

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 18 日現在

機関番号：12102

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2010～2013

課題番号：22740053

研究課題名(和文) Bayes的アプローチによる統計的非正則推定の新展開

研究課題名(英文) Statistical estimation of non-regular case by Bayesian approach

研究代表者

大谷内 奈穂(Ohyauchi, Nao)

筑波大学・数理物質系・助教

研究者番号：40375374

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円、(間接経費) 960,000円

研究成果の概要(和文)：両側切断分布族の位置母数推定問題において、その各分布の台が区間になりその密度が両端点で正値をとり、また両端点での微分係数が存在する場合、極値統計量と漸近補助統計量の組から成る統計量が2次のオーダーまで漸近情報量損失を起こさないことが分かった。一方、Bayes的観点から考えると最良位置共変推定量(Pitman推定量)は一般一様事前分布と2乗損失に関してリスクを最小にする一般ベイズ推定量と見なされる。そこで、上記の推定問題において、Pitman推定量の漸近展開から漸近集中確率を求めて、他の位置共変推定量との比較を行った。

研究成果の概要(英文)：In the estimation problem on a location parameter for a family of two-sided truncated distributions, we considered the case when each distribution's support is an interval and its density had positive values on the interval and differential coefficients at its endpoints. Then, it was shown that the second order asymptotic loss of information of the statistic consisting of extreme values and an asymptotically ancillary statistic vanished. On the other hand, from the Bayesian viewpoint, the best location equivariant estimator (Pitman estimator) is regarded as the generalized Bayes estimator which minimized the risk with respect to an improper uniform distribution and the quadratic loss. In the above estimation problem, we obtained the asymptotic concentration probability of the Pitman estimator and compared it with other location equivariant estimators.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：切断分布族 位置母数推定問題 漸近情報量損失 極値統計量 Pitman推定量

1. 研究開始当初の背景

統計的推測理論において、通常、正則条件を仮定して推定量、検定等の性質を研究することが多く、すでにかなり研究されている。一方、必ずしも正則条件が成り立たないような非正則な場合は比較的未開拓である。非正則な場合には正則な場合と異なり、例えば最尤推定量はいつも最良な推定量になるとは限らない。このような非正則な推定論については、国内では Akahira and Takeuchi(1995)のモノグラフ(Springer LNS)に系統的にまとめられている。また、国外でも Vincze(1979), Móri(1983), Ghosal, Ghosh and Samanta(1994)らの研究があり、Cramer-Rao 型の不等式の非正則版が得られ、Bayes 推定量の漸近的性質等が調べられている。しかし、非正則な場合には未開拓の部分が多く、本研究代表者も最近の研究によって一定の貢献をしつつあり、これまでの研究成果を 2007 年 9 月に東北大学で開催された日本数学会秋季総合分科会において特別講演として発表した。これまで、本研究代表者は、非正則の特別な場合として、切断分布族の場合に推定量に対する情報不等式を導出し、それによる下界を求め、その下界の達成可能性についても解明してきた。その際、未知母数を確率変数と見なして、その事前分布を仮定して考える Bayes 的アプローチが有用であり、実際、非正則な場合には、最尤推定量よりも適当な事前分布に関する Bayes 推定量の方が有効であることが分かった。

2. 研究の目的

統計的推測理論において、主として、分布が滑らかでないような非正則な場合に研究を遂行する。実際には、未知母数を確率変数と見なして、その事前分布を想定して考える Bayes 的方法は、非正則性の状況に応じて適切な事前分布を取ることで、より多くの情報を得ることができるという点で有用であり、この方法を駆使することによって、統計的非正則モデルの推定構造を解明することが目的である。さらに、本研究を進めることにより、正則な場合と非正則な場合のつながりを Bayes 的考察を含む様々なアプローチを通して解明し、両方の場合を含む統一理論の完成に向けた新展開も目指す。さらに、非正則モデルの応用についても考える。

