点 $x = 0$ で**反射する**一次元ブラウン運動

$C_0(K) =$ 無限遠点 ∞ でゼロになる

$[0, \infty)$ 上の実数値連続関数の全体



反射壁を持ったブラウン運動



粘性壁を持ったブラウン運動

$$K = [0, \infty)$$

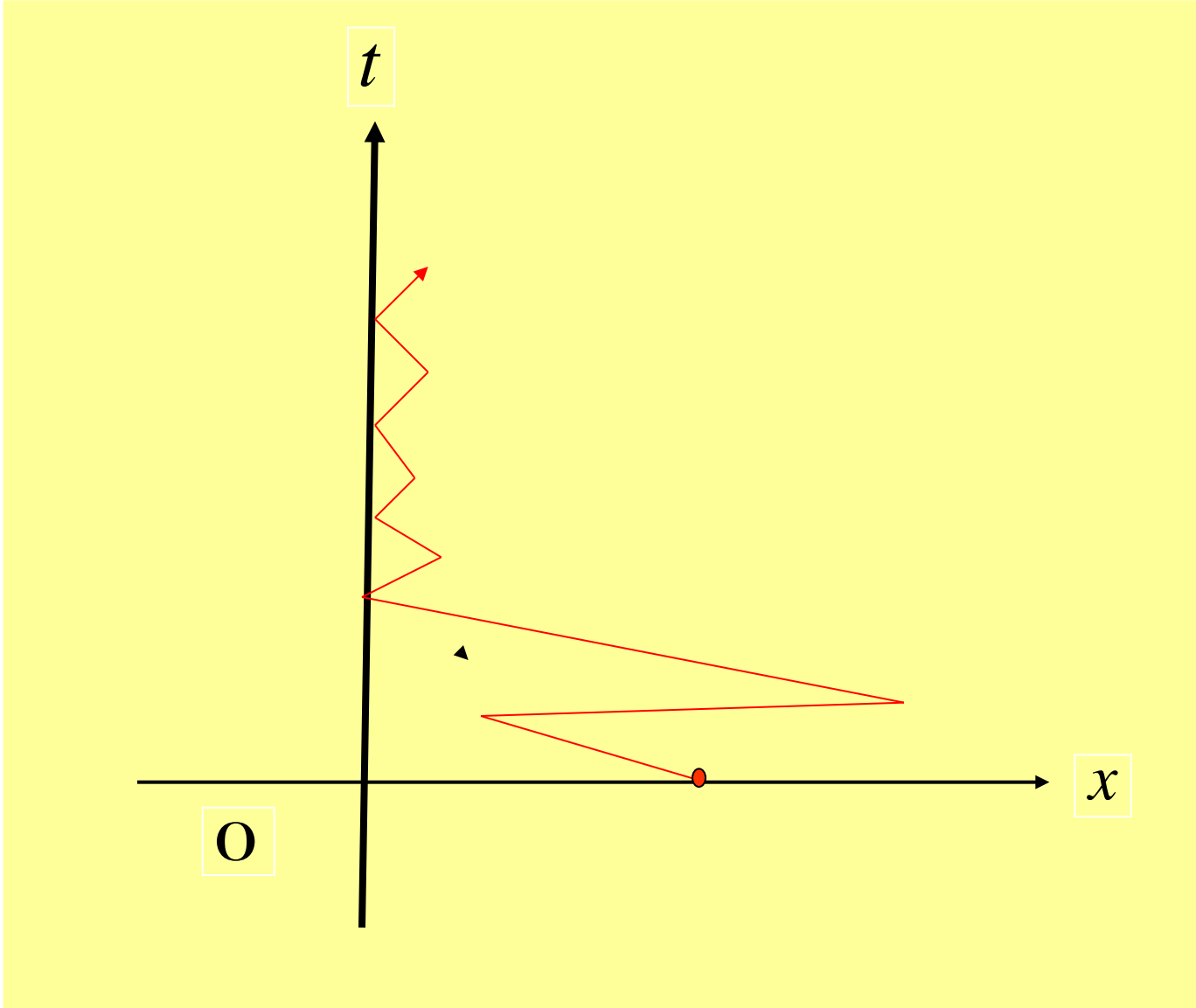
$$D(\mathfrak{A}) = \{f \in C_0(K) \cap C^2(K) : f' \in C_0(K), \\ f'' \in C_0(K), f''(0) = 0\}$$

$$\mathfrak{A}f = \frac{1}{2} f'', \quad \forall f \in D(\mathfrak{A})$$

原点 $x = 0$ が**粘性壁**の一次元ブラウン運動

$C_0(K) =$ 無限遠点 ∞ でゼロになる

$[0, \infty)$ 上の実数値連続関数の全体



吸収壁を持ったブラウン運動

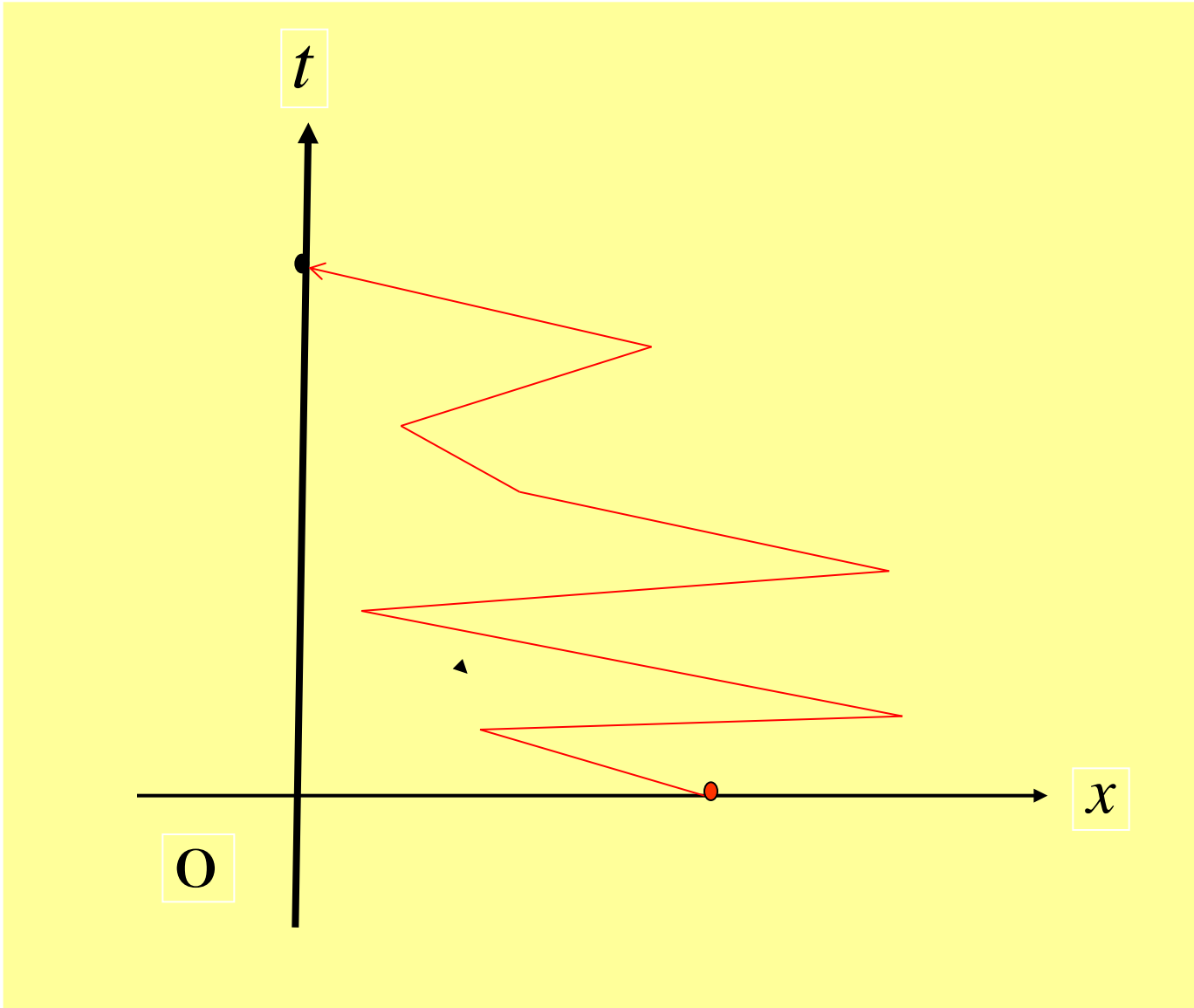
$$K = [0, \infty)$$

$$D(\mathfrak{A}) = \{f \in C_0(K) \cap C^2(K) : f' \in C_0(K), \\ f'' \in C_0(K), f(0) = 0\}$$

