

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 20 日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2010～2013

課題番号：22340002

研究課題名(和文)有限型頂点作用素代数の構成と研究

研究課題名(英文)Research and Construction of Vertex Operator Algebras of finite type

研究代表者

宮本 雅彦(MIYAMOTO, MASAHIKO)

筑波大学・数理物質系・教授

研究者番号：30125356

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 12,500,000円、(間接経費) 3,750,000円

研究成果の概要(和文)：頂点作用素代数の大きな問題の一つが有限型の頂点作用素代数を構成することである。有限型を構成すると予想されている方法に自己同型を使ったオービフォルド理論があるが、位数2の場合を除いてほとんど理解されていなかった。本研究では、任意の有限位数の自己同型に対する軌道理論において、当初の最終目標であったC2有限性の保全を証明した。これにより、C2有限性を満たすホロモルフィック頂点作用素代数からの軌道理論構成は、ウエイトの問題と、フュージョン規則を計算するという実際的な問題へと帰着した。応用として、複数の研究者によって新しいホロモルフィック頂点作用素代数が構成された。

研究成果の概要(英文)：One of important problem on Conformal Field Theory (Vertex Operator Algebra) is to construct one of finite type. One of the candidates to construct one of finite type is an orbifold theory using a finite automorphism group, but it is not easy to treat. In this research, we succeed to prove the hereditary of C2-cofiniteness under the orbifold theory for a finite cyclic automorphism, which is the main purpose of this research. By this result, an orbifold construction of holomorphic vertex operator algebra becomes problems to check the weights and fusion rules. As application, several researchers succeeded to construct new holomorphic vertex operator algebra using this result.

研究分野：数学

科研費の分科・細目：代数学

キーワード：頂点作用素代数 自己同型 C2有限性 軌道理論 軌道構成 ホロモルフィック頂点作用素代数 ムー  
ンシャイン頂点作用素代数 モンスター単純群

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 頂点作用素代数 (以下VOAと書く) は、局所可換という無限個の関係式を満たさなければならないために、新しいVOAを構成するのは困難であり、良い性質を満たす例はそれほど多くない。また、物理現象を記述するVOAを構成しようとしても簡単ではない。良いVOAを構成する方法の一つとして、自己同型を使った軌道理論が有力な候補と考えられているが、その表現や融合積を調べるのが一般には難しい。

(2) 代表研究者は技巧的なものとして導入されたと考えられていたVOAのC 2余有限性という性質に注目し、モジュラー不変性、フュージョン積の存在など、その有用性を色々な面で証明してきた。特に、表現がかなり決定できることが分かった。

(3) ムーンシャインVOAに代表される非常に興味深いランク 24 のホロモルフィック頂点作用素代数の 71 個の候補者リストが与えられているが、40 個程度しか構成できておらず、ここ 30 年近く何の進展もなかった。

## 2. 研究の目的

(1) 上記の背景により、表現が有限型であるようなVOAに対して、有限位数の自己同型による軌道モデル (固定部分代数) も上記のC 2有限性を持っているのではないかと予想し、その証明を見つけることを目標とした。

(2) もし、上記の予想が正しければ、有限位数に対するorbifold model の表現が分かるので、それを利用して、新しい24次元ホロモルフィックVOAを構成することを目標とする。

## 3. 研究の方法

(1) VOA の問題で、24次元ホロモルフィックVOAが特に興味ある対象であり、有名なムーンシャインVOAもこの仲間である。この研究が開始されるまでは、知られていたものはすべて格子頂点作用素代数かまたは位数2の自己同型による軌道理論であった。それゆえ、本研究ではより広い一般の有限型VOAに対して、有限位数の自己同型による固定部分の構造を調べる。

(2) 有限型 (C2余有限性) のVOAに作用している自己同型が有限位数の場合には、その自己同型による固定部分代数を部分VOAと見て、自己同型による固有空間は、その既約加群となることが分かる。自己同型の固有値の関係は、加群間の積の関係を与える。さらに体の作用と微分作用素を含めたものを大きな係数環とみることで、VOAの持つ歪対称性と局所可換性を上記の関係式に置き換えることで、2つの元とウエイトに対してある種の関数が定義できる。この関数の性質を調べることで、固定部分代数が有限型でなければ矛盾が出てくることを証明する。

