様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ５ 月 ３０ 日現在

機関番号：１２１０２
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2011～2013
課題番号：２３５０００３

研究課題名（和文）近似グレブナー基底の算法と応用の研究

研究課題名（英文）Study of Algorithm and Application of Approximate Groebner Basis

研究代表者
佐々木　建昭（Sasaki, Tateaki）

筑波大学・　・名誉教授

研究者番号：８００８７４３６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,900,000円、（間接経費）　1,170,000円

研究成果の概要（和文）：近似イデアルに基づいて近似グレブナー基底の理論を構築し、部分終結式様の理論を作成して厳密用算法を浮動小数で実行する場合の不安定性を解明し、ブッフバーガー算法を安定化して近似グレブナー基底の構成算法を呈示した。
微小摂動のため多変数多項式イデアルの次元が減少した系として近似特異系を定義し、次元を元に戻す操作として近似特異系の特異化の算法を考案し、近似特異型の悪条件代数方程式系の良条件化法を与えた。線形制御理論で近似無平方分解・有効浮動小数・近似因数分解の有用性を示した。モデルに基づく開発への利用を念頭に、パラメータ係数の疎な線形方程式系の誤差低減解法と系の特徴抽出法などを提案した。

研究成果の概要（英文）：Based on a proposed "approximate ideal", we constructed a theory of approximate Groebner basis, clarified the instability of Buchberger's algorithm on floating point numbbers using a developed subresultnat-like theory, and proposed an algorithm of approximate Groebner basis by stabilizing Buchberger's algorithm.
We also proposed a concept of "approximate singular system" as a multivariate polynomial ideal whose dimension is decreased by a purturbation, and presented an algorithm which recovers the dimension. Applying this operation to algebraic systems of approximately singular type, we proposed a well-conditioning method for such systems. Furthermore, we proposed an error suppressing method and a characteristics extracting method for solving parametric sparse linear systems.

研究分野：情報学

科研費の分科・細目：情報学基礎・情報学基礎理論

キーワード：アルゴリズム理論　数式処理　数値数式融合算法　近似グレブナー基底　近似特異系と特異化　悪条件連立代数方程式　パラメータ係数線形方程式系　疎な線形方程式系

１．研究開始当初の背景

計算代数の基本的演算のうち、最大公約子計算、無平方分解、因数分解、合成演算等の近似化では、1990 年代に本研究代表者らにより先駆け的算法が呈示され、現在も算法の改良・高速化が活発に行われている。しかしながら、多変数多項式系に対する算法であるグレブナー基底の近似化では、世界の多くの著名研究者が挑戦したが失敗し、定義さえ定かでない状況だった。その中で、本研究グループは浮動小数係数のグレブナー基底計算が不安定な理由を明らかにし、安定化させる幾つかの技法を考案・テストして、発表してきた。近似グレブナー基底の理論建設と算法開発は正に機が熟していた。

一方、厳密グレブナー基底では、算法の改良と高速化が着々と進み応用の道も次々開けていたが、浮動小数係数の数式に対して全く無力であった。この状況を打開する近似グレブナー基底の理論建設と算法開発は、野心的な研究者の挑戦心を刺激する大きなテーマだったのである。

２．研究の目的

題目のとおり、目的は大別して二つある。第一の近似グレブナー基底の理論建設と算法開発に関しては目的は明白で、『背景』欄に述べたように、前年度までにかなり進展させていた研究を完成させるだけである。

一方、第二の目的である応用研究に関しては、以前から目的としながら算法開発に時間をとられ、見るべき成果はなかった。しかも、提案した近似グレブナー基底の算法は未だ安定性が不十分なので、近似代数の応用をまず推進することにした。現在のところ応用の方向は二つあり、第一の方向は Hensel 級数の実際的応用で、第二の方向は近似代数演算の工学・産業的応用である。これらにより、近似代数の工学・産業分野における有用性を是非とも示したい。

３．研究の方法

(1) 近似グレブナー基底の理論建設と算法開発に関して

安定な算法を開発するだけでなく、不安定性の原因を根底に溯って解明するとともに、近似グレブナー基底の理論をイデアル論に立脚して建設することを目指した。不安定性に関しては、１変数の場合には Sylvester 行列を拡張した部分終結式理論で議論できる。であれば部分終結式理論を多変数に拡張することが常道だが、これは 1980 年代に著名な研究者らが挑戦して、Buchberger 算法で計算される多項式には部分終結式が存在しないと結論づけていた。一方、本研究代表者は以前、多変数多項式系の多重多項式剰余列算法を呈示し、そこで部分終結式様の行列式理論を建設した。その理論の構成法を真似て行列式理論を建設しようと考えた。