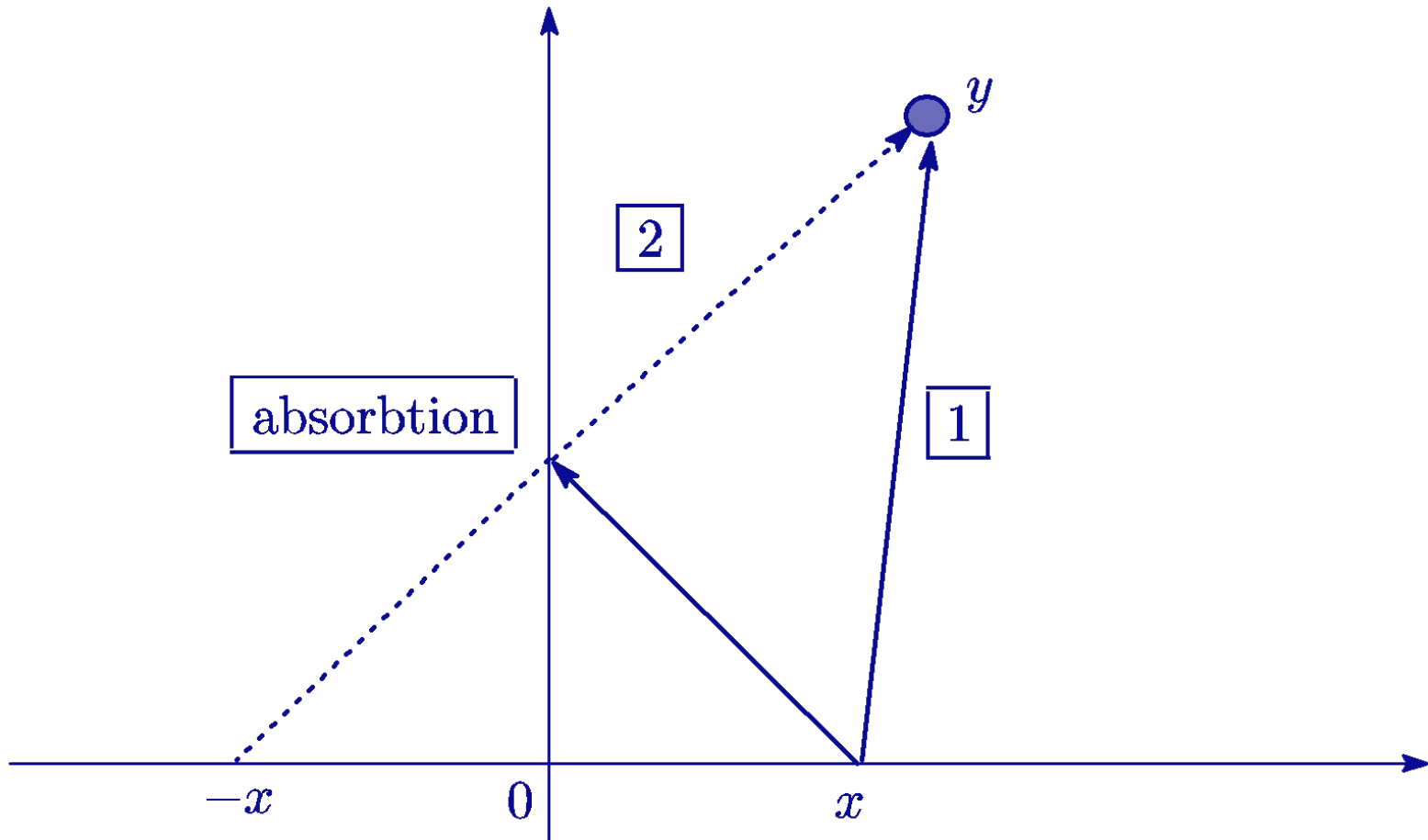
$$\mathfrak{A}f = \frac{1}{2} f'', \quad \forall f \in D(\mathfrak{A})$$

原点 $x = 0$ で**吸収される**一次元ブラウン運動

$C_0(K) =$ 原点 0 と無限遠点 ∞ でゼロになる
 $[0, \infty)$ 上の実数値連続関数の全体



吸収壁を持ったブラウン運動



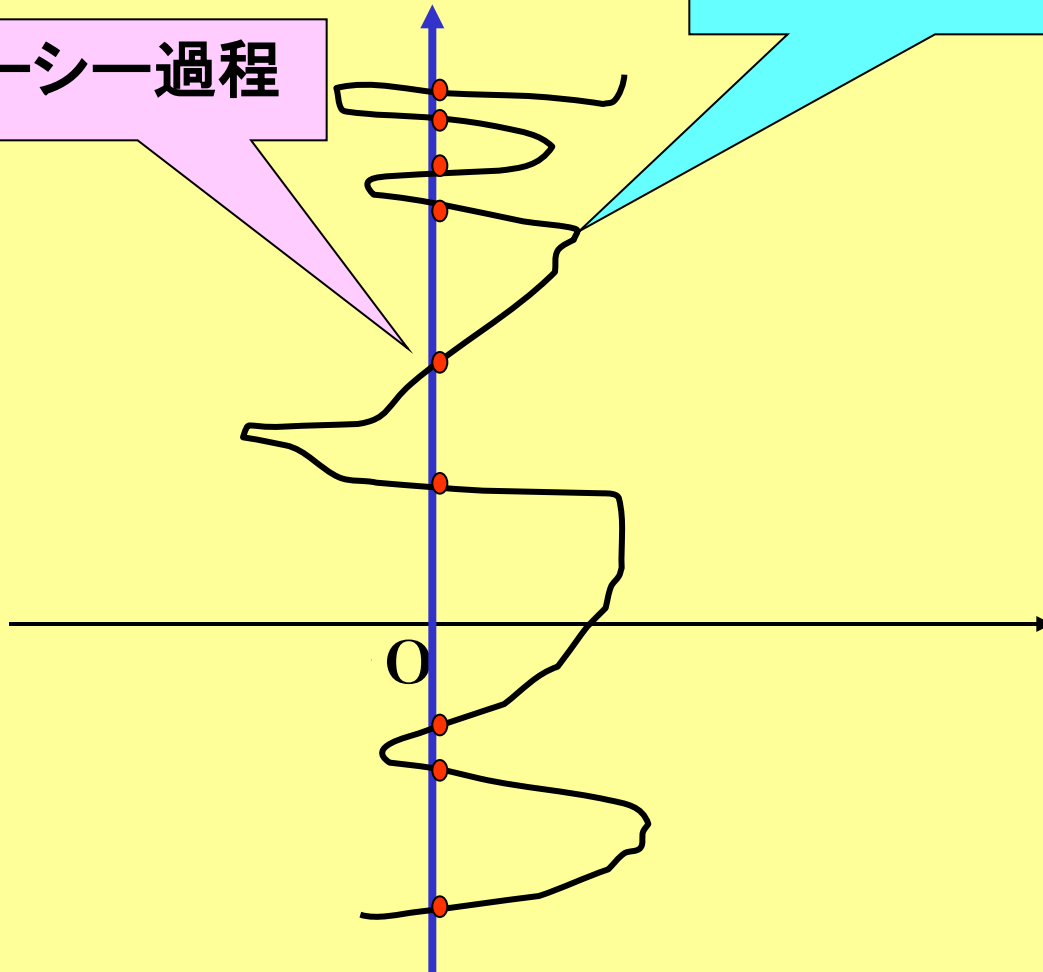
コーシー過程

$$\mathcal{A}f = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x+y) - f(y)}{y^2} dy$$

(積分作用素)

2次元ブラウン運動

コーシー過程



生成作用素 (多次元版)

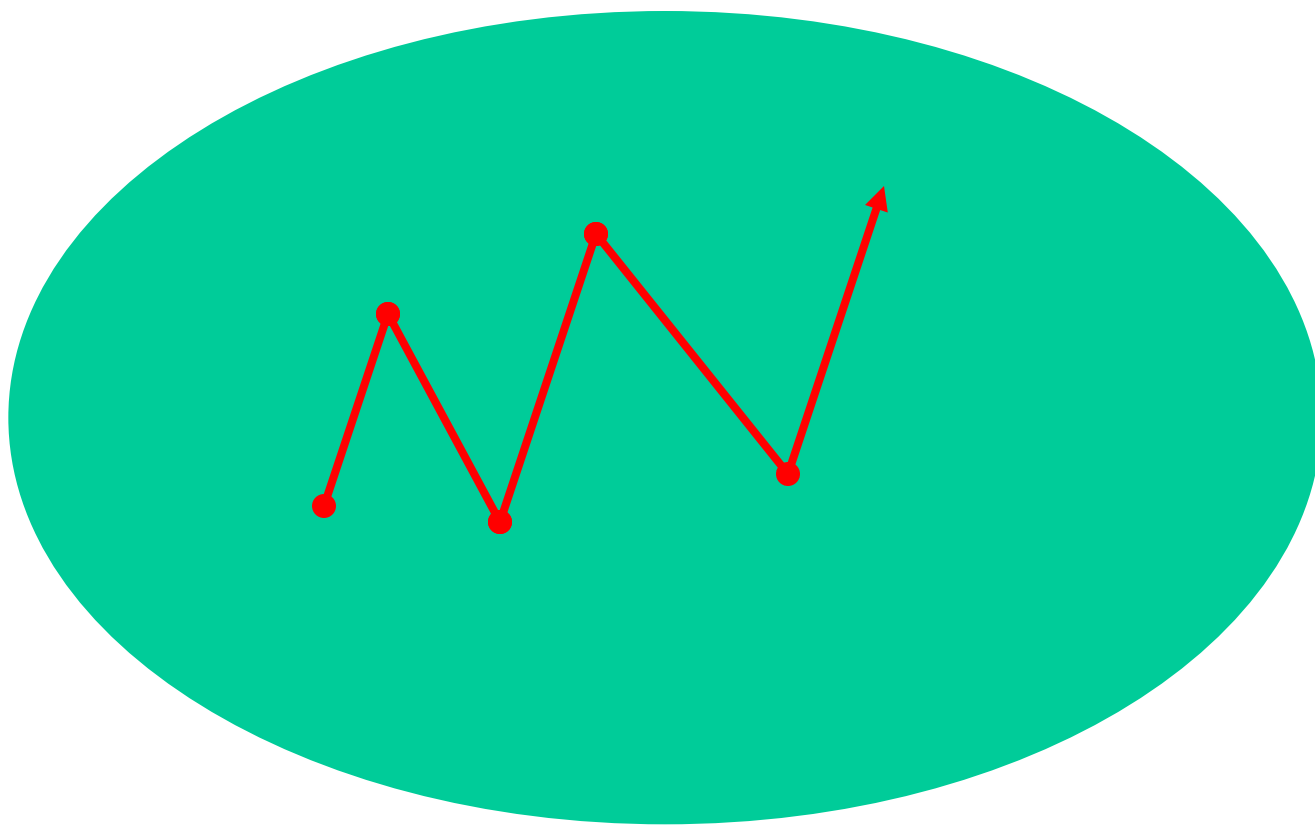
多次元の場合の結論

- **領域の内部**での拡散現象は、連続的な拡散と不連続な拡散（ジャンプ）の**2つの現象**によって特徴付けられる。
- **境界上**の拡散現象は、吸収、反射、粘性、連続的な拡散と不連続な拡散（ジャンプ）等の**6つの現象**によって分類される。

