

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 7 日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23510157

研究課題名(和文) 多変量データの極値相関モデルとリスク管理への応用

研究課題名(英文) Extreme value models for multi-variate data and its application to risk management

## 研究代表者

牧本 直樹 (Makimoto, Naoki)

筑波大学・ビジネスサイエンス系・教授

研究者番号：90242263

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円、(間接経費) 930,000円

研究成果の概要(和文)：多変量データにおいて、複数の変量が同時に大きく変動する極値事象をモデリングするための統計手法と、ファイナンス関連分野を中心に極値事象の影響の評価やリスク管理手法などを研究した。その結果、レジームと呼ばれる潜在的な状態変数の変化に応じて、誤差共分散など多変量データの構造が変化するレジームスイッチモデルが、理論面でも応用面でも有用であることが確認できた。金融市場の実証分析では、ハイリスクとローリスクの局面変化がレジームによって表現され、局面に応じた行動を選択することで、より適切な投資やリスク管理が可能であることが示された。

研究成果の概要(英文)：We investigated statistical methods for modeling and analyzing extremal co-movements of multivariate data and their applications to the measurement of the impact of extremal events and risk management in finance and related fields. The results indicate that the regime switching model is very useful both from theoretical and practical view points for it flexibly represents such structural changes of multivariate data as error covariances according to state changes of a latent variable. In some applications to financial markets, regime switching models identify high risk and low risk regimes and suggest appropriate investment opportunities and risk management depending on the current regime as well as future regime forecast.

研究分野：金融統計，投資理論，リスク管理

科研費の分科・細目：社会・安全システム科学

キーワード：極値理論 多変量時系列 レジームスイッチ 金融市場 不動産競売

### 1. 研究開始当初の背景

多変量データの中には、複数の変量が同時に極めて大きな（または小さな）値をとる事象が観察されるものが少なくない。例えば、リーマンショックの際には株式市場においてほぼすべての銘柄で大幅な値下がり記録している。こうした事象は、大きなリスクにつながるケースが多いため、リスク管理の観点からは、同時に発生する極値的な変動を精度よく分析する手法が必要である。

統計モデルの観点からみると、このような事象の評価には2つの困難が伴う。1点目は、発生頻度が少ないために推定精度を上げるための工夫が必要であること、もう1点はデータの変動が大きいほど連動性が強まる傾向があるため、その性質をどのようにモデル化するか、ということである。

個別テーマに関しては、極値的な共変動のモデルも散見されるが、ある程度一般的な枠組みでのモデル化や、実証分析による有用性の検証はまだ十分に行われていない。

### 2. 研究の目的

(1) 極値事象の共変動に対して一般的に適用可能なモデル化や推定方法を構築する。具体的には、相関構造が時間的に変動するタイプのモデル（レジームスイッチモデル）と、相関構造の強弱が空間的に変化するタイプのモデルを比較検討する。その過程で、極値理論で得られている結果を援用することも検討する。

(2) 金融市場を中心とするいくつかのテーマに対して、(1)で構築したモデルにもとづいて、リスク評価やリスク管理の方法を開発する。例えば、株式市場全体が下落するような状況下で、投資選択をどのように行えばよいか、といった問題である。さらに、開発した手法を実際のデータに対して適用し、その効果を検証する。

### 3. 研究の方法

(1) レジームスイッチングモデルに対しては、多変量自己回帰モデルに外生的な説明変数を加えた枠組みで、定数項、回帰係数行列、誤差共分散行列がレジームスイッチするかどうかを個別に選択できるモデルを構築した。さらに、EM(Expectation-Maximization)アルゴリズムでパラメータ推定を行うライブラリを開発した。レジームスイッチモデルでは、パラメータ推定の不安定性が問題となることが多いため、初期値をランダム選択する方法を工夫し、シミュレーションデータと実データを用いた検証で推定性能を確認している。

(2) 金融市場において、株式のリスクとリターンや金利などが、レジームスイッチングモデルにしたがって時間的に変動する環境を考える。個人や機関投資家は、投資に係るリ

スクとリターンを測定した上で、各自のリスク選好に適合したリスクとリターンを達成するための投資や消費の戦略を考える。本研究では、まず先行研究で標準的に利用されている効用関数に対して投資家の効用最大化を無限期間の動的最適化の枠組みで定式化した。次に、最適戦略を求めるためのベルマン方程式を導出し、自由境界問題の解を求めることで、最適戦略を導出した。先行研究と大きく異なるのは、レジームスイッチを導入したことでベルマン方程式が連立方程式となり、解析解が得られない点である。この問題に対しては、鍵となる1つの未知係数を数値的に計算すれば、残りの未知係数は解析的に求められることを証明することで対応した。