イデアル論に基づいて近似グレブナー基底の理論を構築するには、イデアル自体を近似化する必要がある。近似イデアルに関しては 2007～2009 年度の科研費研究で定義済みである。近似イデアルに基づけば、近似グレブナー基底の理論建設は一直線である。

(2) 近似代数の応用に関して

応用研究は簡単そうだが実はそうではない。計算代数と近似代数以外の知識を必要とするからである。Hensel 級数とは、３変数以上の多項式の根として定まる多変数代数関数を特異点(critical point)で級数展開したもので、1990 年代に本研究代表者らが考案・発展させてきたものである。それの応用課題では、多変数代数関数が出現し特異点が重要な役割を果すことが必要である。応用で重要な線形制御理論では、制御行列の固有値として代数関数が現れる。そこで、過酷事故時の航空機の制御を考えた：過酷事故時なら特異点が重要な役割を果すだろうと予想したのである。また、産業分野の知人から『モデルに基づく開発』には多くの課題があると教わり、その分野に挑戦してみることにした。

４．研究成果

(1) 近似グレブナー基底の理論建設と算法開発

Buchberger 算法で出現する多項式の行列式表現として、部分終結式を単純に拡張しても駄目で、列を付け加えたり削除したり、時には余分に行を付け加えることも必要になる。どのように列や行を付け加えればよいかは多重多項式剰余列理論で開発済みの逆消去と命名した方法が教えてくれる。その方法を利用して部分終結式様の複雑な理論構築に成功した。これにより、厳密計算用の算法を浮動小数で計算する際の桁落ちが余すところなく解明できた（論文①）。

一方、近似イデアルに関しては、イデアルの生成元である多項式間に許容度 e の近似線形従属関係が存在すれば、どんなに巧妙に計算しても 1/e の大きさの桁落ちが発生する。すなわち、この桁落ちは本質的なものであり、本質的桁落ちがある場合には有効桁の範囲内でのみ多項式は意味を持ち、有効桁を失った多項式は棄却するべきである。このことは浮動小数係数の多項式に対して従来のイデアル概念を修正する必要があることを示すとともに、近似イデアルをどう定義するかも示唆する。この事実と矛盾しないように近似イデアルを定義することは難しいことではない。この定義に基づいて、ブッフバーガー算法を下敷きに、本質的桁落ち以外の桁落ちは完全に除去可能との前提で、近似グレブナー基底算法を構築した（論文⑥）。

現実には、これまでに提案した誤差低減法は完全というには程遠く、現在の算法は規模が大きい多項式系に対しては誤差が積もって破綻する場合が多い。まだまだ算法の改良が必要である。

(2) 近似特異系の概念導入と近似特異系の特異化

近似グレブナー基底が厳密グレブナー基底と大きく異なってくるのは生成元間に近似線形従属関係がある場合である。その場合、近似線形従属関係が（浮動小数の精度内で）正確な線形従属関係になるように、生成元の係数を微小変動させる演算が考えられる。これを「近似特異系の特異化」と命名したが、それは一個の多項式の近似因数分解を多項式系に拡張した演算とみなせる。特異化を行えば一般にイデアルの次元は増加する。
正確な線形従属関係とはシジジー(syzygy)に他ならず、シジジーの計算法は確立している。それを近似化すれば近似シジジーが計算できる。シジジーは与多項式と余因子の積の和であり、近似シジシーとはその和が小さいことである。そこで、与多項式と余因子のそれぞれの数係数を微小変動させて、微小項の積を高次項として棄却すれば、未定微小項に関する線形方程式系が得られ、変動微小項が逐次近似で計算できる。これが特異化の算法である（論文④)。

