アポロニウスの円錐曲線論

2015 年 2 月 10 日

アポロニウスは紀元前 3 世紀後半のギリシアの人である. 古代ギリシアの人は幾何学が好きで, 図形を描いては盛んに議論を行っていた. 今回は, アポロニウスが考えた内容, 円錐を平面で切って現れる図形について考える.
高校の数学では 2 次曲線の単元があり, 楕円や双曲線や放物線を勉強することになる. アポロニウスはそれらに関わる重要な性質の多くを明らかにしている.

直線をとり, 平行でなく直交もしないある直線を軸として回転させてできる図形は円錐である (図 1-上) [1]. 交点は円錐の頂点となる. 直線が動いてできた曲面上にある円錐の頂点を通る直線を円錐の母線という.
円錐を平面 π で切る. 切り口に現れる図形は平面 π の傾き具合によって異なる.
軸と母線とのなす角を α とする ($0° < \alpha < 90°$).
平面 π と軸のなす角を β とする ($0° \leq \beta \leq 90°$).
切り口には

- $\alpha < \beta$ のとき　　楕円
- $\alpha > \beta$ のとき　　双曲線
- $\alpha = \beta$ のとき　　放物線
- 特に, $\beta = 90°$ のとき　　円

が現れる (図 1-下).
こういうことを研究し, アポロニウスは「円錐曲線論」(全 8 巻）を書いた. 前の時代にはユークリッドの「円錐曲線論」(全 4 巻）があったが, こちらは残念ながら失われて残っていない. コピーも印刷技術もない時代の話, アポロニウスがまとめたもののほうが優れていて, 広く写本をされたからである.

では定義をする.

- 円　　1 点からの距離が等しい点の軌跡.
- 楕円　　2 点からの距離の和が一定である点の軌跡.
- 双曲線　　2 点からの距離の差が一定である点の軌跡.

[1]後ろのページに図をつけたのでご参照ください.

- 放物線　　1 点と（その点を通らない）直線の距離が等しい点の軌跡.

円錐を切る前に少し簡単な場合から説明する.

まず, 円柱を斜めに切って, 切断面に楕円が現れることを確認する (図 2).
図のように円柱に球 O, O' が内接しているとする. 球 O, O' に接する平面（接点を F, F' とする）で円柱を切断する. 切断面の外周に点 P をとり, $PF + PF'$ が一定となることをいいたい.
P を通って円柱と平行に直線を引き, 球 O に接する点を Q, 球 O' に接する点を Q' とする. 球の外の点から球に接線を引いた場合, その長さは同じになるので, $PF = PQ$, $PF' = PQ'$ である. したがって, $PF + PF' = PQ + PQ' = QQ'$ となる.

次にいよいよ円錐を切る.

● $\alpha < \beta$ のとき楕円が現れる (図 3-上)

図のように円錐に球 O, O' が内接しているとする. 球 O, O' に接する平面（接点を F, F' とする）で円錐を切断する. 切断面の外周に点 P をとり, $PF + PF'$ が一定となることをいいたい.
P と頂点を結ぶ直線を引き, 球 O に接する点を K, 球 O' に接する点を K' とする. 球の外の点から球に接線を引いた場合, その長さは同じになるので, $PF = PK$, $PF' = PK'$ である. したがって, $PF + PF' = PK + PK' = KK'$ となる.

● $\alpha > \beta$ のとき双曲線が現れる (図 3-下)

ほとんど楕円のときと同じようにしてわかる.
図のように円錐に球 O, O' が内接しているとする. 球 O, O' に接する平面（接点を F, F' とする）で円錐を切断する. 切断面に点 P をとり, $PF' - PF$ が一定となることをいいたい.
P と頂点を結ぶ直線を引き, 球 O に接する点を K, 球 O' に接する点を K' とする. 球の外の点から球に接線を引いた場合, その長さは同じになるので, $PF = PK$, $PF' = PK'$ である. したがって, $PF' - PF = PK' - PK = KK'$ となる.