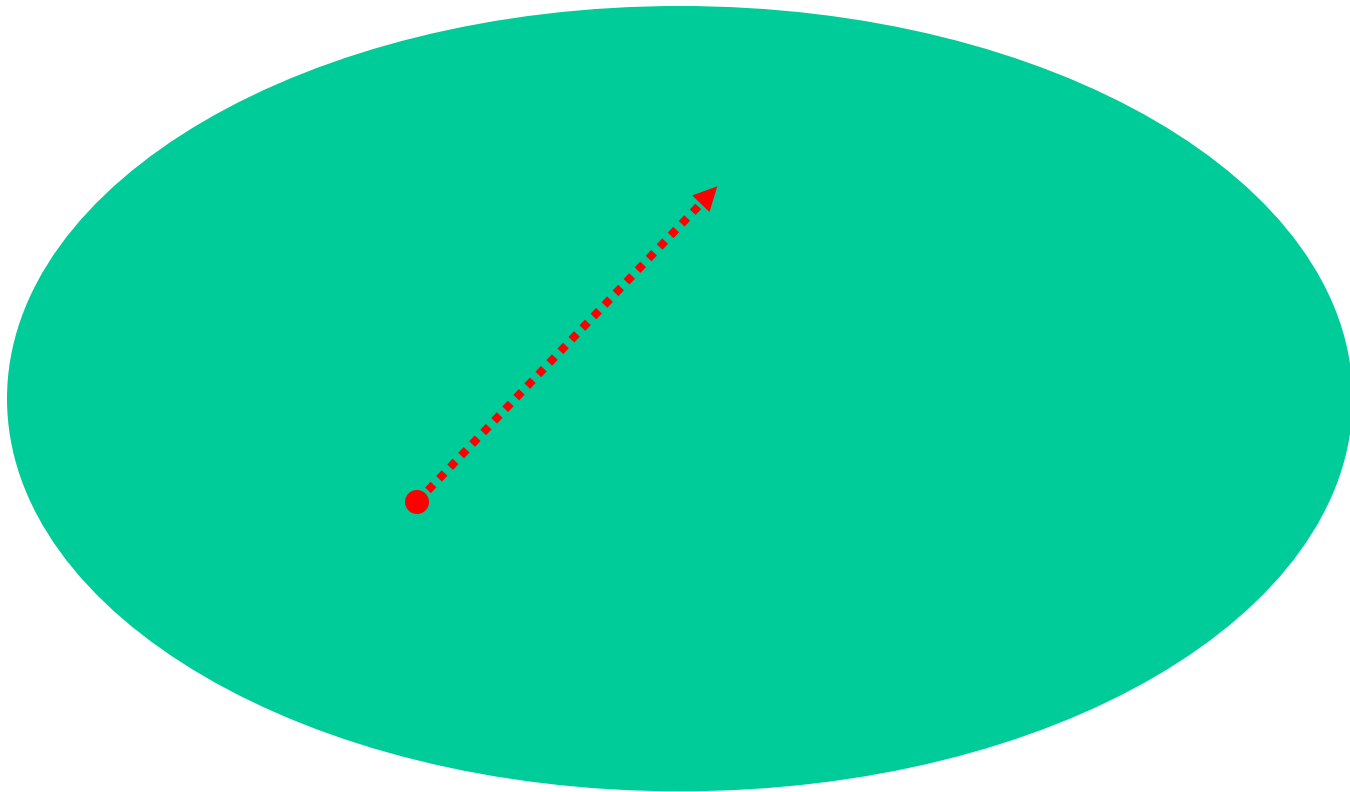
領域内部での積分微分作用素

$$Wu = \sum_{i,j=1}^N a^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^N b^i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u$$
$$+ \int_D s(x, dy) \left[u(y) - u(x) - \sum_{j=1}^N (y_j - x_j) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \right]$$

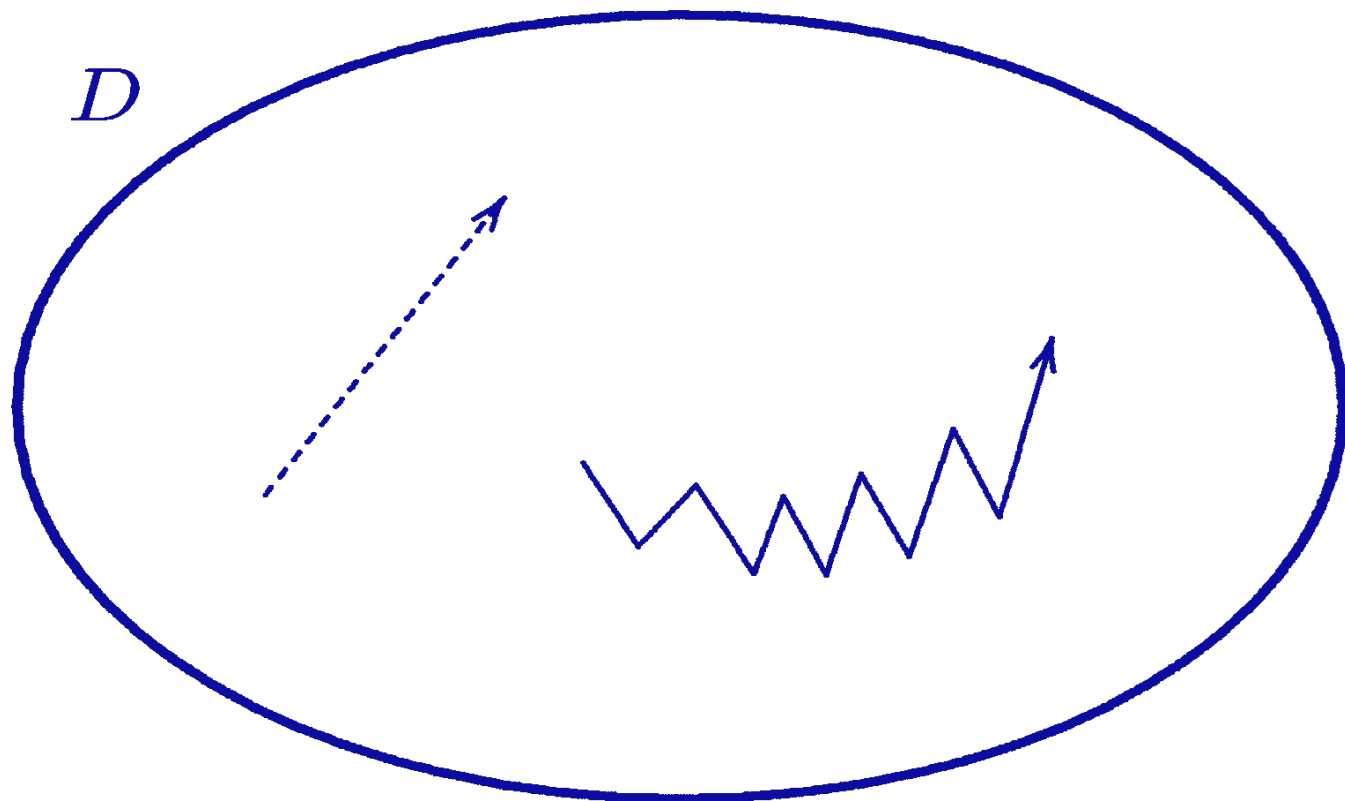
(1) 連続な拡散現象



(2) 不連続な拡散現象 (ジャンプ)