(3) 近似特異型の悪条件連立代数方程式の良条件化

本研究代表者は 1991 年、二つあるいは三つの多項式が近似公約子を持つ代数方程式系は悪条件であることを示し、近似公約子を用いて系を良条件化する方法を考案した。一般化には近似グレブナー基底が必要だろうと思ったが当時は手が出なかった。今回はまず、近似グレブナー基底の観点から悪条件代数方程式系を、a)近接解型、b)微小主項型、c)近似特異型、d)その他の型に分類した。近接解型は近接解を持つ方程式系で、多くの研究者が研究してきた。微小主項型はグレブナー基底の計算途中に（初期でもよい）微小主項の多項式が出現するもので、微小主項を０に近づけると解の一つは無限大になる。近似特異型とは与えられた系が近似特異な場合である。その他の場合とは Wilkinson 型などの場合である。悪条件代数方程式系の分類は今まで行われたことはなく、この分類だけでも注目すべき成果だと思う。
近似特異型の代数方程式系の良条件化は、近似特異系の特異化の観点からは簡単に理論化できる：与多項式系が持つ近似シジジーを求め、与多項式の一つを近似シジジーの右辺の微小摂動多項式で置き換える；独立な近似シジジーが二つ以上ある場合には、その個数分だけ与多項式を置き換える。こうして得られた方程式系が実際に数値的に安定して解けることを計算機実験で確認した（論文⑤)。

(4) 近似代数の産業計算における有用性

研究方法欄に述べたように、Hensel 級数の工学的応用のために航空機工学を勉強し、航空機の線形制御モデルを自作して、係数行列の特性多項式を計算した。特性多項式は多数の機体定数と飛行制御パラメータを変量とする変数 X の多変数多項式であるが、機体定数に標準的旅客機のそれを代入して、迎え角 a、左右エンジンの合計推力 T、フラップ伸長度 f、をパラメータとする多項式 F(X,a,T,f)に簡単化した。X が多重根を持つ点、すなわち F と dF/dX の共通根が特異点である。
今の場合、特異点はパラメータ空間で次元２の代数的多様体をなすが、三つのパラメータの原点近傍で X=0 が特異点になるようにパラメータを決めることにした。すると、F(X,0)は原点近傍に多重近接根を持つはずだから、F(X,0)の近似無平方分解で多重近接根の状況が解るはずである。実際に計算すると、４個の近接根を含む大きなクラスタの中に、３個の近接根からなる小さなクラスタがありその中に２個の近接根を持つ非常に小さいクラスタがあることが分った。近似無平方分解は簡単だが、近接根の個数と近似重心のみならず、クラスタの大きさも教えてくれる優れものである。これらの情報を用いて特異点を逐次的に計算できる（論文③)。
工学・産業計算では、理論では定数やパラメータが記号で表されるので気が付かないが、それらに現実の数値を代入すると大きさが非常に異なる係数が混在することが頻繁である。コンピュータに計算させる場合には、小さくても有意な項は残し大きくても無意な項は棄却する必要がある。しかし、計算を進めるとこれらの項が入り混じるので、人間でも有意項と無意項の選択は至難の技である。この選択を自動的かつ効果的に行うために、本研究グループは有効浮動小数(effective floats)を考案し国産数式処理システム GAL に装備してきた。入力多項式の各数係数を有効浮動小数（通常、相対誤差をマシンイプシロンに初期設定する）に変換しておけば、有効浮動小数は計算中に発生する桁落ちを検出して桁落ち誤差を記憶し（丸め誤差は無視する)、しかも有効桁が全て失われた場合にはその係数を０にしてくれる。今の場合、与多項式を Hensel 構成で特異因子と非特異因子に分離するのだが、その計算は両因子が互いに近接根を持つ場合には桁落ちが発生することが分っている。その計算を通常の浮動小数と有効浮動小数の二通りで計算したところ、計算は前者では大きく崩れたが後者では何ら問題なく計算できた（論文③)。
Hensel 級数の計算は、Newton 多項式と命名した多変数多項式の根を求めて１次因子の積に分解し、その因子を元に拡張 Hensel 構成を行う。根が求まらない場合には根を記号で表し、定義多項式を用いた計算を行うが、Newton 多項式が因数分解できればその因子を元に与多項式を分解しておくことで計算が非常に楽になる。今の場合、２次の特異点と３次の特異点があり、いずれも Newton 多項式は浮動小数係数の３変数多項式である。GAL の近似因数分解コマンドを適用してみたところ、両者とも許容度 10^{-12}程度で見事

に近似因数分解できた（論文③）。
なお、計算された Hensel 級数は今の場合、固有値の微細構造を表しており、残念ながら過酷事故時の航空機制御には使えなかった。Hensel 級数は展開点で無限大になる場合もあるので、今後も応用を追及する。