3. 研究の方法

まず、統計的非正則モデルにおける情報不等式の導出について、一様事前分布以外の事前分布を取る場合や、損失関数として非対称な関数を取る場合について、推定量の Bayes リスクに対する情報不等式を、その下界の達成可能性も含めて考察する。また、非正則な場合の典型として、位置母数をもつ切断分布族を考え、推定量の漸近展開を求めて高次のオーダーまで含めて漸近的良さについて検討

する。その際、良さを測る尺度をしては一般化情報量、集中確率等を考える。さらに、理論として構築できたものは、実際問題への応用についても検討していく。このような研究を推進するために、非正則推測理論関連の文献を収集して、自身の知識を深めつつ、この方面の研究状況を把握する。また、国内他大学における関連分野の研究者との研究打合せ等を行い、国際研究集会にも出席して国外の研究者との情報交換も積極的に行う。

4. 研究成果

(1) 未知母数をもつ母集団分布の密度が正則条件を満たすような正則な場合には、未知母数に関する情報量として Fisher 情報量や Kullback-Leibler 情報量等が定義され、十分統計量の特徴付けも知られている。しかし、非正則な場合にはそれらの情報量は適用できないため、より一般的な情報量を考える必要があり、特に Akahira(1995, 1996)で提案されている一般化情報量を用いて、統計量の漸近的な情報量損失を用いて非正則構造を考察した。非正則分布族の場合には、統計量の情報量は分布の非正則性に依存する。従来、Akahira(1996)においては、各分布の台が区間であるときに、区間の両端点においてその密度の値が等しく、また両端点における密度の微分係数の和が 0 である場合には、極値統計量と漸近補助統計量の組から成る統計量が 2 次のオーダーまで漸近情報量損失を起こさないことが示されている。しかし、実際に適用する場合には、上記の条件はやや強いように感じられる。そこで、より一般の非正則分布族として、分布の台が区間であるときに、区間の両端点においてその密度の値が正値で存在し、また両端点における密度の微分係数が存在する場合について、漸近的に一般化情報量損失を起こさない統計量が存在するかという問題に着目した。その結果、Akahira(1996)の結果と同様に、より一般の非正則分布族の場合においても、極値統計量と漸近補助統計量の組からなる統計量が 2 次のオーダーまで漸近情報量損失を起こさないことが分かった。さらに、求めた統計量の一般化情報量の結果から、極値統計量は分布の台の両端点に関する情報を持ち、また極値統計量を与えたときの漸近補助統計量の条件付情報量は台の内部における情報と台の両端点での密度の値の差から成ることも分かった。よって、台の区間の両端点での密度の値が等しいという仮定を加えることで、実は漸近補助統計量の条件付情報量から台の両端点に関する情報が消えてしまっていたが、より一般の場合を考察することにより、密度の両端点での状況が統計量の情報量損失にどのように影響するか解明することができた。今後の研究では、この結果を用いて、非正則な場合の情報不等式の導出について、適当な事前分布と損失関数に関する Bayes リスクを定義し、推定量の Bayes リスクに対