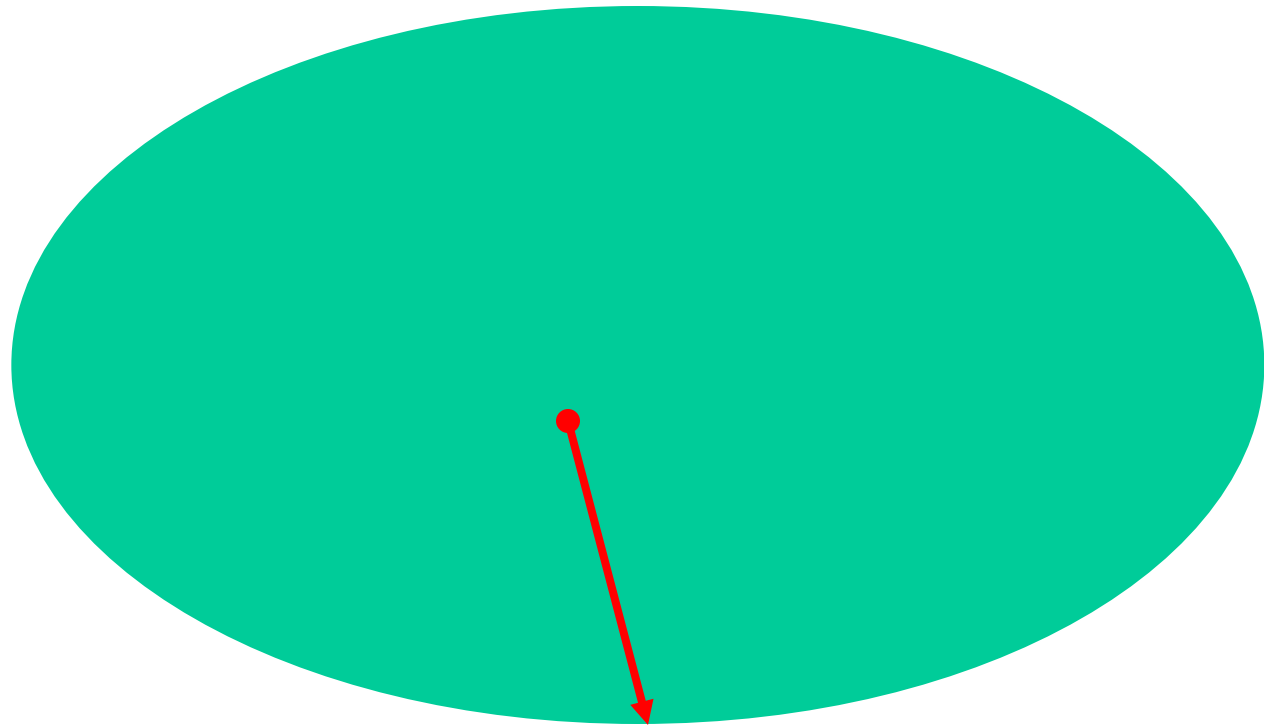
積分微分作用素が記述する拡散現象



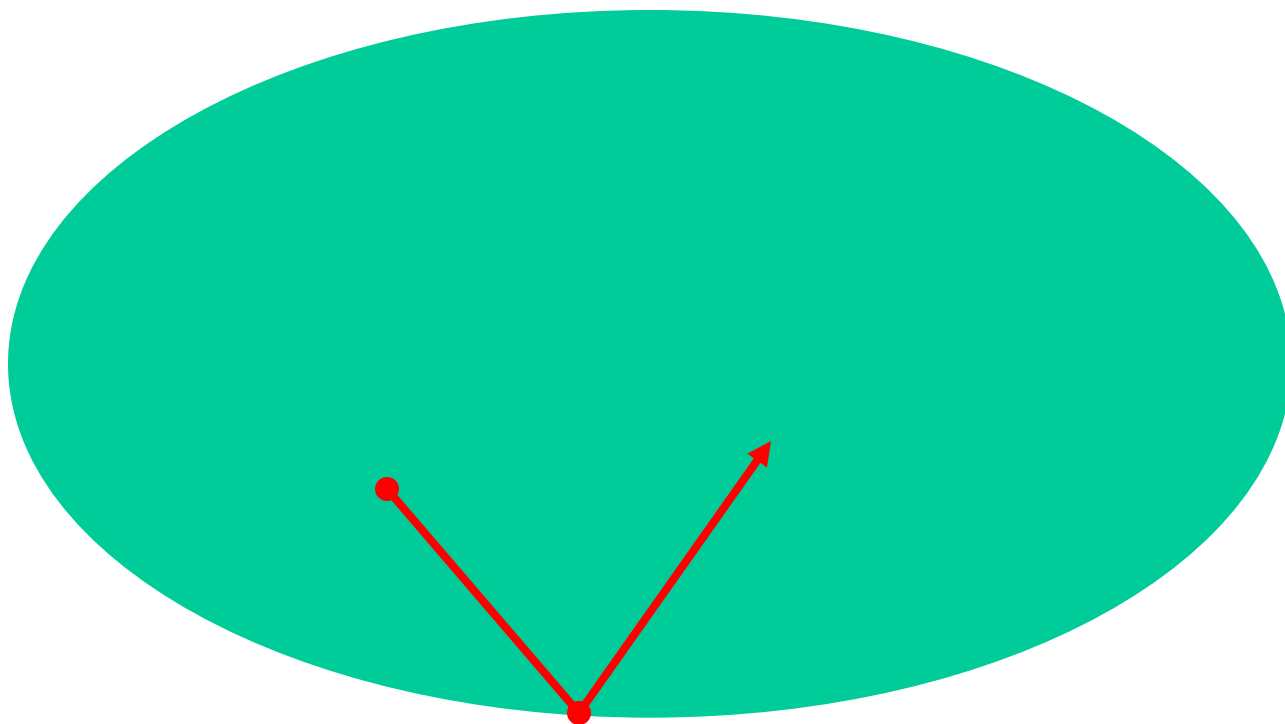
境界での一般境界条件

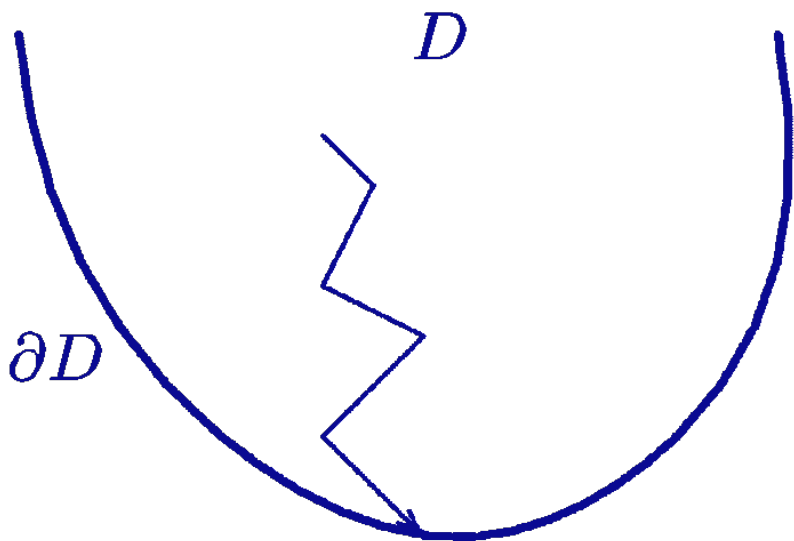
$$\begin{aligned} Lu = & \left(\sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x') \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x') \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \gamma(x')u \\ & + \mu(x') \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - \delta(x') Wu \\ & + \int_{\partial D} r(x', dy') \left[u(y') - u(x') - \sum_{j=1}^{N-1} (y_j - x_j) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x') \right] \\ & + \int_D t(x', dy) \left[u(y) - u(x') - \sum_{j=1}^{N-1} (y_j - x_j) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x') \right] \end{aligned}$$

