科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成２６年　６月１８日現在

機関番号：１２１０２
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2012～2013
課題番号：２４８４０００７
研究課題名（和文）確率模型に現れる相転移と臨界点近傍の解析

研究課題名（英文）Phase transition in stochastic models and its analysis near critical point

研究代表者
中島　誠（Nakashima, Makoto）

筑波大学・数理物質系・助教

研究者番号：６０６３５９０２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　1,400,000円、（間接経費）　420,000円

研究成果の概要（和文）：1次元“臨界的”ランダム環境中の分枝ランダムウォークからランダム環境中のスーパーブラウン運動と呼ばれる測度値確率過程を構成した。またこの過程はある確率熱方程式を満たすことも突き止めた。特に有限測度を初期条件として持つような確率熱方程式の解の構成に成功した。確率熱方程式の解の一意性に関して現在様々な研究がなされているが、ランダム環境中のスーパーブラウン運動が満たす確率熱方程式の非負解の弱い意味での一意性も示した。

研究成果の概要（英文）：We constructed super-Brownian motion in random environment from ``critical" branching random walks in random environment. We characterized this process as a solution to some stochastic heat equation. Moreover, we proved the weak uniquenss of non-negative solutions to the SPDE.

研究分野：数学

科研費の分科・細目：数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：確率熱方程式　一意性　測度値確率過程　ディレクティドポリマー　ランダム媒質

１．研究開始当初の背景

統計力学などの分野においては臨界現象がたびたび見られる。特にその臨界点近傍での物理現象の挙動については未知の部分が多くあり解析が求められている。本研究課題においてはランダム環境中の分枝ランダムウォークやランダム媒質中のディレクティドポリマーと呼ばれる確率模型に関する研究を行った。これらは物理現象や数理生物学においても興味の対象であり臨界点近傍でどのようなことが起こるのかを知ることは非常に重要である。

２．研究の目的

物理現象ではある種のパラメータ(温度)などを変化させることで、その系の持つ性質が大きく変わることがある。たとえば水の温度による状態変化である。このような状態(相)の変化を相転移と呼び、相が変わるパラメータを臨界点という。相転移を数学的に記述することは統計力学では目標の一つとなっている。

本研究ではすでに相転移の存在がわかっている模型の臨界点近傍における挙動を解析することを目的とする。

一つ目の確率模型としてランダム環境中の分枝ランダムウォークに関する研究を行った。分枝過程は生物の個体数の成長を確率論的に記述したものである。現在では数理生物学や原子炉内の中性子の電波などを記述するものとしても使われている。しかし天候や食糧問題は各地での個体数の増減に影響を与えていると考えられる。そのような影響を「ランダム環境」と呼ばれる設定の下で数学的に人口の増減を記述しているものがランダム環境中の分枝ランダムウォークである。分枝過程では種の絶滅に関する研究が注目されている。Galton-Watson 過程にたいしては絶滅問題は完全に解かれており一度に生まれる個体数の期待値が 1 より多ければ確率正で絶滅しない。一方でランダム環境中の分枝ランダムウォークに関してはそのような臨界値のようなものの存在すらまだわかっていない。そこで臨界点は不明のままであるがランダム環境を非常に弱めることである種の臨界点近傍での挙動を調べることにした。その手段として測度値確率過程の構成を行う。分枝ランダムウォークでは臨界点近傍での挙動を調べる道具としてスーパーブラウン運動とよばれる確率模型が構成された。そこでランダム環境中の分枝ランダムウォークに対してもスーパーブラウン運動のようなものを構成することを試みた。分枝過程は数理生物学の観点だけでなく、統計力学の様々な模型に関連するものであることを考えてもその研究を行うことに重要な意義がある。

二つ目の確率模型としてランダム媒質中のディレクティドポリマーに関する研究がある。この確率模型は溶媒中に不純物が混じった状態で高分子がどのように成長するのかを記述している。この確率模型に関して相転移の存在は以前から知られており、特に高分子の局在と非局在という相転移が起こることが知られている。この模型を研究する上で重要な物理量として自由エネルギーと呼ばれるものがある。自由エネルギーの値を見ることで臨界点近傍での挙動がわかると信じられている。そこですでに臨界点のわかっている 1 次元、2 次元の場合に関して研究を行うことにした。1 次元の場合には自由エネルギーの値は臨界点(β=0)近傍ではβ^{-4}のオーダーで減衰すると予想されており、2 次元以上では臨界点(β=0)近傍では exp(-C/β^2)で減衰すると予想されている。これらの予想が正しいということを示す。またランダム媒質中のディレクティドポリマーのみならずランダムポテンシャル中のランダムウォークなど臨界点の求まっている確率模型に関しても自由エネルギーの挙動を調べたい。

