様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月 １７ 日現在

機関番号：１２１０２
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2011～2013
課題番号：２３５４０００６

研究課題名（和文）無限次元代数群とリー環の構造の研究、および語・記号列への応用

研究課題名（英文）A study of infinite dimensional algebraic groups and Lie algebras, and an application to words and sequences

研究代表者
森田　純（Morita, Jun）

筑波大学・数理物質系・教授

研究者番号：２０１６６４１６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,900,000円、（間接経費）　1,170,000円

研究成果の概要（和文）：階数２の双曲型カッツ・ムーディ群に対し、その交換関係式が自明な場合に、構造解明が残されていたが、ある種の無限体上で考えることにより、群として中心上単純であることが明らかになった。すなわち、２次の双曲型カルタン行列には、マイナス１が現れないと仮定し、体として有限体の代数閉包を選ぶと、群の単純性が導かれる。また、局所アフィン・リー代数の分類を完成させた。さらに、最も簡単なオートマトンと数の階層との間に基本的な関係が存在することを示した。

研究成果の概要（英文）：In the case when rank 2 hyperbolic Kac-Moody groups have trivial commutation relations, we obtained that the groups over certain infinite fields are simple modulo their centers. That is, if we suppose that a rank 2 hyperbolic Cartan matrix has no -1 entry, and if we choose the algebraic closure of a finite field, then we can obtain the simplicity of our group. We also classified the locally affine Lie algebras. Furthermore, we showed that there is an interesting correspondence between fundamental automata and hierarchy of numbers.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数群　リー代数　単純群　局所アフィン・リー代数　準周期構造　オートマトン

１．研究開始当初の背景

カッツ・ムーディ群の構造について、その多くが議論されて解明されて来ていた。しかし、一般の場合の単純性は、長いこと殆ど明らかにされていなかった。最近になり、建物理論とマルグリス理論を大きく発展させる形で、新しい理論展開がリヨン大学 B. レミ教授により与えられ、単純性の議論が可能となってきた。実際に、階数３以上の場合には、有限体の上で考えることにより、単純性の解明が一気に進んだ。階数２の場合には、事情が異なり、個別の議論が必要になるが、対応するカルタン行列にマイナス１が出てくる場合には、自由積の理論を用いて、K-E. カプラス教授と B. レミ教授により有限体上の場合に単純性が示された。そこで、階数２でカルタン行列にマイナス１が出てこない場合の考察が必要となっていた。

一方、リー代数と対応する群を研究するレベルでは、局所拡大アフィン・リー代数の分類が可能なところまで理論が発展してきたので、早急に分類理論を整備する必要性が高まってきていた。20 世紀後半に盛んになった無限次元リー代数において、アフィン・リー代数はその中心的役割を担ってきた。その良い性質を引き継いだものが拡大アフィン・リー代数であり、さらにカルタン部分を無限次元化したものが、局所拡大アフィン・リー代数である。その一般理論の整備は本報告者により精力的に構築されてきたが、今回の研究において、その分類理論の骨子を完成させることが求められていた。

さらに、無限次元リー理論と非周期構造との間の新たな理論展開を目指す必要性も周辺領域の研究から期待されていた。非周期理論に対する代数的なアプローチは殆ど試みられておらず、その成果が期待されている部分が大きい。本報告者は、最近になり、リー理論の構造論と表現論の思想を応用して、非周期構造から、代数系を構成し、そこで表現論を展開し、そこから不変量を抽出し、それを具体的に計算するアルゴリズムを提示した。その不変量の意味を解明する必要があり、それを特徴付ける研究が望まれていた。

以上の様な背景の下で、本研究課題を総合的に開始する必然があった。

２．研究の目的

関連内容に関しては当然ながら研究していく必要があるが、研究の主たる目的は以下の通り。カッツ・ムーディ群で新たな単純性を発見すること、局所アフィン・リー環の分類理論を整備完成させること、非周期構造と代数系の新たな対応関係を発見すること、およびリー理論の立場で、構造論と表現論の応用として、これらを総合的に研究することである。

より具体的には、本研究は今述べたように、３つの部分からなり、それは
（１）無限体上の無限次元カッツ・ムーディ群の構造を解明すること
（２）局所拡大アフィン・リー環とそれに付随する群の構造を解明すること
（３）語と配列の構造と不変量を代数系の理論の応用として解明すること
である。これらは無限ルート系および無限次元代数群の理論を通じて相互に関連しており、総合的に研究を進めていくことができる。幅の広い視点から研究を遂行することが大きな特徴である。

１９世紀末から始まった半単純リー群（リー環）の研究は分類理論の完成とともに、２０世紀中ごろには半単純代数群の研究へと進化した。２０世紀後半には無限次元化の流れが起こり、カッツ・ムーディ理論やアフィン・リー環を中心とした数理物理学への応用理論、さらには量子化の理論へと発展し整備されてきている。さらに昨今では様々な方面への新たな応用も期待され模索されてきている。

そういう大きな研究の流れの中で、上記３つ（１）、（２）、（３）は、ルート系や代数群の観点から相互に深く関係していて、互いに良い影響を及ぼしながら研究を遂行していくことが可能である。本研究では、これをまさしく実行しようということであり、そこで数学的成果を着実に挙げていくことが最大の目的である。