(1) 境界での吸収現象

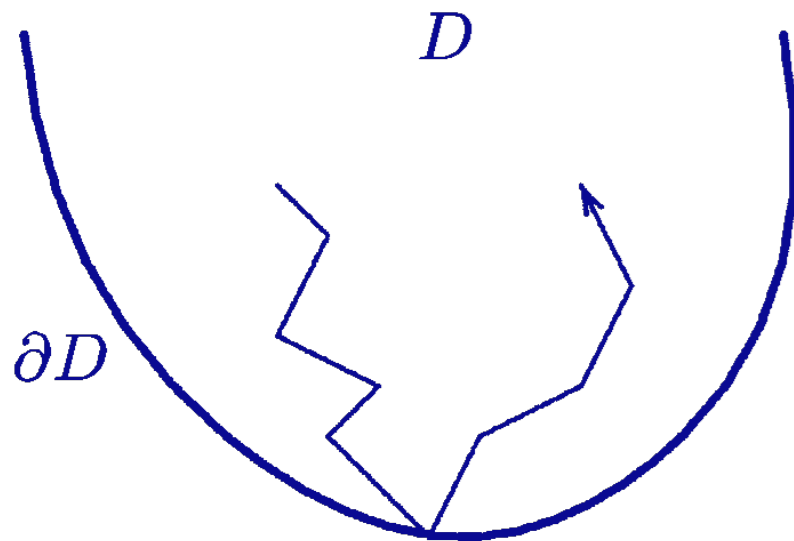


(2) 境界での反射現象



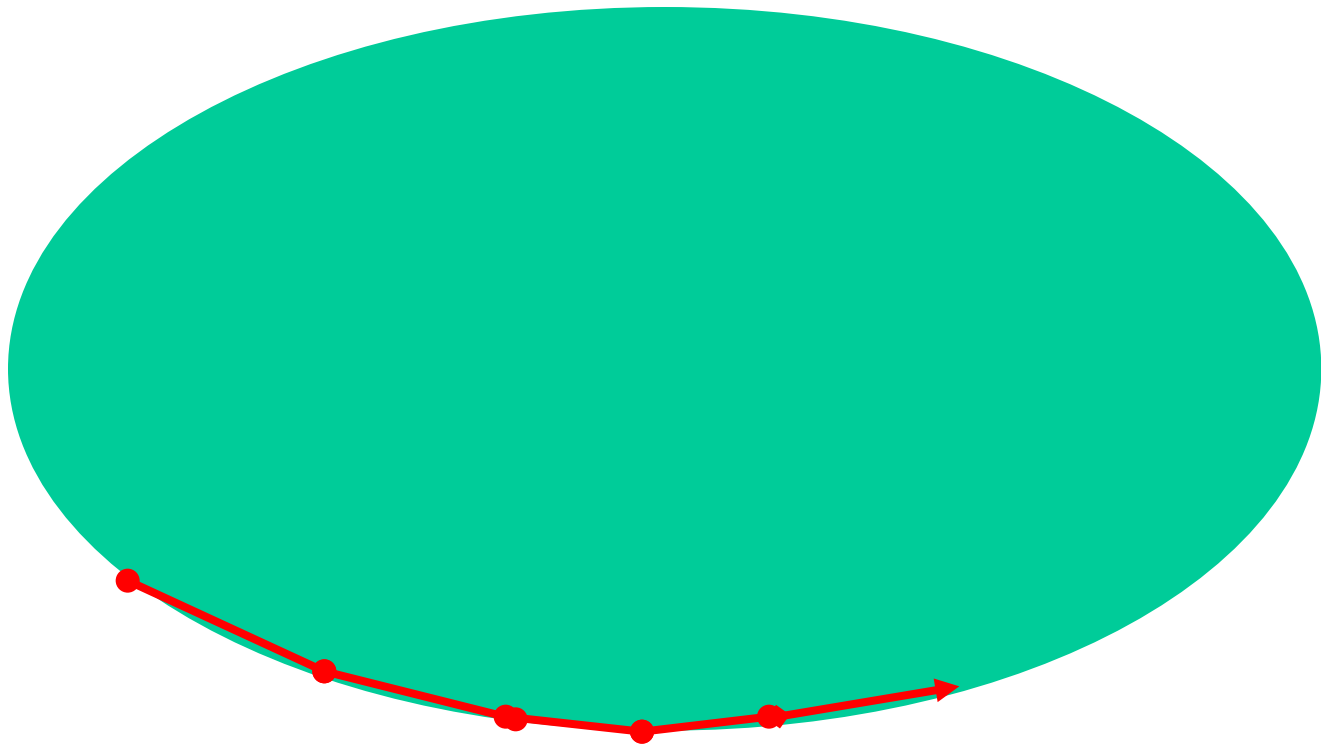


absorption

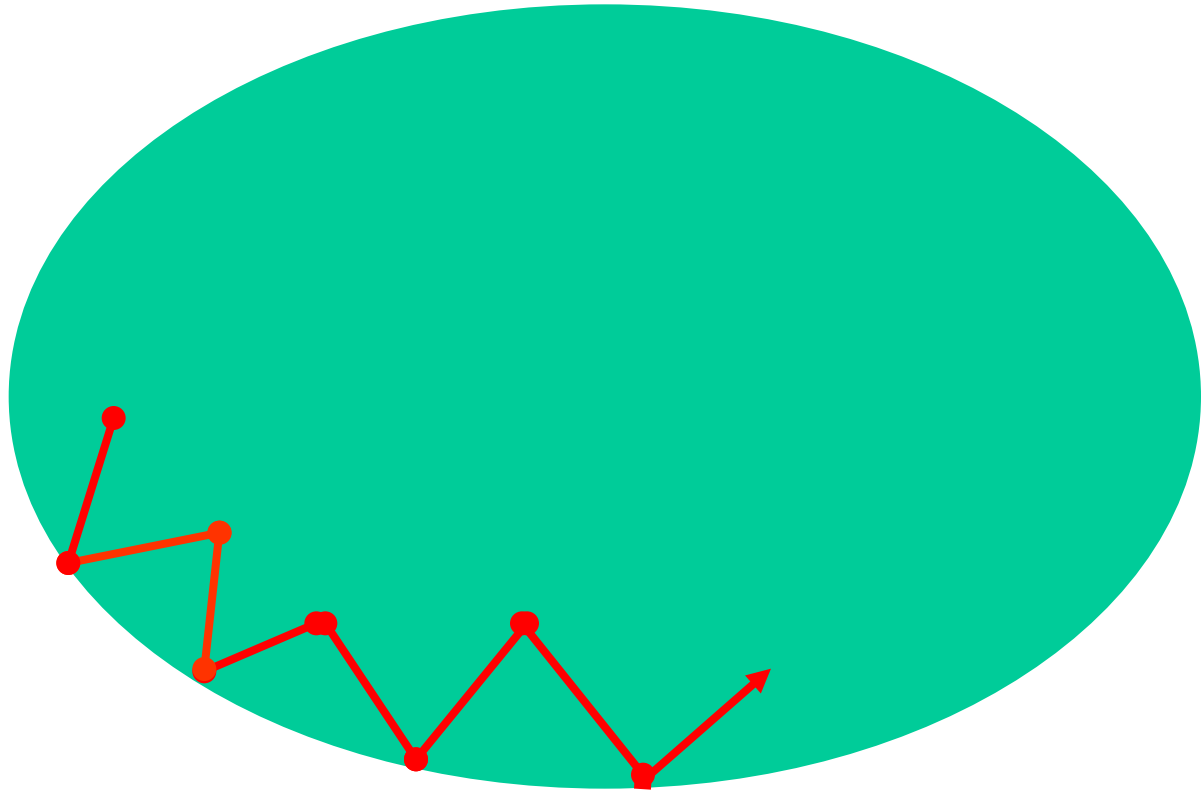


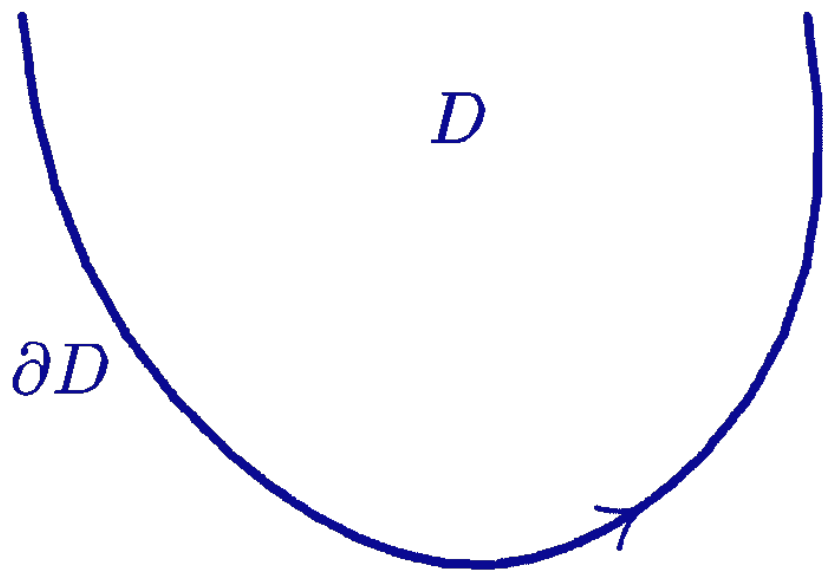
reflection

(3) 境界上の拡散現象

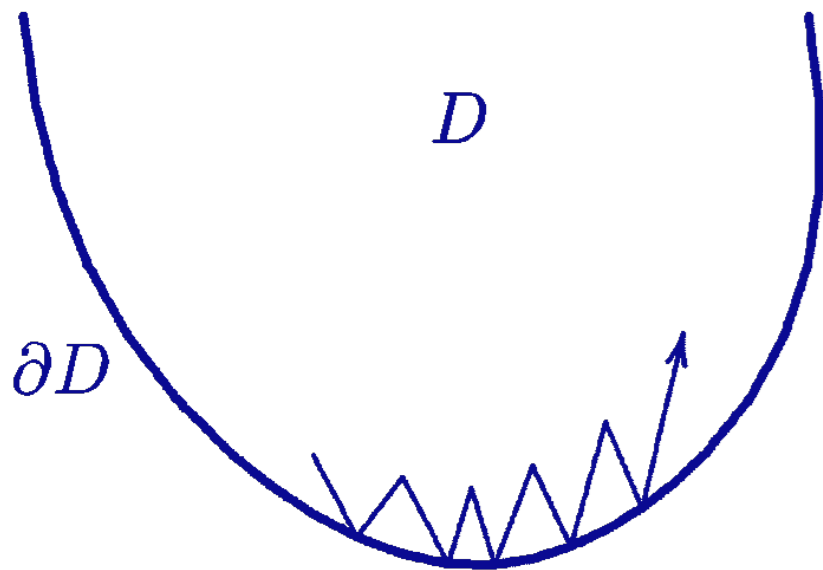


(4) 境界での滞留(粘性)現象



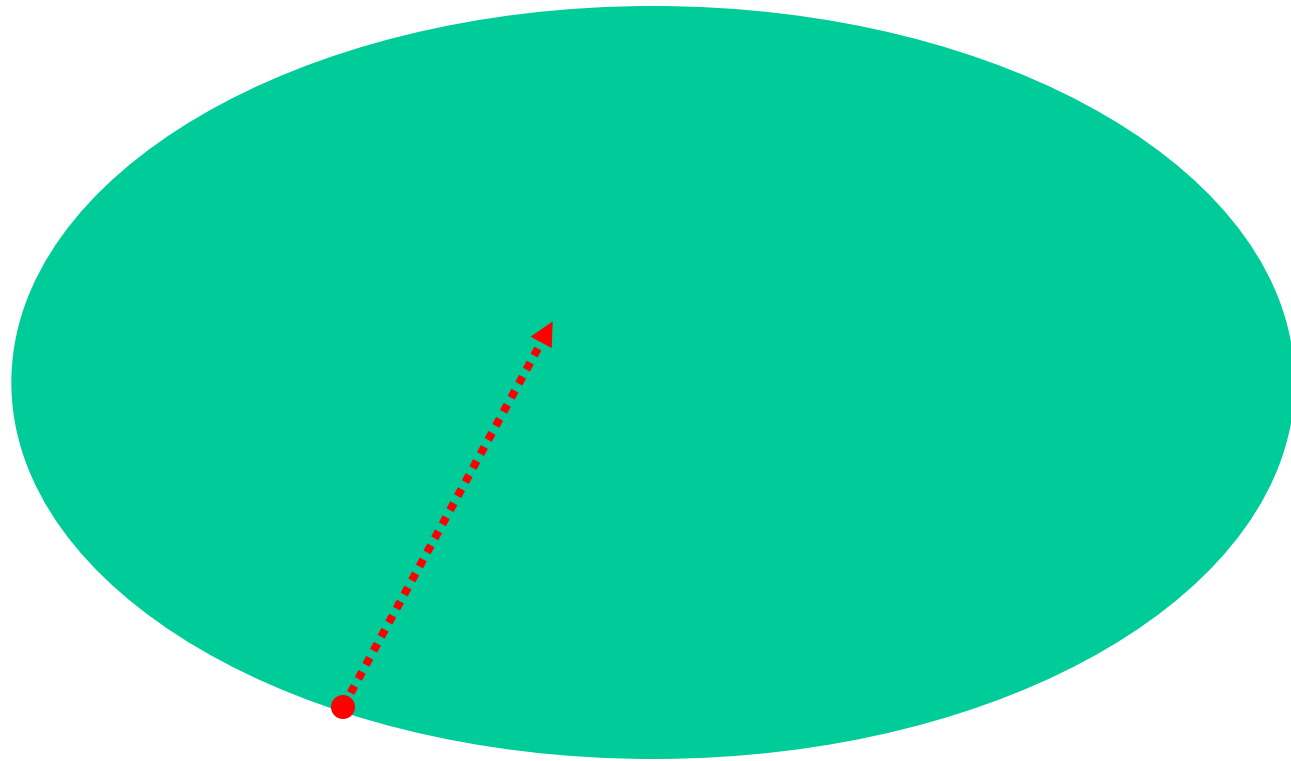


diffusion along the boundary

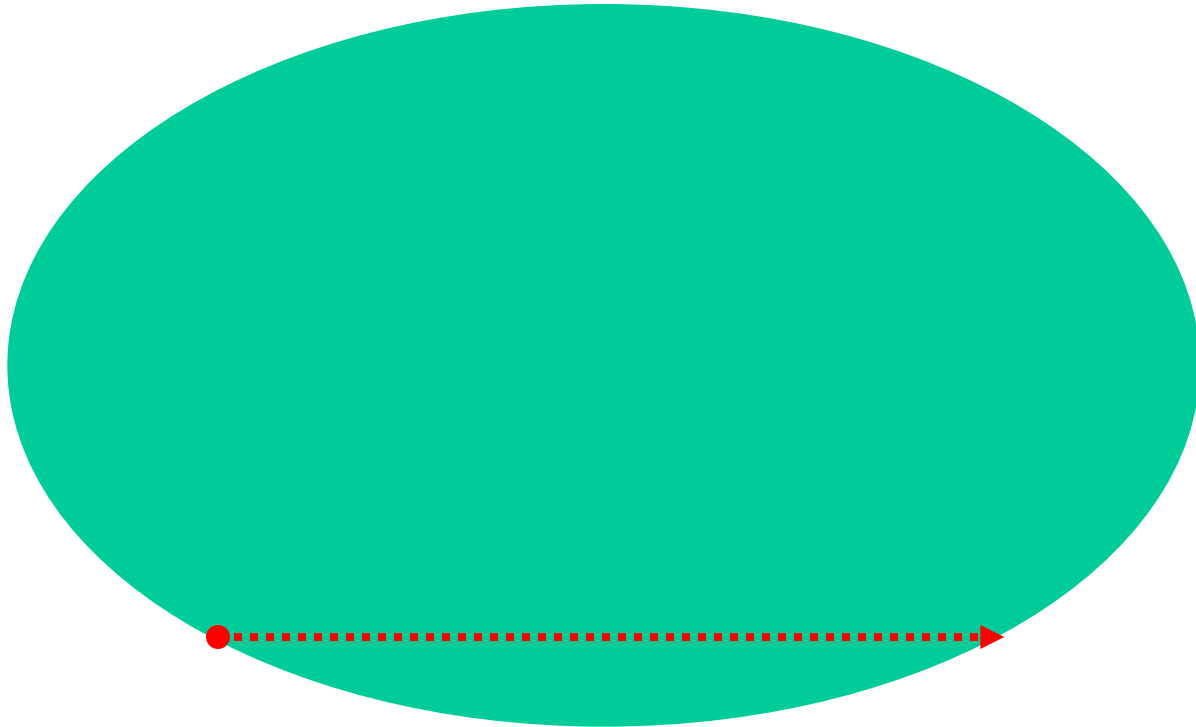


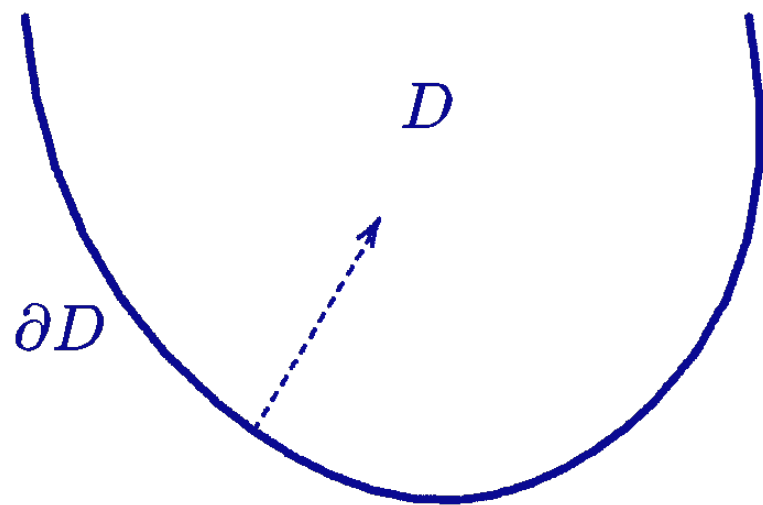
viscosity

(5) 境界から内部へのジャンプ

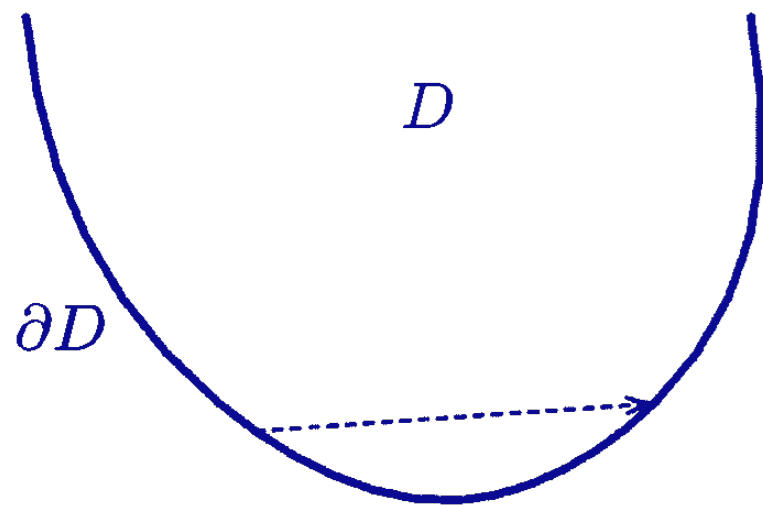


(6) 境界から境界へのジャンプ





jump into the interior



jump on the boundary

問題の定式化

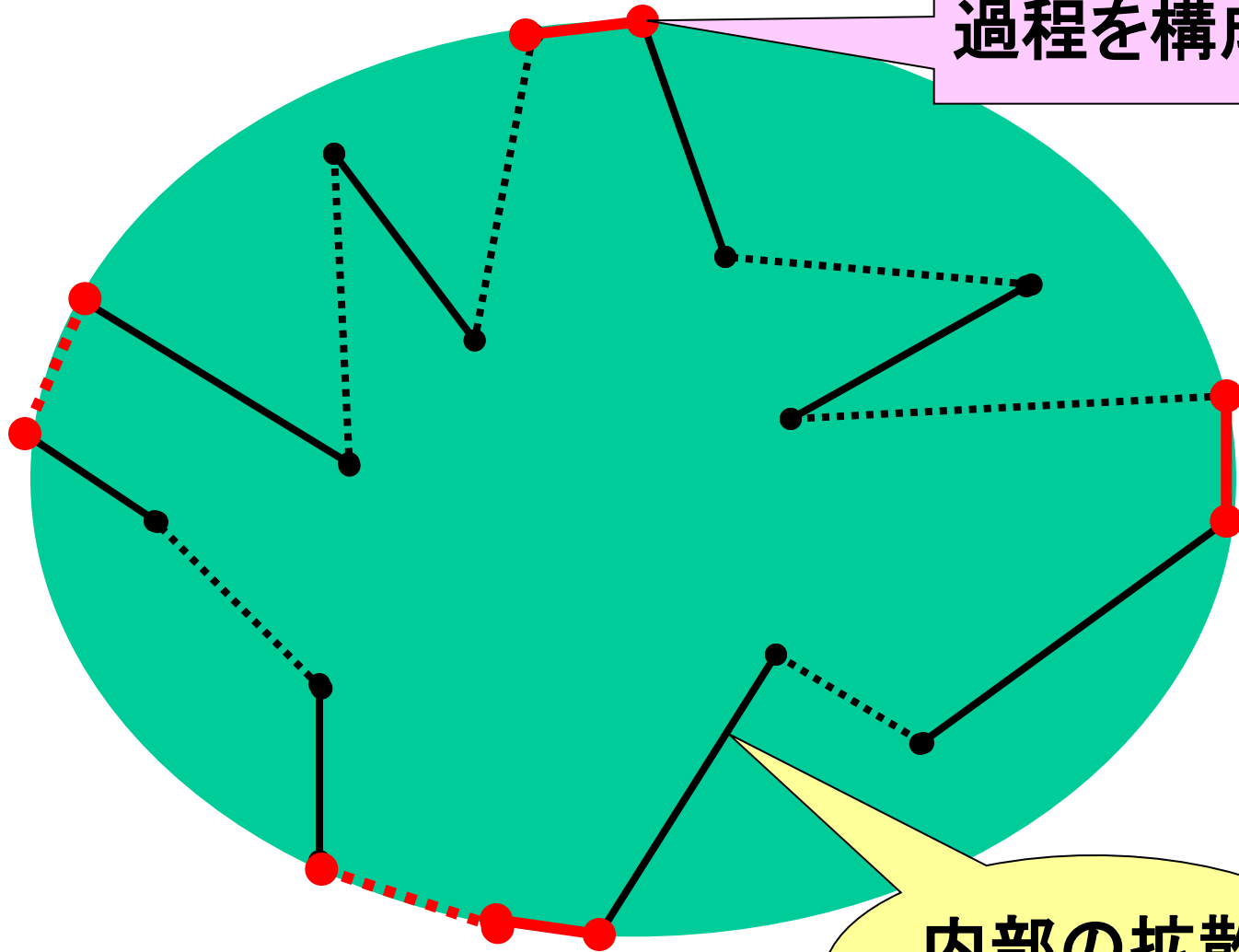
多次元拡散過程の構成問題

◆与えられた解析的データ(W, L)に対して、対応する拡散過程を構成すること。

◆多次元拡散過程を解析的に分類すること。

拡散過程構成 のアイデア

境界上の拡散
過程を構成して、



内部の拡散
過程と繋ぐ

アプローチの方針

- (1) ワルデンフェルス積分微分作用素 W と
ヴェンツェル境界条件 L に対する超関数
解の一意存在定理 (偏微分方程式)
- (2) フェラー半群の生成定理 (関数解析)