(3) 格子の内積空間に埋め込むことによって構成される、内積空間のフリーボゾン部分がC 1余有限性を持つことが確認出来たときには、格子によるルート部分同士の頂点作用素同士の積の計算を始める。特に、内積が  $-1/2$  のルート同士に着目し、C 2のカーネル部分を生み出す元を多様に構成することを目指す。

## 4. 研究成果

(1) 上記の軌道理論における有限性を証明するという目標を達成し、一般の有限型 (C 2余有限) VOAに対しては、作用している自己同型の位数が有限の場合に、C 2余有限性が遺伝することを証明した。このC 2余有限とは、表現論の立場からみて、単純加群の同型類が有限であり、しかも、すべての弱加群も既約加群による組成列を持つことと同値であり、古典的な意味で捉えていた有限型の事である。

(2) 上記の結果をC 2余有限性を持つVOAに利用することにより、その自己同型による軌道理論の表現に対してこれまで知られていた結果が適用でき、さらに、非常に強力なフェーリンゲ形式やツイスト加群など的一般理論が応用できるようになった。それらを利用して、新しいVOAが構成できる手法を得た。実際、この方法により、多くの有限位数に対して、軌道理論による新しいホロモルフィックVOAの構成に成功した。

(3) VOAとその既約加群に対して、上記で述べたC 2余有限条件と同じように定義される、C 1余有限条件と呼ばれる弱い有限性がある。この性質に関しては、一部の論文を除いて注目されていなかった。本研究においては、VOAの表現論やorbifold construction において最も重要な融合積が、この条件の下では、閉じていることを示した。それゆえ、このC 1余有限性は表現論において本質的であり、これがあれば、多くの良い性質が導き出せることを示した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3件)

(1) Masahiko Miyamoto,

A  $Z_3$ -orbifold theory of lattice vertex operator algebra and  $Z_3$ -orbifold construction, Symmetries, Integrable Systems and Representation, 査読有, Vol 364, 2012, 88-89

(2) Masahiko Miyamoto,

Non-vanishing elements in finite groups, Journal of Algebra, 査読有, Vol 364, 2012, 88-89

(3) Masahiko Miyamoto, Koichiro Harada,

A note on a conjecture of K. Harada and strongly  $p$ -embedded Frobenius subgroups, Journal of Group Theory, 査読有, Vol 13, 2010, 469-475

[学会発表] (計 7件)

(1) Masahiko Miyamoto,

$Z_2$ -orbifold theory of vertex operator algebra, Group theory, VOA and Algebraic combinatorics, 2013/3/25, 台東大学 (台湾国立中央研究院と台南大学主催) (中華民国)

(2) Masahiko Miyamoto,

$Z_3$ -orbifold construction of vertex operator algebras, Conference on vertex operator algebras, finite groups and related topics, 2011/12/21, Academia Sinica 台湾国立中央研究院 (中華民国)

(3) Masahiko Miyamoto,

$Z_3$ -orbifold construction of vertex operator algebras, Symmetries, integrable systems and representations, 2011/12/13, リオン第4大学 (フランス)

(4) Masahiko Miyamoto,

$C_2$ -cofiniteness of permutation orbifold models and orbifold models of lattice VOAs, Conformal field theories and tensor categories, 2011/6/14, Beijing International Center (中華人民共和国)

(5) Masahiko Miyamoto,

$\mathbb{Z}_3$ -orbifold construction,  
Conformal Field Theory,  
Automorphic Forms and Related  
Topics  
2011/9/19  
University of Heidelberg (ドイツ)

(6) Masahiko Miyamoto,

巡回置換軌道理論と格子頂点作用素  
代数の軌道理論との関係  
第23回有限群論草津セミナー  
2011/7/31  
草津セミナーハウス

(7) Masahiko Miyamoto,

Orbifold theory of vertex  
operator algebras,  
Research into Vertex Operator  
Algebras, Finite Groups and  
Combinatorics,  
2010/12/13  
RIMS 京都大学数理解析研究所

〔図書〕 (計 1 件)

(1) 宮本雅彦、

サイエンス社、  
数学の道しるべ、

2011 総ページ数202(84-93)

## 6. 研究組織

(1) 研究代表者

宮本 雅彦 (MIYAMOTO MASAHIKO)

筑波大学・数理物質系・教授

研究者番号： 30125356