(5) 疎なパラメータ係数線形方程式系の応用志向解法

このテーマは近似グレブナー基底とは無関係で、近似代数の初歩的応用である。
1970 年代から、電子回路設計では抵抗やコンデンサ容量をパラメータで表し、回路全体を電流や電圧に関する微分方程式系で表した上で、系を数値シミュレーションすることにより回路の働きを調べて、パラメータの最適値を決める方法が発展してきた。近年はこの設計手法が自動車産業その他に広がるとともに、扱う系が大きくなり、パラメータ解析（依存性の高いパラメータ間の関係抽出や誤差解析など）を数式モデルで行いたいとの要求が強くなっている。計算代数と近似代数の出番である。本研究では手始めに次の二つのテーマに着手した。① パラメータ入りの疎な線形方程式系の誤差低減解法、② 疎なパラメータ入り線形方程式系の特徴抽出法と解の簡潔な表現法。なお、研究は緒についたばかりで今後の進展が必要である。
① に関する成果。方程式系を行列表現するとき、数値行を上に、記号行を下に集めて、数値行からピボットを選んで行列全体をピボッティング付きジョルダン法で消去する。残った記号行からクラメール行列式を小行列式展開して解を計算する。後段は次の理由による。以前、浮動小数係数の記号行列式の計算を、ガウス消去法、その効率化版、小行列式展開法で比較したところ、誤差の小ささでも計算効率でも小行列式展開法がベストだった。この解法では、前段と後段をつなぐ解公式が必要であり、その公式を導出した。さらに、ピボッティング法がうまく使えない場合に備えて、微小ピボットにソルバーパラメータを乗じる形の誤差低減法を考案した（論文②）。
② に関する成果。疎な数値係数線形方程式系の場合、係数行列をブロック三角化するのが常道である。この方法はパラメータ係数の場合でももちろん有用だが、それだけでは不十分である。疎な線形方程式系の場合、系を有向グラフに変換し、グラフの強連結成分としてブロック三角化の各ブロックが決定される。強連結成分は強連結部分グラフのうち極大のものであり、内部に強連結部分グラフを多く含むのが普通である。グラフが強連結ならば対応する線形方程式系は過剰決定系でも過少決定系でもなく、パラメータが特別な数値でない限り、一意に解ける。そこで、強連結部分グラフを方程式系の解法の観点から選び出し、小規模系から大規模系へと順に解くことにより、部分式を系統的にソルバーパラメータで置き換えて有理式解を簡潔に表し、かつ系の特徴抽出も行う方法を呈示した（論文投稿中）。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　7 件）

① Tateaki Sasaki. A Subresultant-like Theory of Buchberger's Procedure.　査読有 Japan J. Indust. Appl. Math. 31, 2014, 137-164. DOI 10.1007/s13160-0133-1.
② Tateaki Sasaki and Tetsu Yamaguchi. On Algebraic Preprocessing of Floating point DAEs for Numerical Model Simulation. 査読有 SYNASC 2013, IEEE Computer Society, 2014, 81-88. ISBN 13: 978-1-4799-3035-7.
③ Tateaki Sasaki, Daiju Inaba and Fujio Kako. Towards Industrial Application of Approximate Computer Algebra. 査読有 LNCS 3186: Computer Algebra in Scientific Computing, Springer, 2013, 315-330. DOI 10.1007/978-3-319-02297-0.
④ Tateaki Sasaki. Proposal of Singularization of Approximately Singular Polynomial Systems. 査読有 SYNASC 2012, IEEE Computer Society, 2013, 45-52. DOI 10.1109/SYNASC.2012.28.
⑤ Tateaki Sasaki, Daiju Inaba and Fujio Kako. Approximately Singular Systems and Ill-conditioned Polynomial Systems. 査読有 LNCS 7442: Computer Algebra in Scientific Computing, 2012, 308-320. DOI 10.1007/978-3-642-32973-9.
⑥ Tateaki Sasaki. A Theory and an Algorithm of Approximate Groebner Basis. 査読有 SYNASC 2011, IEEE Computer Society, 2012, 23-40. DOI 10.1109/SYNASC.2011.12.
⑦ Tateaki Sasaki and Daiju Inaba. A Study of Hensel Series in General Case. 査読有 SNC'11: Symbolic Numeric Computation, ACM, 2011, 34-43. ISBN 978-1-4503-0515-0.