- (3) マルコフ過程の存在定理 (確率論)

橢圓型境界值問題

鳥瞰図

<p>確率論 (ミクロスコピック 的視点)</p>	<p>関数解析 (マクロスコピッ クの視点)</p>	<p>偏微分方程式 (メゾスコピッ クの視点)</p>
<p>マルコフ過程</p>	<p>フェラー半群</p>	<p>生成作用素 による特徴付け</p>
<p>マルコフ性 (チャップマン・コルモゴ ロフ方程式)</p>	<p>半群の性質</p>	<ul style="list-style-type: none">•ワルデンフェルス積 分微分作用素 W•ヴェンツェル境界条 件 L

グリーン作用素の構成

グリーン作用素

$$(\alpha - \mathbf{W})u = f \quad \text{in } D$$

$$Lu = 0 \quad \text{on } \partial D$$

$$u = G_{\alpha} f$$

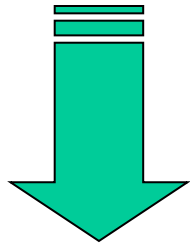
グリーン作用素の積分表示

$$u = \mathbf{G}_\alpha f = (\alpha - \mathfrak{W})^{-1} f$$

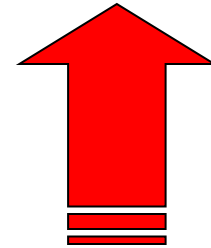
$$u(x) = \mathbf{G}_\alpha f(x) = \int_{\frac{D}{D}} \mathbf{G}_\alpha(x, y) f(y) dy$$

推移確率とグリーン関数

$$p_t(x, dy) = p_t(x, y)dy$$



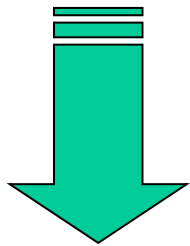
Laplace 変換



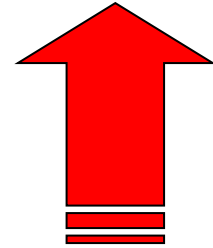
$$G_\alpha(x, y) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} p_t(x, y) dt$$