(3) 実証分析として、いくつかの金融市場関連データに対して(1)あるいは(2)の方法を中心に他の手法も組み合わせ分析を行い、有効性を検証した。検証における評価のポイントは、(1)については極値的な共変動モデルに対するパラメータ推定の安定性や推定結果の妥当性、(2)については、レジームスイッチの推定結果と導出された最適な投資や消費行動の関連性の解釈、および最適な投資や消費行動によるリスク管理の効果などである。

### 4. 研究成果

(1) 個人が保有資産を投資や消費に配分する意思決定問題において、投資や金利などの金融市場環境が同時に変動することが意思決定に与える影響を、レジームスイッチングモデルを利用して分析した。

主な問題設定は以下のとおりである。

- ① 対象資産はリスク資産と無リスク資産の2種類
- ② 無リスク資産の借入金利が預金金利よりも高い非対称金利
- ③ 効用は消費と社会資産に対する保有資産比率それぞれのべき乗関数の積で、無限期間の累積割引効用の期待値を最大化
- ④ 危険資産のリスクとリターン、借入と貸出の金利の各パラメータが2つのレジーム間のスイッチに応じて変化

この問題設定に対して、各時点での最適な消費率、危険資産と安全資産への投資額を準解析的に導出した。さらに、数値シミュレーションや実データを用いた推定によって、市場環境が個人の資産選択に及ぼす影響を分析した。

分析から得られた主な結果は以下のとおりである。

- ① 観察される消費-資産比率は、長期的にはトレンドの周りを推移しているものの、株式市場と連動して大きく乖離する時期が発生している。
- ② 最適な消費-資産比率は予想される将来のレジームやレジームスイッチの発生頻

度を反映して選択される。

- ③ レジームスイッチの発生頻度が少ない状況では、レジーム間の消費-資産比率の差が拡大する。
- ④ 借入金利と預金金利のスプレッドが小さい状況や、保有資産の対社会資産比から得られる効用が大きい状況では、レジーム間の消費-資産比率の差が拡大する。
- ⑤ リスク資産への投資比率は、現在のレジームのみに依存して決まる。

個人が保有資産を投資や消費に配分する意思決定問題については多くの研究が行われているが、理論的に導かれた合理的な配分と現実の配分データとの間に乖離が生じる「パズル」については、未だに決定的な説明が得られていない。本分析結果は、株式市場の好況と不況の頻度低下や、リスク資産におけるリスクの増加やリターンの減少が、消費-資産比率を不安定化させることを示唆しており、これまで指摘されてきたパズルに対して一定の説明を与えている。また、本分析のモデルは、借入金利が預金金利より高い非対称金利、保有資産の対社会資産比を効用関数に含む、すべてのモデルパラメータがレジームスイッチする、という点で従来個別に分析されてきた要素を含む包括的なモデルであり、その下での最適意思決定を解析的に明らかにした意義は大きい。

(2) 株式市場では、リスクとリターン以外に取引コストも状況に応じて大きく変化することが指摘されている。本研究では、市場においてリスクが高まった状況では取引コストも高騰するという観察事象をモデルに取り込み、ファクターモデルによる最適投資戦略を分析した。

主な問題設定は以下のとおりである。

- ① 株式市場におけるファクターは、1次の多変量自己回帰モデルにしたがう。
- ② 投資対象資産の収益率は、ファクターとローディング行列の積に誤差項を加えた形で与えられる。
- ③ 取引コストは、取引量と取引コスト行列の2次形式で与えられる。
- ④ 目的関数は、平均-分散の効用関数から取引コストを引いた値の期待割引現在価値で、無限期間問題に対する動的最適化を考える。
- ⑤ 投資家のリスク回避係数も含めて、モデルに含まれるすべてのパラメータはレジームの推移に伴って変化する。

取引コストについては、金融危機のようにリスクが非常に高まった市場環境では、流動性の枯渇でコストが上昇することを考慮して2次形式とした。

レジームスイッチを導入することで、ベルマン方程式が連立方程式となるため解析は難しくなるが、リカッチ型の行列方程式の解を数値的に求めれば、他の未知係数行列は解析的に求められることを証明した。その上で、