〔学会発表〕（計　18 件）

① 佐々木建昭,加古富志雄,稲葉大樹．パラメータ係数線形疎方程式系の局所ブロック化による解法．Risa/Asir Conference 2014, March 3-6, 2014, 神戸市.
② 佐々木建昭, 山口哲．パラメータ入りの連立線形方程式の誤差低減法．RIMS 研究集会「数式処理とその周辺分野の研究」, Dec. 25-27, 2013, 京都市.
③ 佐々木建昭,稲葉大樹,加古富志雄．産業

計算における近似代数の有用性. RIMS 研究集会「数式処理とその周辺分野の研究」, Dec. 25-27, 2013, 京都市.

④ Tateaki Sasaki and Tetsu Yamaguchi. On Algebraic Preprocessing of Floating point DAEs for Numerical Model Simulation. 15th Int'l Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing, Sep.23-26, 2013, Timisoara, Rumania.

⑤ Tateaki Sasaki, Daiju Inaba and Fujio Kako, Towards Industrial Application of Approximate Computer Algebra. 15th Int'l Workshop on Computer Algebra in Scientific Computing, Sep.9-13, 2013, Berlin, Germany.

⑥ 佐々木建昭. 摂動で乱れた多変数多項式系の矯正. 第４２回数値解析シンポジウム, June 12-14, 2013, 松山市.

⑦ 佐々木建昭,稲葉大樹,加古富志雄. 近似代数の産業応用を目指して. 第４２回数値解析シンポジウム, June 12-14, 2013, 松山市.

⑧ 佐々木建昭,稲葉大樹. Hensel級数の応用を目指して--航空機の制御を例に--. Risa/Asir Conference 2013, March 16-18, 2013, 神戸市.

⑨ 佐々木建昭,稲葉大樹. 過酷事故に陥った航空機の制御を目指して-- 多変数べき級数根の利用 --. RIMS 研究集会「数式処理 -- その研究と目指すもの」, Dec. 25-27. 2012, 京都市.

⑩ 佐々木建昭. 近似特異系の特異化-- 摂動で乱れた系の矯正 --. RIMS 研究集会「数式処理 -- その研究と目指すもの」, Dec. 25-27. 2012, 京都市.

⑪ Tateaki Sasaki. Proposal of Singularization of Approximately Singular Polynomial Systems. 14th Int'l Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing, Sep. 26-29, 2012, Timisoara, Rumania.

⑫ Tateaki Sasaki, Daiju Inaba and Fujio Kako. Approximately Singular Systems and Ill-conditioned Polynomial Systems. 14th Int'l Workshop on Computer Algebra in Scientific Computing, Sep. 3-6, 2012, Maribor, Slovenia.

⑬ 佐々木建昭,稲葉大樹. 近似特異系と悪条件連立代数方程式. 第41回数値解析シンポジウム, June 6-8, 2012, 渋川市.

⑭ 佐々木建昭,稲葉大樹. 近似特異系と悪条件連立代数方程式. Risa/Adir Conference 2011, March 25-27, 2012, 神戸市.

⑮ 佐々木建昭. 近似グレブナー基底の二つの応用. RIMS 研究集会「数式処理 -- その研究と目指すもの」, Dec. 7-9, 2011, 京都市.

⑯ Tateaki Sasaki. A Theory and an Algorithm of Approximate Groebner Basis. 13th Int'l Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing, Sep. 26-29, 2011, Timisoara, Rumania.

⑰ 佐々木建昭. 近似グレブナー基底の理論と算法. 第 40 回数値解析シンポジウム, June 21-23, 2011, 鳥羽市.

⑱ Tateaki Sasaki and Daiju Inaba. A Study of Hensel Series in General Case. 2011 Int'l workshop on Symbolic Numeric Computation, June 8-11, 2011, San Jose, USA.

〔図書〕（計　０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　０件）

○取得状況（計　０件）

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
佐々木　建昭　（SASAKI, Tateaki）
筑波大学・　・名誉教授
研究者番号：80087436

(2)研究分担者
櫻井　鉄也　（SAKURAI, Tetsuya）
筑波大学・システム情報系・教授
研究者番号：60187086

研究分担者
加古　富志雄　（KAKO, Fujio）
奈良女子大学・自然科学系・教授
研究者番号：90152610

(3)連携研究者　　なし

(4)研究協力者
稲葉　大樹　（INABA, Daiju）
日本数学検定協会