推移確率とグリーン作用素

$$p_t(x, dy) = p_t(x, y)dy$$



Laplace 変換

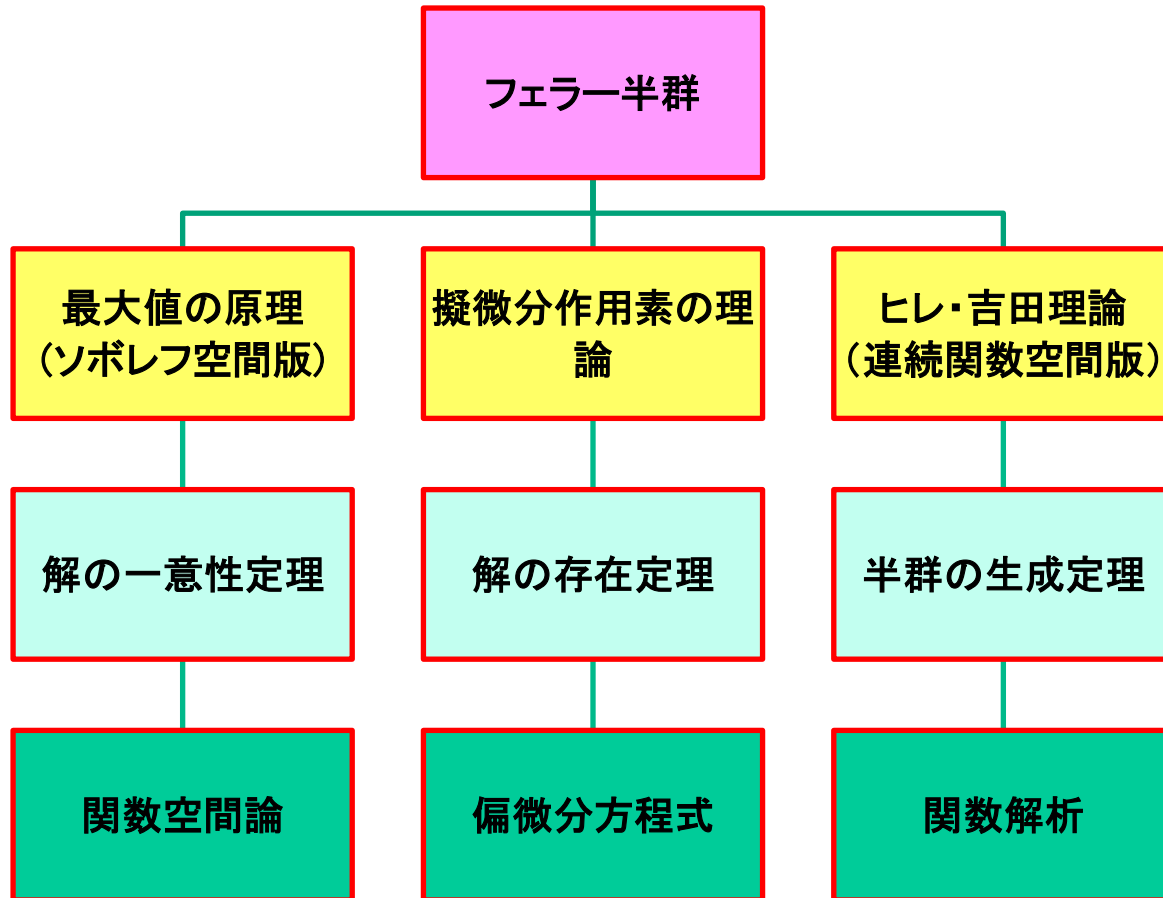


$$\begin{aligned} G_\alpha f &:= \int_0^\infty e^{-\alpha t} T_t f dt = \int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{t\mathcal{A}} f dt \\ &= \int \left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} p_t(x, y) dt \right) f(y) dy \end{aligned}$$

マルコフ過程の存在定理 (関数解析版)

証明の概略 (その1)

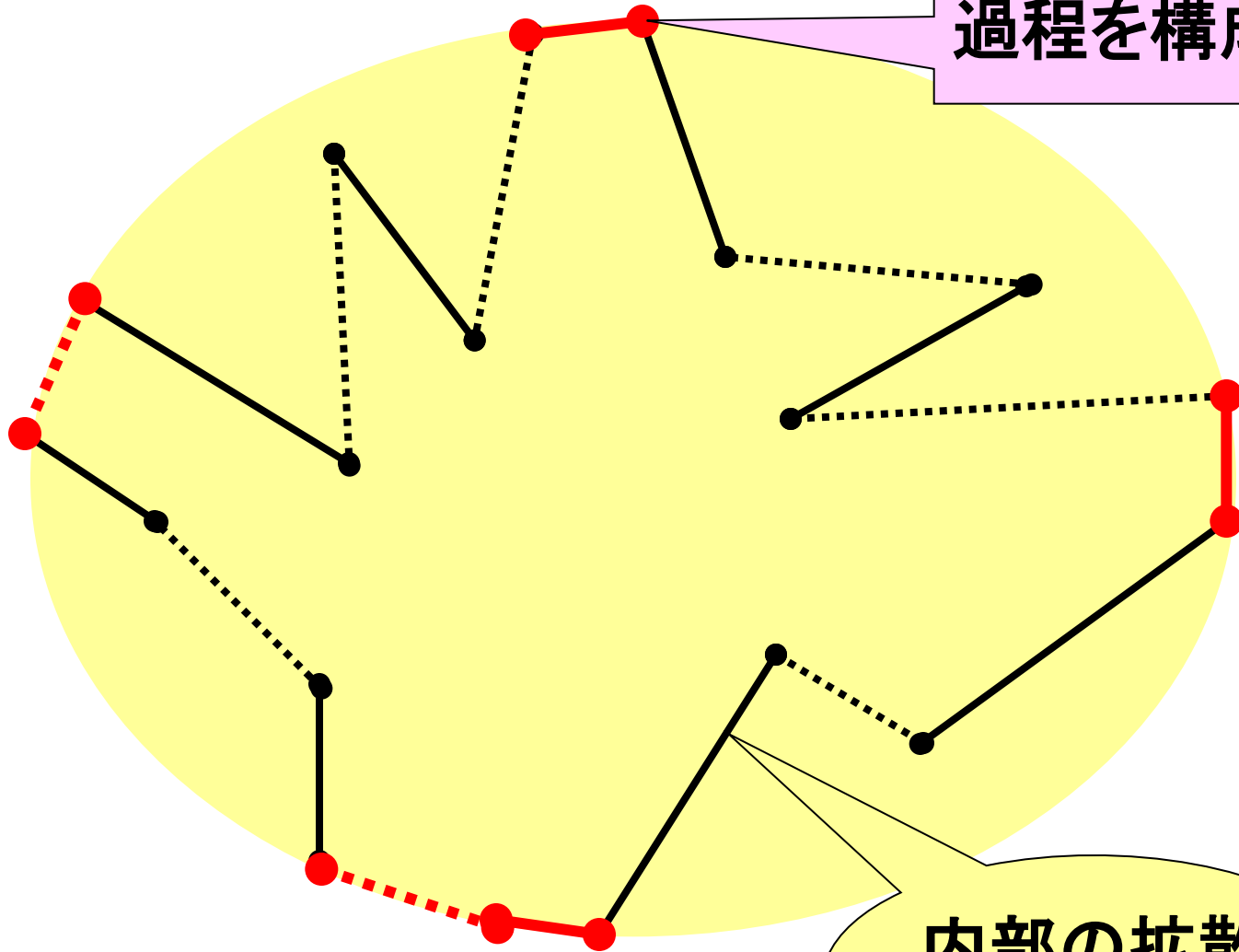
証明の構図



境界への帰着

偏微分方程式	確率論
楕円型境界値問題	領域全体の拡散過程
フレドホルム積分方程式	境界上の拡散過程
楕円型条件	横断条件

境界上の拡散
過程を構成して、



内部の拡散
過程と繋ぐ

境界値問題の解法

$$\begin{cases} (\alpha - \mathbf{W})u = f & \text{in } D \\ \mathbf{L}u = 0 & \text{on } \partial D \end{cases}$$

$$u = \mathbf{G}_\alpha f$$

境界への帰着 (1)

まず、ディリクレ問題

$$\begin{cases} (\alpha - \mathbf{W})v = f & \text{in } D, \\ v = 0 & \text{on } \partial D \end{cases}$$

を考えて、一意的な解を

$$v := G_{\alpha}^0 f$$

とおく。

境界への帰着 (2)

次に、

$$w := u - v = u - G_{\alpha}^0 f$$

とおく。

境界への帰着 (3)

そのとき、

$$\begin{cases} (\alpha - W)u = f & \text{in } D, \\ Lu = 0 & \text{on } \partial D \end{cases}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{cases} (\alpha - W)w = (\alpha - W)u - (\alpha - W)v = 0 & \text{in } D, \\ Lw = Lu - Lv = -LG_{\alpha}^0 f & \text{on } \partial D \end{cases}$$

境界への帰着 (4)

ところで、齊次方程式

$$(\alpha - W)w = 0 \text{ in } D$$

の任意の解は、

$$w = H_{\alpha} \psi$$

と表せる。(調和作用素)

境界への帰着 (5)

従って、

$$\begin{cases} (\alpha - W)u = f & \text{in } D, \\ Lu = 0 & \text{on } \partial D \end{cases}$$

\Leftrightarrow

$$LH_{\alpha}\psi = Lw = -LG_{\alpha}^0 f \quad \text{on } \partial D$$

証明の概略 (その2)

グリーン作用素の構成(1)

Fredholm 境界作用素 (1)

$$\begin{aligned} LH_{\alpha} \varphi &= \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x') \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x') \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \gamma(x') \varphi \\ &\quad - \alpha \delta(x') \varphi + \mu(x') \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (H_{\alpha} \varphi) \\ &\quad + \int_{\partial D} r(x', y') \left[\varphi(y') - \varphi(x') - \sum_{j=1}^{N-1} (y_j - x_j) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x') \right] dy' \\ &\quad + \int_D t(x', y) \left[H_{\alpha} \varphi(y) - \varphi(x') - \sum_{j=1}^{N-1} (y_j - x_j) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x') \right] dy \end{aligned}$$

Dirichlet-Neumann 作用素

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (H_\alpha \varphi)(x')$$
$$= \int_{\partial D} \pi_\alpha(x', y') \left[\varphi(y') - \varphi(x') - \sum_{j=1}^{N-1} (y_j - x_j) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x') \right] dy'$$

Here:

$$\pi_\alpha(x', y') \geq 0, \quad \forall x' \neq y'.$$

Fredholm 境界作用素(2)

$LH_\alpha \varphi$

$$= \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x') \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x') \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + (\gamma(x') - \alpha \delta(x')) \varphi$$
$$+ \int_{\partial D} \tilde{\pi}_\alpha(x', y') \left[\varphi(y') - \varphi(x') - \sum_{j=1}^{N-1} (y_j - x_j) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x') \right] dy'.$$

$$\tilde{\pi}_\alpha(x', y') \geq 0, \quad \forall x' \neq y'.$$

一意可解性定理

For $\forall k \geq 1$, $\exists \lambda = \lambda(k) > 0$ such that

$$LH_{\alpha} - \lambda : C^{k+\theta}(\partial D) \rightarrow C^{k+\theta}(\partial D)$$

is **surjective**.