する情報不等式の導出を目指す。

(2) 統計的推測の漸近理論において、非正則分布族の典型として位置母数をもつ切断分布族について、各分布の台が区間で両端点でのその密度の値が異なり、かつ両端点でのその密度の微分係数の和が0とならない場合について、その位置母数の推定問題を考えた。このとき、最良位置共変推定量(Pitman推定量)は、Bayes的観点から見れば一般一様事前分布と2乗損失に関してリスクを最小にする一般Bayes推定量をして把えられる。従来、このような切断分布族の場合にPitman推定量の漸近展開を導出し、その漸近分散を求め、さらに切断点での密度の値による荷重推定量の漸近分布による比較も行った(Akahira, M., Ohyauchi, N. and Takeuchi, K. (2007))。一方、同じ分布族で極値統計量は1次の漸近情報量損失は0になるが、2次の漸近情報量損失は正值になることが分かり、さらに、極値統計量と漸近補助統計量の組から成る統計量の2次の漸近情報量損失が0となることも示されている(Akahira, M., Kim, H. G. and Ohyauchi, N. (2012))。他方、位置共変推定の観点からは、極値統計量からつくられる荷重推定量は、2次の漸近情報量損失が0になるのではないかという問題が生じ得るため、その問題について考察を行った。その結果、極値統計量からつくられる荷重推定量は位置共変推定量になるが、その漸近情報量損失は1次のオーダーですら0にはならないことを示した。さらに、[AOT07]におけるPitman推定量の漸近展開からPitman推定量の漸近分布を求めることができたので、極値統計量から成る荷重推定量の漸近分布を考え、それらの推定量の漸近集中確率を求め、それらを数値計算的観点から比較を試みた。その結果、Pitman推定量は荷重推定量より漸近集中確率の意味で漸近的に一樣に良いとは限らないことが示された。

(3) 統計的推定論において、母数の関数に対する最小分散不偏推定量を求める問題に関しては、正則条件の下での情報不等式による分散の下界による評価法や、完備十分統計量が存在する場合にはそれに基づく不偏推定量を求める方法等が知られている。特に後者の方法については、単純な不偏推定量を完備十分統計量で条件付き期待値をとれば良いことは分かっているが、その形を具体的に表現することが難しいことも多い。Mukhopadhyay and Bhat tachar jee(2010)では完備十分統計量が存在する場合には、母数の関数が無限和の関数として表現できるときに、完備十分統計量に基づく推定量の無限和が最小分散不偏推定量であることを示している。しかし、母数の関数が無限和の関数として表わされる母数の範囲を母数空間全体で考えているかどうか明確でないため、結論にやや曖昧な点があった。そこで、対象となる母数の範囲を明確にし、母数空間の部分集合における完備十分統計量に基づく母数の関数の一様最小分散不偏推定量について考察を行った。その結果、母数

空間上で定義された関数が母数空間の部分集合において整級数展開可能であるときに、その部分集合における完備十分統計量に基づく推定量が一様最小分散不偏推定量であるための十分条件が得られた。さらに、部分集合における完備十分統計量が母数空間全体に対しても完備十分であれば、部分集合上で求めた推定量が母数空間全体においても一様最小分散不偏推定量となることが示された。

(4) 分布の台が母数に依存するような非正則分布族の典型として切断分布族が考えられるが、台が区間となる場合に、その両端点でのその密度の値が同じときには、範囲の中央を基点として推定量の2次の漸近有効性が論じられた。さらに、その両端点での密度の値が異なる場合については、その典型的な場合として、Akahira(1977)は切断指数分布の位置母数推定問題を取り上げて、最尤推定量よりも荷重推定量が漸近分散を小さくするという意味で良くなるような荷重の条件を求めている。また Akahira, Ohyauchi and Takeuchi(2007)では、切断指数分布を含む一般の両側切断分布族の位置母数推定問題において、Pitman 推定量の漸近展開と漸近分散が求められ、このような場合には範囲の中央が推定量の漸近的な基点とはならないことが示されている。そこで、Akahira, Ohyauchi and Takeuchi(2007)において示された両側切断分布族における事実と Akahira(1977)で論じられたような切断指数分布の場合との関係を通して Pitman 推定量の漸近展開の構造を明らかにするとともに、位置共変推定の観点から Pitman 推定量、荷重推定量の漸近分散の比較を行った。その結果、Pitman 推定量の漸近展開の定数のオーダーの項は、切断指数分布の場合の Pitman 推定量の形と同じであることが分かり、切断指数分布が両側切断分布族の基点として把えられることが示された。さらに、片側切断分布族の位置共変推定問題においても、Pitman 推定量の漸近展開の定数のオーダーの項が指数分布の場合の Pitman 推定量の形と同じであることが分かった。また、偏り補正した最尤推定量は Pitman 推定量と1次のオーダーでは漸近的に同等であるが、2次のオーダーでは漸近的差が生じ、偏り補正した最尤推定量の Pitman 推定量に対する2次の漸近損失が解析的に求められた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 9 件)