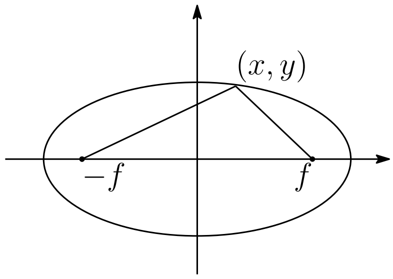
● $\alpha = \beta$ のとき放物線が現れる (図 4)

図のように円錐に球 O が内接しているとする. 平面 π で円錐を切断する.
球 O と円錐の共有円を含む平面を π' とする. π と π' の交線を d とする.
切断面の曲線上に点 P をとり, P から直線 d へ下ろした垂線の足を H, 平面 π' へ下ろした垂線の足を K とする.
PM が円錐の頂点を通るように π' 上に M をとる.
$\angle KPH = \alpha$, $\angle KPM = \beta$, $\alpha = \beta$ より, $\triangle PKH \equiv \triangle PKM$ である. したがって, $PH = PM$ である.
球の外の点から球に接線を引いた場合, その長さは同じになるので, $PM = PF$, よって $PH = PF$ である.

今度は座標をとってやってみよう.

●楕円の式

点 $(f,0)$, $(-f,0)$ からの距離の和が $2a$ となる楕円の式を求めよう.



楕円上の点を (x,y) とすると

$$\sqrt{(x+f)^2+y^2}+\sqrt{(x-f)^2+y^2}=2a$$

移項して

$$\sqrt{(x+f)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-f)^2+y^2}$$

両辺を 2 乗して整理すると

$$fx-a^2=-a\sqrt{(x-f)^2+y^2}$$

もう一度両辺を 2 乗して整理すると

$$(f^2-a^2)x^2=a^2\{(x-f)^2+y^2\}$$

ところで, 点 $(f,0)$, $(-f,0)$ からの距離の和が $2a$ なので, $2a>2f$, すなわち $a>f$ である. $b^2=a^2-f^2$ とおくと

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

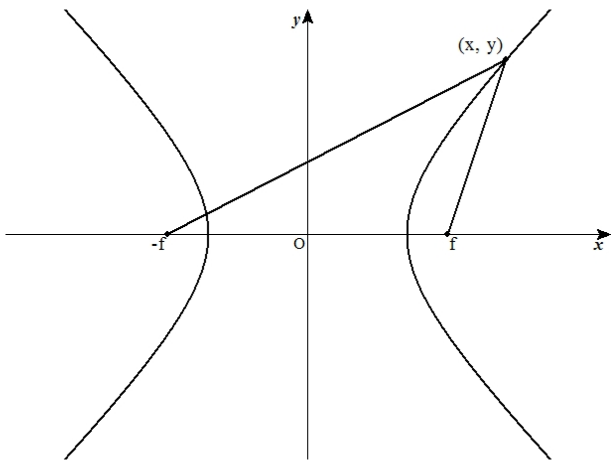
両辺を a^2b^2 で割って

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

●双曲線の式

双曲線の式も同じようなやり方で出る.

点 $(f,0)$, $(-f,0)$ からの距離の差が $2a$ となる双曲線の式を求めよう.



双曲線上の点を (x, y) とすると

$$\sqrt{(x+f)^2+y^2} - \sqrt{(x-f)^2+y^2} = \pm 2a$$

移項して

$$\sqrt{(x+f)^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-f)^2+y^2}$$

両辺を 2 乗して整理すると

$$fx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-f)^2+y^2}$$

もう一度両辺を 2 乗して整理すると

$$(f^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(f^2-a^2)$$

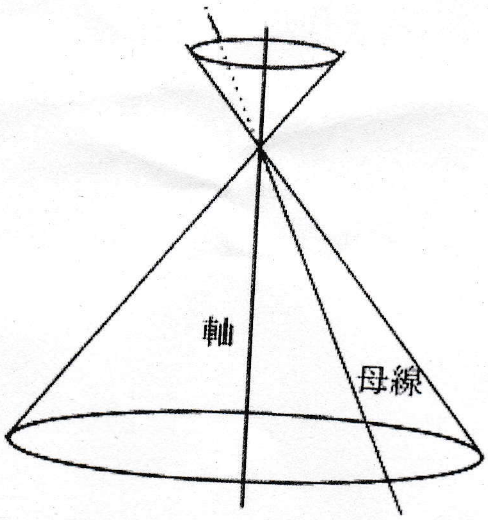
ところで, 今度は点 $(f, 0)$, $(-f, 0)$ からの距離の差が $2a$ なので, $2a < 2f$, すなわち $a < f$ である. $b^2 = f^2 - a^2$ とおくと