株式市場データを用いて投資戦略の有効性を検証した。ファクターはHMLとSMBの2ファクター、投資対象資産は6種類、またレジーム数は2とした。

実証分析で得られた主な結果は以下の通りである。

- ① 推定されたレジームは、低リスク・正のリターンと高リスク・負のリターンに明確に分離され、金融市場におけるいわゆるベアレジームとブルレジームとして解釈できる。
- ② 推定されたベアレジームの平滑化確率(図1、横軸は年)は、リーマンショック後と欧州危機時に低下しており、金融市場の動向と整合的である。
- ③ 投資戦略のパフォーマンスを、レジームシフトを考慮しないモデルと比較した結果、パラメータ推定に使用した2012年までのイン・サンプルでの分析と、2013年以降のアウト・オブ・サンプルの分析のいずれにおいても、2レジームモデルの方が高かった。

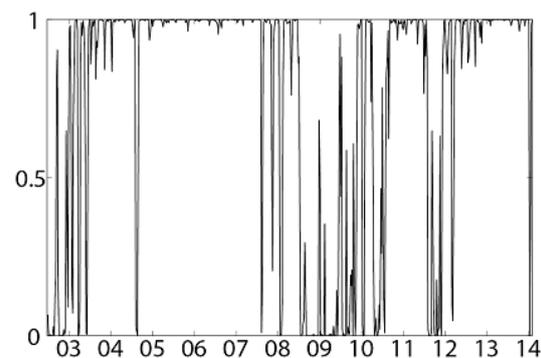


図1：推定されたベアレジームの平滑化確率

上記の結果から、リスクとリターンに加えて、取引コストも極值的に共変動する状況に対しても、レジームシフトによるモデル化が有効に機能することが確認できた。これらの知見は、単にレジームを考慮しない先行研究の結果を拡張したという理論的成果に留まらず、金融市場の変動を表現する上でレジームスイッチの導入が本質的に有用であることを示すものと考えられる。

(3) 不動産の競売では、入札が集中して落札価格が高騰する物件が一部に存在する。このように、入札者数と落札価格の2変数が同時に平均水準を大きく超過する事象に着目し、落札価格の推定モデルを構築した上で、競売データで有効性を確認した。

落札価格は入札価格の最高値なので、入札者数が十分多ければ、入札者数と落札価格分布の間には、極値理論にもとづく関係式が漸近的に成立する。一方、不動産競売に関する先行研究では、面積や駅距離などの物件属性が落札価格に影響することが指摘されている。そのため、最低入札価格の目安として事前に公表される売却基準価格で落札価格を除し

て基準化した値（落札価格比）を用いて、入札者数との関係を分析した。

分析対象は、2009年4月～2012年3月に実施された東京23区内の中古マンションの競売データで、データ数は売却基準価格が低い物件と入札者数が少ない物件を除いた2310件である。物件属性は13種類、説明変数はダミー変数を含めて最大で40個である。説明変数の個数が多いため、内容によってグルーピングし、モデルで使用するかしないかはグループごとに選択した。また、先行研究で利用されている重回帰モデルによる分析も行い、比較対象とした。推定精度を比較する尺度は、落札確率に対するPPプロットの平均絶対偏差(AAD)と最大絶対偏差(MAD)である。

分析から得られた主な結果は以下の通りである。

- ① 極値理論にもとづくモデル(極値モデル)は、説明変数として物件属性を使用しないモデルでも、AADが1.5%、MADが2.5%程度と小さく、十分な推定精度を有する。一方、物件属性を説明変数として加えても説明力の向上は限定的である。図2に極値モデルに対するPPプロットの一例を示す。横軸が理論値、縦軸がデータを示しており45度線とよく適合していることがわかる。
- ② 重回帰モデルではかなりの説明変数が有意となり、情報量基準等で変数選択を行っても10～20個の物件属性が選択される。この場合の推定精度は、極値モデルと同水準である。
- ③ いずれのモデルでも、年ダミーを除くと推定精度は悪化する。データ期間がリーマンショック後の不動産市場が不安定な時期であることから、年によって物件属性や入札者数が落札価格に与える影響が異なることが一因と考えられる。

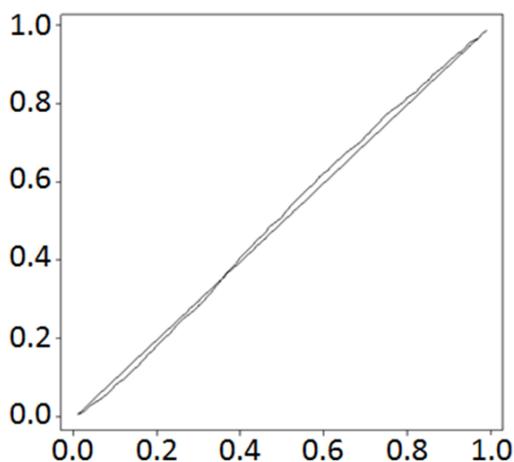


図2：極値モデルに対するPPプロット

以上の結果から、従来の重回帰モデルに比べて、極値モデルでは物件属性を用いなくても落札価格を高精度で推定できることが確認

できた。このことは、物件属性が落札価格に及ぼす影響が、売却基準価格に集約されると考えることもできる。不動産競売データに対して極値理論を適用した研究はほとんど行われていないが、今回の分析で有用性が確認できたことから、今後はさらにデータ範囲を広げた検証が有用と思われる。