３．研究の方法

（１）ランダム環境中の分枝ランダムウォークを実数空間上の測度とみなして定義する。ランダム環境を分枝過程の臨界点へ近づくように弱めることでランダム環境中の分枝ランダムウォークの臨界点近傍での挙動について観察を行った。分枝過程における臨界点は一度の分裂で生まれる粒子数の期待値ｍが１となる点であったのでランダム環境中のモデルでは ｍ が 1+(確率変数)/n^{1/4} となるようにして臨界点に近づけた。このランダム環境のスケーリングは空間方向に関するスケーリングと中心極限定理が関係している。研究の手法としては分枝ランダムウォークからスーパーブラウン運動を構成する標準的な方法を採用した。一方でこの手法では極限として現れる過程の特徴付けが困難でな箇所があった。それを解決するために極限として現れる測度値過程のルベーグ測度に関する絶対連続性を証明した。これにより測度の密度関数過程を得られ、それを使って極限過程の特徴づけを行った。絶対連続性を示す方法としてはスーパーブラウン運動の絶対連続性の証明に使われた手法を採用した。この極限過程はあるマルチンゲール問題の解として特徴付けられることを上の方法で示したが解の一意性を示す必要がある。マルチンゲール問題の解の一意性は確率過程の分布の一意性を示す必要があるのですべての解に関してラプラス変換が一致するということを使って証明する手法を採用した。ラプラス変換が一致することを確かめるために指数双対過程と呼ばれる過程を構成する手法がある。今回の確率過程に関しては指数双対過程はある非線形なドリフト項をもつ確率熱方程式の解になるはずであると

いう予測の下で、まずそのような解が存在することを証明した。証明の手法として Dawson-Girsanov 変換と呼ばれる確率測度の変換を使って線形確率熱方程式から指数双対過程の満たす局所マルチンゲール問題の解を構成することにした。また局所マルチンゲール問題の解がマルチンゲール問題の解であることを示した。最後に実際にこのように構成したものが指数双対過程になっていることを確かめる必要があるがそれぞれの解が二階微分可能でないために困難さを含んでいた。その困難さは確率過程に軟化子を付けることにより解消され一意性が証明された。

（2）ランダム媒質中のディレクティドポリマーの研究では自由エネルギーの高温度での挙動に関して上からの評価を与えた。その手法は以下のようになる。まず分配関数の分散が緊密になるように逆温度βを時刻ｎに関してスケールをとる。このようなスケールを取ることで自由エネルギーの挙動に関する予想を立てた。次に分配関数を雑に分割することで上からの評価を与えた。そのような分割それぞれに対し測度の変換を使うことで上からの評価を与えた。測度の変換に関して特に工夫した点としては今まで媒質を２つ掛けて考えられていたものを複数個掛け合わせることで変換がより強い評価を与えられるようにしたことが挙げられる。特に既存の証明で不明瞭な構成であったところに重要な意味づけをしたことは今後の研究に影響を与えると考えている。

４．研究成果

（1） ランダム環境中の分枝ランダムウォークとはここでは離散時間離散場所に依存して個体が分裂する確率（生成分布と呼ぶことにする）がランダムに変わるような確率過程を言うことにする。

分枝過程は分裂した際に生じる個体の数の期待値が１であるとき臨界的である。ランダム環境中の分枝ランダムウォークでも臨界点が存在すると期待されているがまだその存在は確認されていない。そこで分裂して生じる個体数の期待値(平均個体数)が漸近的に１になるような生成分布の下で解析を行うことにした。

空間次元として１次元のものに関して研究を行った。解析の一つの方法としてスーパーブラウン運動を構成することを目標とした。そのためにはどのような速さで平均個体数が１へ近づけるかを決めるかを知る必要があるがこれには１次元ディレクティドポリマーに関する研究を参考にした結果、時刻ｎまで考える際には１＋ζ*n^{-1/4}が良いことがわかった。この 1/4 は非常に雑に言えばある中心極限定理が成り立つために適当な指数である。

このような設定の下で測度値確率過程の構成を試み、成功した。これをランダム環境中のスーパーブラウン運動と呼ぶことにする。このランダム環境中のスーパーブラウン運動はスーパーブラウン運動とは実際に異なるものであることを確認しその特徴づけを行った。

ランダム環境中のスーパーブラウン運動はあるマルチンゲール問題の解として特徴付けられた。別の表現ではある１次元確率熱方程式の非負解として特徴付けられた。その特徴としては以下の点がこれまでの研究とは異なる点であることを強調しておく。

① 初期条件として有限測度までを仮定してよい。
② 有限測度から出発するが少しでも時間がたつと過程はルベーグ測度に関して絶対連続になる。
③ 密度関数を使わなければマルチンゲール問題を記述できない。

①、②はスーパーブラウン運動に関しても同様のことが言えるが③の性質を持つ例は今回初めて構成されたといってよいと考えている。

次にこのようなマルチンゲール問題の解に関して一意性について研究を行った。一意性を示すことで特徴付けが完了する。

手法としては測度値確率過程に関するマルチンゲール問題の解の一意性を示す際に使われる双対過程の手法を使った。しかしスーパーブラウン運動の場合は双対過程は非線形熱方程式でありその解の存在などはよく知られていた。一方で今回構成したランダム環境中のスーパーブラウン運動の双対過程は非線形確率熱方程式の非負解であることが判明した。そこでまずそのような解の構成を試みた。構成の手法としては Dawson-Girsanov 変換と呼ばれる確率測度の変換を用いた。ここで注意しておくこととして Dawson-Girsanov 変換は今まで測度値確率過程が密度を持つような例に関して扱っていなかったが、構成の際には扱う必要があったので言及したことを挙げておく。