３．研究の方法

(1) 代数群論と幾何理論を組み合わせて、正攻法で単純性を解明する。代数的なアプローチだけでも駄目で、また幾何的なアプローチだけでも上手くいかない。双方の利点をいかしながら、お互いに補い合いながら議論を進める。その際に、体論を上手に用いる。すなわち、有限体の場合の優位性と、無限体の場合の優位性を明確にして、両者の特性が生かせる論法に持ち込む。

(2) カルタン部分環が有限次元の場合とは異なり、理論が複雑になるので、今までの手法は使えない。そこで、リー環の微分構造の詳しい解明と、局所ループ代数と、それにシフト写像の性質を組み合わせて、複雑な微分構造の内で、必要部分を特定していく。今までは、カルタン部分環の有限次元性の陰に隠れていた大切な性質を引っ張り出して、そこに焦点を当てながら、理論を成熟させる。その無限次元性により対角型の行列が新たな微分を引き起こすことに着目する。さらに、今まで見えていなかった未知の世界の様子を詳しく調べることにより、ここでの理論の開発に応用する。

(3) 非周期構造はオートマトンと関連が深い。そこを突破口に代数構造と表現構造から導き出せる不変量との間の関係を調べることにより、代数系と非周期構造を調べる。これは非常にオリジナリティー溢れる試みであり、その優位性を最大限に用いて研究を進める。特に、数の階層、すなわち、自然数、整数、有理数、実数という具合に、最も基本的な階層との関係を明確に示すことを目標に進めていく。我々の不変量は、語の並び具合から、べき級数を計算により導出し、その係数のなす代数体を調べるという、予期せぬ段階を踏む。今までに全く知られていない理論展開を目指すことになる。

(4) 研究代表者の培ってきたリー理論を用いて、総合的に研究を進める。思想的には、調べたい対象から、代数系を構成し、その構造解明し、分類し、その表現論を展開し、さらに表現の様子、例えばテンソル積の分解公式を調べ、そこから一般法則を導き、それらの背後に潜む離散的な組合せ構造を解明するなど、こういう一連の研究をさす。

４．研究成果

階数２のカッツ・ムーディ群で単純群であるものを新たに提示した。これは長いこと問題として残されていた研究テーマに解答を与えたことになる。また、局所アフィン・リー代数を分類した。これは理論整備としては大きな成果である。さらに、オートマトンと数の階層の間に新たな対応関係を与えた。

(1) 定理 2×2 双曲型カルタン行列 A において、成分にマイナス１がないと仮定する。標数 $p > 0$ の有限体の代数閉包を F とする。さらに、付随するカッツ・ムーディ群を $G = G(A,F)$ とし、交換子部分群を $G' = [G,G]$、さらに G' の中心を Z とする。このとき、剰余群 G'/Z は単純群となる。

(2) 定理 局所アフィン・リー環 L は、局所ループ代数 L’と 1 次元の中心 Fc および外部微分構造 D を用いて

$$L = L' + Fc + D$$

の形で書ける。さらに、D は最小微分構造 D_{min} と最大微分構造 D_{max} の中間にある斉次空間として与えられる。

$$D_{min} < D < D_{max}$$

この D_{min} と D_{max} は具体的に記述される。

(3) 発見 頂点数 2 以下の基本的オートマトンと、そこから生成される有限記号列の不変量との間に綺麗な対応関係が存在する。特に、自然数 N、有理数 Q、実数 R、複素数 C における階層

$$N < Q < R < C$$

との関連が指摘された。

(4) これらの研究の根底には、共通のリー理論の構造論と表現論の思想が流れていて、これらの研究成果が相互に良い関連を及ぼしながら得られたことは研究目的にも叶う。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

① Jun Morita and Bertrand Remy,
Simplicity of some twin tree automorphism groups with trivial commutation relations,
Canad. Math. Bull.
査読有,
Vol. 57(2), 2014, 390-400.
DOI: 10.4153/CMB-2014-002-2

② Jun Morita,
Words, automota and Lie theory for tilings,
Proceedings in Mathematics & Statistics (Springer),
査読有,
Vol. 40, 2013, 345-354.
DOI:10.1007/978-1-4471-4863-0_14

③ Jun Morita and Kaiming Zhao,
Automorphisms and derivations of nilradicals of Borel subalgebras in Kac-Moody algebras,
Comm. Contemp. Math.
査読有,
Vol. 14 (2), 2012, 1250010 (63 – 84).
DOI: 10.1142/S0219199712500101

〔学会発表〕（計５件）

① Jun Morita,
Simplicity of some Kac-Moody groups,
Xiamen University, China,
Nov. 29, 2013,
招待講演.

② Jun Morita,
Moody conjecture for Kac-Moody Lie algebras is true,
Huaqiao University, China,
Dec. 2, 2013,
招待講演.

③ Jun Morita,
A note on the simplicity and the universal covering group,
Fields Institute, Toronto, Canada,
March 25 – 29, 2013,
招待講演.

④ Jun Morita,
Symmetry, Lie algebras and aperiodic orders,
Lyon University 1, Jordan Institute,
Dec. 13 – 16, 2011
招待講演.

⑤ Jun Morita,
Symmetry and algebraic approach in Lie theory and aperiodic theory,
中国科学技術大学, 合肥, China,
July 10, 2011,
招待講演.

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

○取得状況（計０件）

〔その他〕
ホームページ等
http://math.tsukuba.ac.jp/~morita

６．研究組織
(1)研究代表者
森田　純（MORITA Jun）
筑波大学・数理物質系・教授
研究者番号：20166416