(4) 取引レベルで金融市場のミクロな変動を観察すると、さまざまな変数が連動しながら複雑に推移している状況が観察される。本分析では、取引注文の板情報を利用して注文価格と注文量の関連性を分析した。

分析対象データは、東京証券取引所一部上場銘柄のうち、4つの規模区分ごとに1日当たりの平均売買金額の上位5銘柄(計20銘柄)である。板情報には売り買いそれぞれ8つの価格への注文量が含まれているが、それらを集約して板の特徴を示す量として傾きを定義した。

検証した主な仮説と検証結果は以下のとおりである。

- ① アスク(ビッド)の傾きが小さくなると、ビッド(アスク)の傾きも小さくなる、という仮説に対して、スプレッドと2つの傾きからなる3変量のベクトル自己回帰モデルで分析した結果、規模区分のmidとsmallでは成り立つ比率が高かった。
- ② 最有利気配値の株数が増加(減少)すると、同じサイドの他の価格の株数も増加(減少)する、という仮説に対して、4変量のベクトル自己回帰モデルで分析した結果、この仮説が成り立つことが確認できた。これは、ある注文が類似の注文を引き起こすハーディング行動が一因と考えられる。
- ③ 最有利気配値と8番目の気配値の価格差が大きくなると、逆サイドの最有利気配値と8番目の気配値の価格差が大きくなる、という仮説に対して、4変量のベクトル自己回帰モデルを用いて検証した結果、アスクからビッドへの影響については統計的に有意な結果が得られた。

上記の結果は、価格が決まる最もミクロなレベルでの注文価格や注文量の共変動を分析したもので、マクロ的に観察される価格変動を理解する上で有用な知見を提供するものと考えられる。一方で、取引データを利用した分析は、データが膨大でさまざまなノイズを含んでいるという課題があるため、極値的な価格変動に対する理解を深めるためには、さらに仮説をブラッシュアップし、精緻な統計分析で検証していくことが引き続き必要と考えられる。

## 5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計4件)

- ① Toshio Kimura and Naoki Makimoto, Instability of wealth effect on

consumption and investment under regime switches, *Proceedings of Symposium on Stochastic Models 2014*, 査読無, pp.204-213, 2014.

- ② Toshio Kimura and Naoki Makimoto, Instability of wealth effect on consumption and investment under regime switches, *Applied Economic Time Series Analysis*, 査読無, Vol.30, pp.11-30, 2013.
- ③ 小松広明・牧本直樹, 入札者数を考慮したマンション競売市場の極値分析, 統計数理研究所共同研究レポート299 「極値理論の工学への応用(10)」, 査読無, pp.119-132, 2013.
- ④ 小松広明・牧本直樹, 極値理論を利用した中古マンション競売データの分析, 統計数理研究所共同研究レポート274 「極値理論の工学への応用(9)」, 査読無, pp.39-50, 2012.

[学会発表] (計5件)

- ① 山田雄二・牧本直樹・高嶋隆太, 気温と季節性を考慮した JEPX 時間帯価格のモデリングと予測, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2014 年春季研究発表会, 大阪大学豊中キャンパス, 2014.3.6.
- ② Toshio Kimura and Naoki Makimoto, Instability of wealth effect on consumption and investment under regime switches, 確率モデルシンポジウム, 東京理科大学森戸記念館 (東京都新宿区), 2014.1.24.
- ③ Toshio Kimura and Naoki Makimoto, Instability of wealth effect on consumption and investment under regime switches, 応用時系列研究会, 立教大学池袋キャンパス, 2013.7.6.
- ④ Hiroaki Komatsu and Naoki Makimoto, Extreme value analysis of auction data of used apartments, Annual Meeting of Extreme Value Theory and Applications, The Institute of Statistical Mathematics Cooperative Research Symposium, 統計数理研究所 (東京都立川市), 2012.7.28.
- ⑤ 小松広明・牧本直樹, 極値理論を利用した中古マンション競売データの分析, 極値理論の工学への応用, 平成 23 年度統計数理研究所共同研究集会, 統計数理研究所 (東京都立川市), 2012.1.21.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

牧本 直樹 (MAKIMOTO, Naoki)  
筑波大学・ビジネスサイエンス系・教授  
研究者番号: 90242263