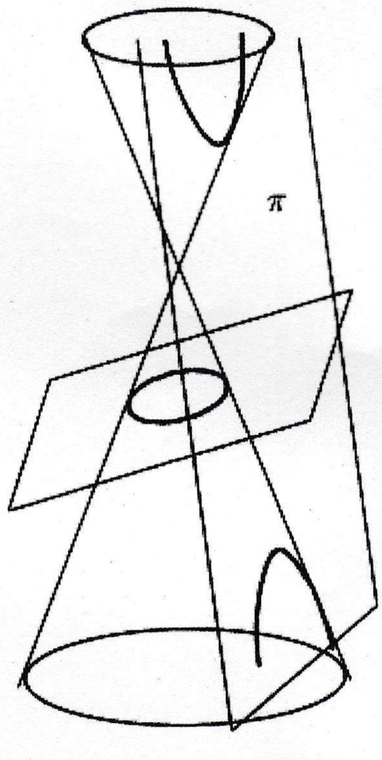
$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

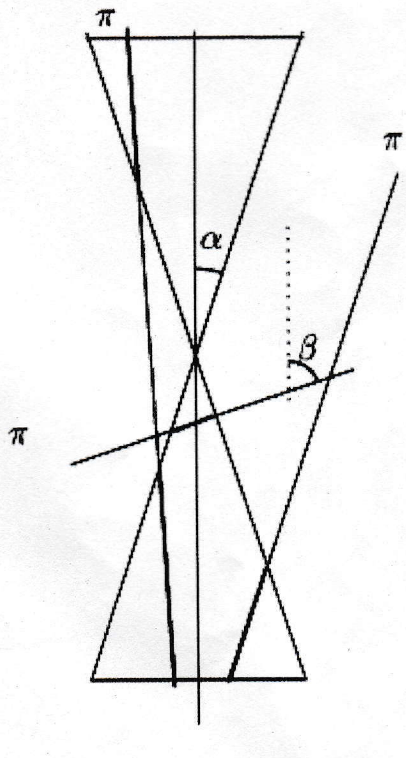
両辺を a^2b^2 で割って

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

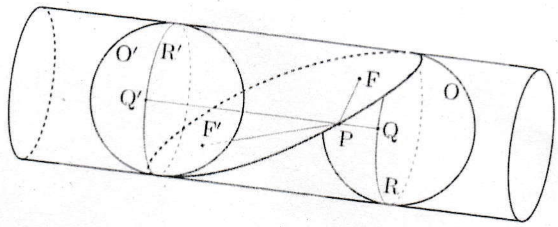
※放物線の式も同じようなやり方で出すことができる.