楕円型正則摂動の方法

Λ : Laplace-Beltrami operator on ∂D

$$LH_\alpha + \varepsilon\Lambda - \lambda : C^{k+\theta}(\partial D) \rightarrow C^{k+\theta}(\partial D), \forall \varepsilon > 0$$

is **surjective**.

最大値の原理 (ソボレフ空間版)

劣調和関数の最大値の原理

- 劣調和(下に凸)関数は、その最大値を**境界の点**でとる。(最大値の原理)
- 劣調和関数が、内部の点で最大値をとれば、**定数**である。(強最大値の原理)

弱最大値の原理 (Aleksandrov-Bakel'man)

Assume that:

$$\begin{cases} u \in C(\bar{D}) \cap W_{\text{loc}}^{2,N}(D), \\ (\alpha - W)u(x) \leq 0 \text{ for a.a. } x \in D. \end{cases}$$

Then:

$$\sup_D u \leq \sup_{\partial D} u^+.$$

強最大値の原理

Assume that

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in C(\overline{D}) \cap W_{\text{loc}}^{2,N}(D), \\ (\alpha - W)u(x) \leq 0 \text{ for a.a. } x \in D, \\ M = \sup_D u \geq 0. \end{array} \right.$$

Then:

$$\exists x_0 \in D \text{ s.t. } u(x_0) = M \Rightarrow u(x) \equiv M, \quad \forall x \in D.$$

Hopf の補題

Assume that

$$\begin{cases} u \in C^1(\bar{D}) \cap W_{\text{loc}}^{2,N}(D), \\ (\alpha - W)u(x) \leq 0 \text{ for a. a. } x \in D. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \exists x'_0 \in \partial D \text{ such that } u(x'_0) = \sup_D u = m \geq 0, \\ u(y) < m, \quad \forall y \in D. \end{cases}$$

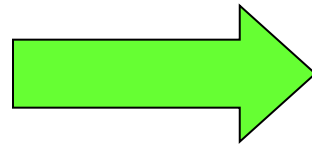
Then :

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x'_0) < 0.$$

グリーン作用素の構成(2)

Fredholm 境界作用素(3)

Hille - Yosida - Ray Theorem



The closed extension

$$\overline{LH}_\alpha : C(\partial D) \rightarrow C(\partial D)$$

$$(LH_\alpha : C^{k+\theta}(\partial D) \rightarrow C^{k+\theta}(\partial D))$$

generates a **Feller semigroup** on $C(\partial D)$.

Fredholm 境界作用素 (4)

If L is **transversal**, then

$$\overline{LH}_\alpha : C(\partial D) \rightarrow C(\partial D)$$

is **bijective**.

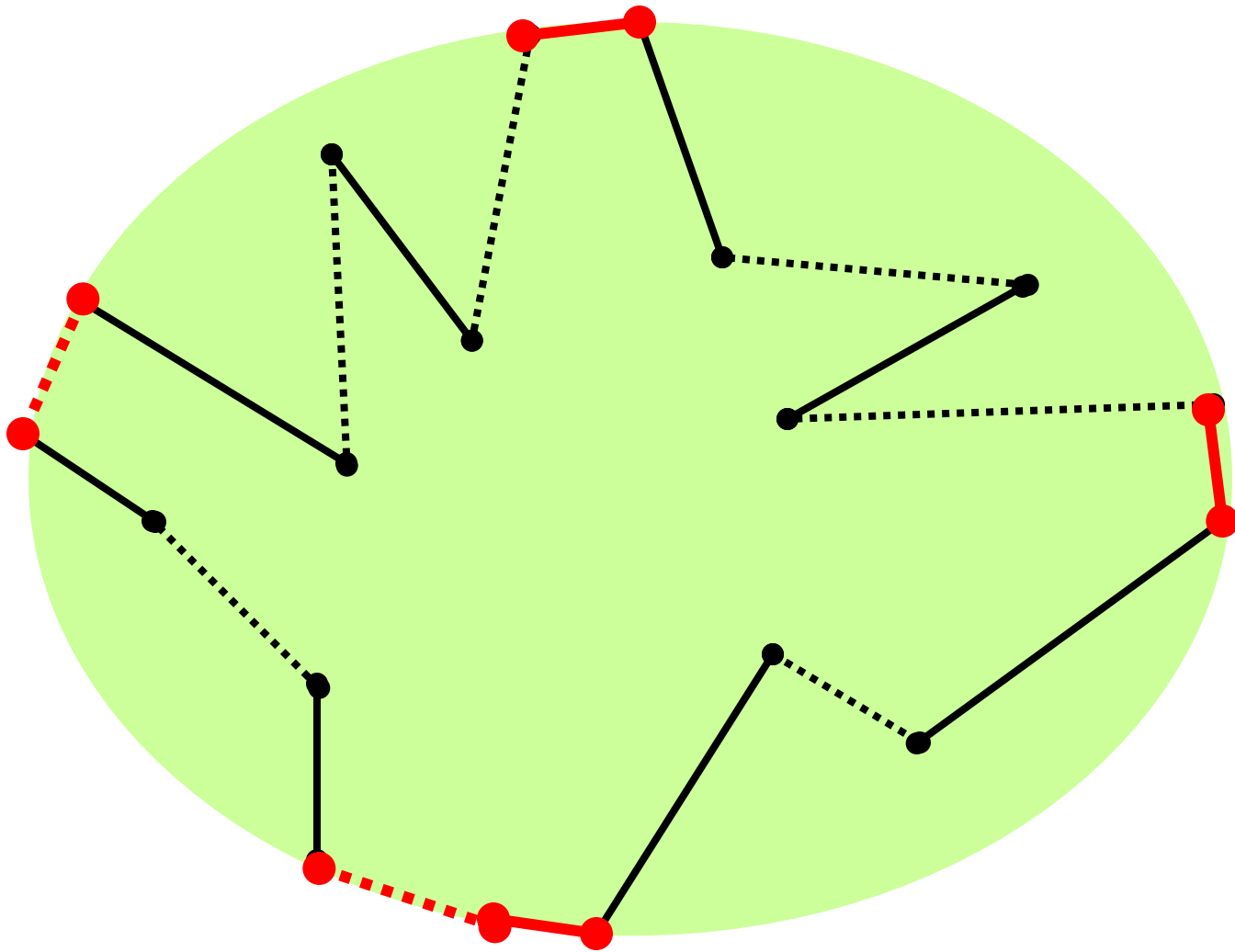
グリーン作用素の表現式

$$u = G_{\alpha} f := G_{\alpha}^0 f - H_{\alpha} \left(\overline{LH_{\alpha}}^{-1} \left(LG_{\alpha}^0 f \right) \right)$$

$$\begin{cases} (\alpha - \mathbf{W})u = f & \text{in } D \\ \mathbf{L}u = 0 & \text{on } \partial D \end{cases}$$

境界への帰着

偏微分方程式	確率論
楕円型境界値問題	領域全体の拡散過程
フレドホルム積分方程式	境界上の拡散過程
楕円型条件	横断条件



今後の問題

未解決問題 (1)

- **Generalization of Boundary Conditions**
Non-Transversal Case
- **Generalization of Elliptic Operators**
Degenerate Case

文献

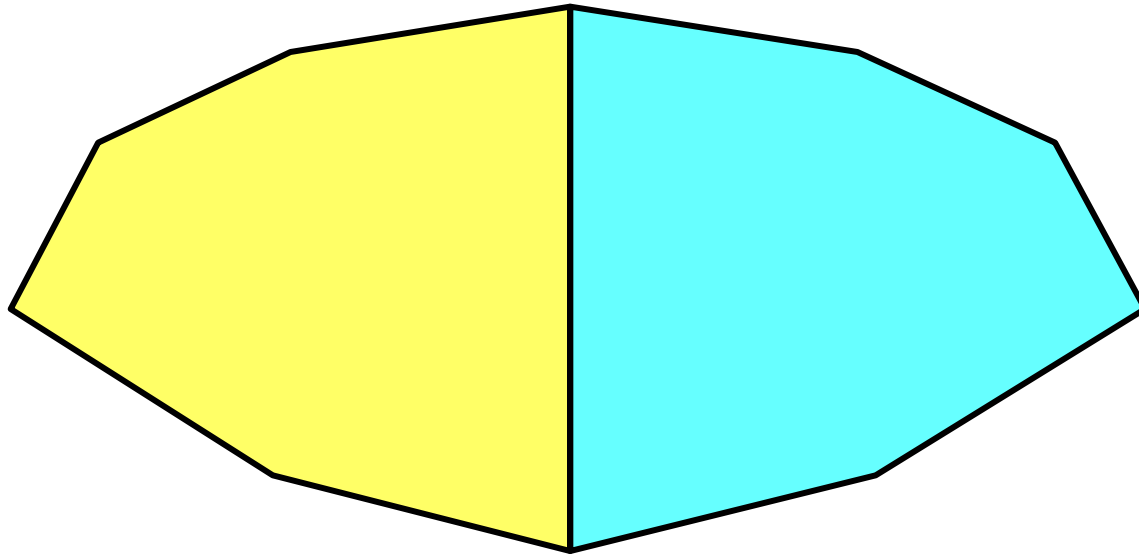
- **Taira**: J. Functional Analysis 129 (1995), 108-131 (**degenerate case**)
- **Taira**: Hiroshima Math. J. 27 (1997), 77-103 (**non-transversal case**)
- **Taira, Favini and Romanelli**: Studia Mathematica 145 (2001), 17-53 (**degenerate case**)

未解決問題 (2)

Generalization of Elliptic Operators

Discontinuous Case

不連続な(異なる)拡散係数



文献(1)

K. Taira: On the existence of Feller semigroups with discontinuous coefficients,

Acta Mathematica Sinica (English Series), Vol. 22 (2006), 595–606

文献(2)

K. Taira: On the existence of Feller semigroups with discontinuous coefficients II,

Acta Mathematica Sinica (English Series), Vol. 25 (2009), 715–740

END