Akahira, M., Ohyauchi, N. and Kawai, S., A higher order approximation to a percentage point of the distribution of a noncentral t-statistic without the normality assumption, Commun. Statist.-Simulation and Computation,

査読有, 42(9), 2013, 2086-2105.
DOI:10.1080/03610918.2012.695841.
Ohyauchi, N., Comparison of risks of estimators under the LINEX loss for a family of truncated distributions, *Statistics*, 査読有, 47(3), 2013, 590-604,
DOI:10.1080/02331888.2011.605889.
Ohyauchi, N., Asymptotic concentration probabilities of the Pitman estimator and weighted estimators in the non-regular case, *Proc. 59th ISI World Statistics Congress*, 査読無, 2013, 4743-4746.
大谷内奈穂, 赤平昌文, Asymptotic comparison of estimators for a family of truncated distributions, *京都大学数理解析研究所講究録*, 査読無, 1860, 2013, 129-139,
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1860-10.pdf>.
Akahira, M., Kim, H. G. and Ohyauchi, N., Loss of information of a statistic for a family of non-regular distributions, II: More general case. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 査読有, 64(6), 2012, 1121-1138,
DOI:10.1007/s10463-011-0347-4.
赤平昌文, 大谷内奈穂, The asymptotic expansion of the maximum likelihood estimator for a truncated exponential family of distributions. *京都大学数理解析研究所講究録*, 査読無, 1804, 2012, 188-192,
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1804-15.pdf>.
Kim, H. G., 大谷内奈穂, 赤平昌文, The non-regular statistical structure from the viewpoint of the loss of information. *京都大学数理解析研究所講究録*, 査読無, 1758, 2011, 90-99,
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1758-07.pdf>.
Kim, H. G., 大谷内奈穂, 赤平昌文, Remarks on uniformly minimum variance unbiased estimation. *京都大学数理解析研究所講究録*, 査読無, 1758, 2011, 195-202,
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1758-16.pdf>.
大谷内奈穂, 統計的非正則推定における Bayes 的アプローチによる情報不等式. *数学*, 査読有, 62(3), 2010, 366-385,
<http://dx.doi.org/10.11429/sugaku.0623366>.

〔学会発表〕(計 5 件)

赤平昌文, 橋本真太郎, 小池健一, 大谷内奈穂. Asymptotic comparison of the MLE and MLE up to the second order for a two-sided truncated exponential family, *日本数学会年会*, 学習院大学, 2014 年 3 月 17 日.

Ohyauchi, N. Asymptotic concentration probabilities of the Pitman estimator and weighted estimators in the non-regular case, *59th ISI World Statistics Congress*, Hong Kong, China, 2013 年 8 月 29 日.

Akahira, M., Kim, H. G., Ohyauchi, N. Loss of information associated with the statistic in a class of non-regular cases. *The 2nd Institute of Mathematical Statistics Asia Pacific Rim Meeting*, Ibaraki, 2012 年 7 月 3 日.

赤平昌文, Kim H. G., 大谷内奈穂. Loss of information associated with the statistic for a family of non-regular distributions. *日本数学会年会*, 早稲田大学, 2011 年 3 月 22 日.

Ohyauchi, N., Akahira, M., Kawai, S. A higher order approximation to the distribution of a non-central t-statistic under non-normality. *The 58th Session of the International Statistical Institute*, Dublin, Ireland, 2011 年 8 月 23 日.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

取得状況 (計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

大谷内 奈穂 (Ohyauchi, Nao)

筑波大学・数理物質系・助教

研究者番号: 4 0 3 7 5 3 7 4