双対過程の候補の構成したのちは実際に双対過程であることを証明した。この証明には L.Mytnik による手法を用いた。

このようにしてランダム環境中のスーパーブラウン運動が構成できた。またこの測度値確率過程は Mytnik がその論文「Superprocesses in random environment」で扱えなかったものとして挙げていたものを実際に構成したことを強調しておく。

今後はランダム環境中のスーパーブラウン運動を使って漸近的に臨界的なランダム環境中の分枝ランダムウォークの解析を行うことを目標としている。一つの手法としてはスネーク表現と呼ばれる表現をランダム環境中のスーパーブラウン運動に対して与えることを考えている。この表現を与えることで一つの粒子から出発したランダム環境中の分枝ランダムウォークをとらえること

ができると考えている。

（２）空間次元が２次元以上の場合のランダム環境中の分枝ランダムウォークに関して同様に測度値確率過程が構成できるのかを考察した。
その結果、2 次元以上の場合には測度値確率過程が構成できないことがわかった。ここでいう構成できないとは過程として右連続であるものは存在しないということである。これは実際にその極限として考えられる測度の全測度の２次変動を考えると右連続でないことを示すことで判明した。よって２次以上の場合には別の手法を考える必要があるが、非常に興味深い対象である。

（3）1、2 次元ランダム媒質中のディレクティドポリマーの自由エネルギーの臨界点近傍での挙動の考察を行った。ランダム媒質中のディレクティドポリマーでは逆温度（β）の値でポリマーの挙動が大きく異なることが知られている。その挙動の変化は自由エネルギー（p(β)）の値(=0 または<0)によって変わるということが物理や統計力学の分野で信じられている。

ランダム媒質中のディレクティドポリマーでは空間次元が 1, 2 次元の場合にはβ≠０で p(β)<0 であることが知られている(臨界点β0=0)。一方で３次元以上の場合にはβ0>0 であることも知られている。

研究ではβを０へ近づけたときに p(β)の値がどのような挙動をするのかを研究した。1次元の場合に関してはLacoinがすでに示している以上の結果は得られなかった。一方で 2 次元の場合はある程度の進展があった。Lacoin による先行結果では log (-p(β))は下から-β^{-2}、上からβ^{-4}のオーダーで抑えられること示された。

この結果を改良し log (-p(β))は上から-β^{-2-ε}のオーダーで抑えられることを示した。これにより-β^{-2}のオーダーで発散することが期待できる。

今後の研究方針としては上で述べた手法を改良することで、より良いオーダーを与えることを目標とする。そのためのアイデアは一つすでに持っており今後はそのアイデアを専門家と議論しながら発展させていく。

また別の今後の研究方針としてはここで考えた手法を３次元以上の場合に適用することを考えている。3 次元以上の場合には相転移が２つ考えられる。それは媒質の摂動の弱い相、強い相、非常に強い相である。これらの相に関連して臨界値β_1,β_2 が存在する。現時点ではβ_1,β_2 に関して一致するのかどうかの判定はなされていないが上で得られた手法を適用することでβ_1=β_2 が言えると考えている。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　０　件）

〔学会発表〕（計　7　件）
（1）　中島誠 「ランダム環境中の分枝ランダムウォークと双対過程」 新潟確率論ワークショップ, 2013 年 12 月 5 日 新潟大学
（2）　中島誠 「Branching random walks in random environment」 2013 年度日本数学会秋季分科会, 2013 年 9 月 24 日 愛媛大学
（3）　中島誠「Branching random walks in random environment and super-Brownian motion in random environment」 Applications of RG methods in Mathematical Sciences, 2013 年 9 月 11 日 数理解析研究所(京都大学)
（4）　中島誠 「Super-Brownian motion in random environment arising from branching random walks in random environment」 The 2nd workshop on Universality and Scaling Limits in Probability and Statistical Mechanics, 2013 年 8 月 6 日 北海道大学
（5）　中島誠 「ランダム環境中のスーパーブラウン運動」,2013 年度日本数学会年会 2013 年 3 月 20 日 京都大学
（6）　中島誠 「ランダム環境中の分枝ランダムウォークと測度値確率過程」，確率論シンポジウム､2012 年 12 月 20 日 京都大学
（7）　中島誠 「Super-Brownian motion in random environment and heat equation with noise」, Stochastic Analysis and Applications, 2012 年 9 月 28 日、岡山大学

〔図書〕（計　1　件）
（1）　渡辺信三、重川一郎（他、中島誠）丸善出版、確率論ハンドブック、2012 年、pp422～423

〔産業財産権〕
○出願状況（計　0　件）

○取得状況（計　0　件）

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
中島　誠（NAKASHIMA, Makoto）
筑波大学・数理物質系・助教

研究者番号：60635902

(2)研究分担者：なし

(3)連携研究者：なし