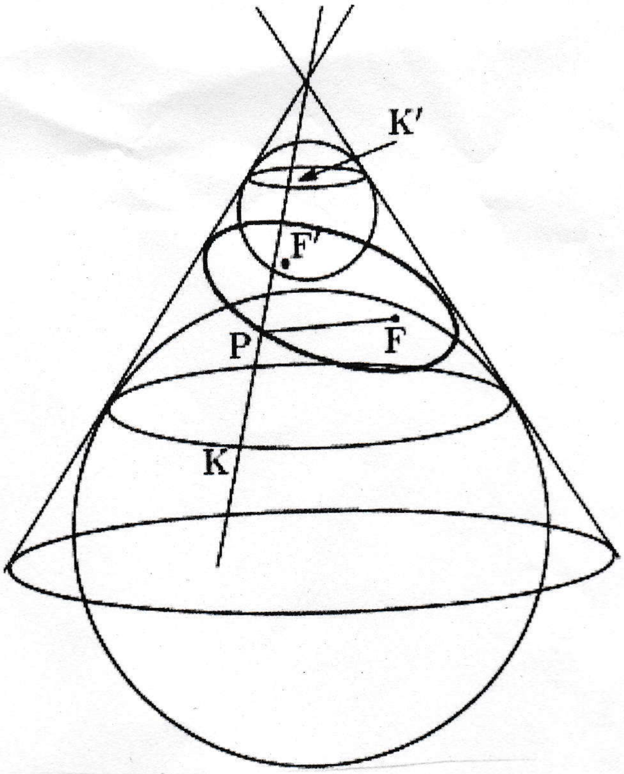

軸
母線

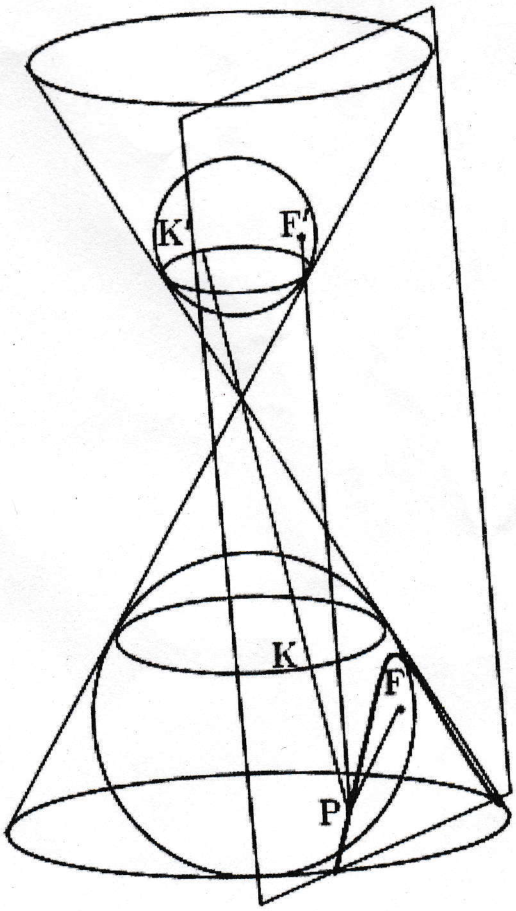

π

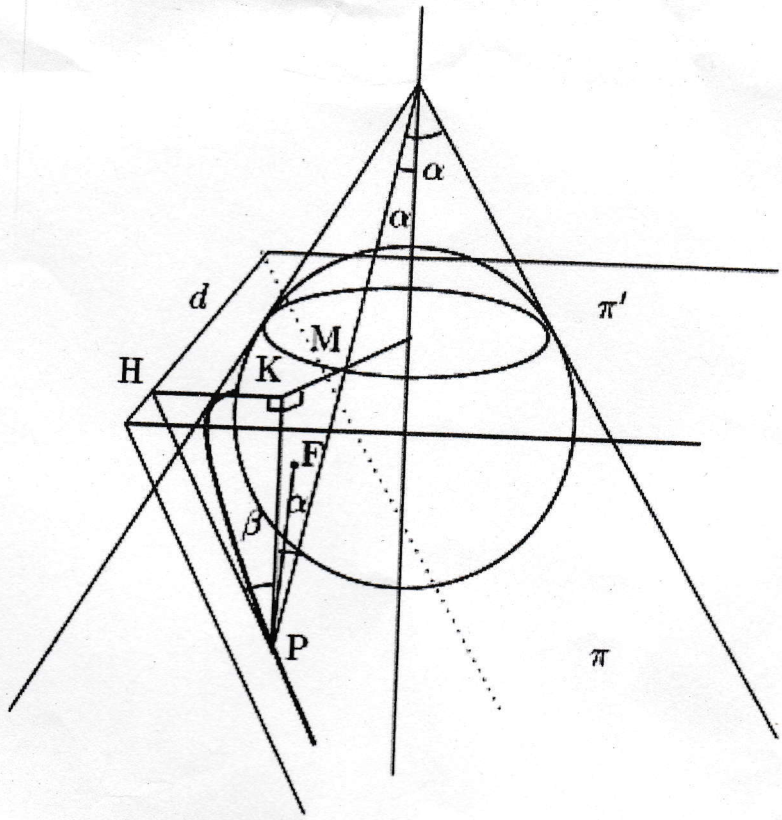

π
π
α
β
π

2




K′
F′
P
F
K


K′
F′
K
F
P


α
α
d
π′
M
H
K
F
α
β
P
π