様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月 １９ 日現在

機関番号：１２１０２
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2011～2013
課題番号：２３５４０１１９

研究課題名（和文）高次Ｃｈａｎｇ予想と飽和イデアルのモデルの構成

研究課題名（英文）Construction of models of higher Chang conjectures and saturated ideals

研究代表者
塩谷　真弘（Shioya, Masahiro）

筑波大学・数理物質系・准教授

研究者番号：３０２５１０２８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,300,000円、（間接経費）　690,000円

研究成果の概要（和文）：１．高次Chang予想の成立するモデルの構成について。Foremanは、正則非可算基数の３つ組に対するChang予想が成立するモデルを構成したが、４つ組に対するChang予想は依然未解決である。本研究では、解決への第一歩として、Foremanと同様のモデルを遥かに簡単に構成することが出来た。
２．飽和イデアルを含むモデルの構成について。Woodinは、稠密イデアルを含むモデルを構成したが、対応するブール代数は、依然未解明のままである。本研究では、解決への第一歩として、Laverによる強飽和イデアルとLaverとForemanによる中心イデアルを含むモデルを２段階反復強制法により構成した。

研究成果の概要（英文）：1. On the construction of a model in which higher Chang conjecture holds. Foreman constructed a model in which Chang conjecture holds for triples, but the case for quadruples remains open. As the first step toward the solution, we gave a much simpler construction of a model like Foreman's.
2. On the construction of a model that contains a saturated ideal. Woodin constructed a model that contains a dense ideal, but the corresponding Boolean algebra is not yet known. As the first step toward the solution, we constructed by two-step iterated forcing, a model that contains a strongly saturated ideal originally due to Laver, and that contains a centered ideal originally due to Laver and Foreman.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般

キーワード：数理論理学　公理的集合論　無限組合せ論　巨大基数　強制法　反映原理　飽和イデアル

１．研究開始当初の背景

背景その１（抽象測度論）．
1930 年 Banach は測度に関する次の問題を提起した：

Banach の測度問題．
R のすべての部分集合を可測にする可算加法的「測度」は存在するか？

Lebesgue 非可測集合の構成法から分かるように，このような「測度」は平行移動不変ではあり得ない．それ以外の「測度」の性質は全単射によって保存されるので，Banach の問題は R の濃度に関する組合せ論の問題とみなすことができる．（以下，基数を自分自身より小さな順序数の集合と同一視する．）

背景その２（モデル理論）．
非可算無限群は，自分自身とそっくりな（1 階の論理式で区別できない）可算（従って非同型な）部分群を持つ．モデル理論の古典的結果（Lowenheim-Skolem の定理）によれば，この事実は一般に可算個の演算を備えた任意の代数系に対して成り立つことが知られている．1960 年 Chang は，この事実が無限基数のペアに対しても成立するであろう，と予想した：

Chang 予想．
濃度ω_2の代数系 G とその濃度ω_1の部分集合 X が任意に与えられたとき，濃度ω_1 の部分代数系 H が存在して H と X の共通部分が可算となる．

以上 2 つの問題は，連続体仮説と同様の決定不可能命題であり，通常の集合論の公理の下では証明も反証もできない．ただし連続体仮説とは決定的に異なる点があり，その説明には巨大基数の概念が必要である．巨大基数とは，可算無限が有限に対して持つような超越性を備えた無限基数の総称である．1960 年代後半，Cohen が連続体仮説のために開発した強制法を適用することにより，以上の問題の肯定的解答が成立するモデルが相次いで構成されたが，基礎モデルは巨大基数を含んでいなければならなかった．

さらに内部モデルの理論により，巨大基数の存在が必要な仮定であることも示された．見かけからは全く想像がつかないが，Banach の問題や Chang 予想は巨大な無限集合の存在と本質的に関わっていることになり，非常に興味深い．

Banach の問題と Chang 予想はそれぞれ別個に解決されたが，Kunen はある意味で両者に統一的にアプローチする手法を開発した：

Kunen の定理．
適切な巨大基数の存在を仮定すると，強制法によりω_1 上の飽和イデアルを含むモデルを構成できる．さらにこのモデルでは，Chang 予想と連続体仮説も成立する．

Kunen の定理はその後，次のように深化発展した（それぞれ適当な巨大基数の存在を仮定する）：

定理 1 (Woodin, Foreman).
ω_1，ω_2 上の稠密イデアルを含むモデルがそれぞれ存在する．

定理 2 (Foreman).
３組に対する高次 Chang 予想が成立するモデルが存在する．

２．研究の目的

本研究の目的は，定理 1, 2 を 1 ステップ先に進めることである：

（それぞれ何らかの巨大基数の存在を仮定して）

問題 1 (Foreman).
ω_3 上の稠密イデアルを含むモデルを構成せよ．

問題 2 (Foreman).
4 組に対する高次 Chang 予想が成立するモデルを構成せよ．

３．研究の方法

1．肯定的解決を目指すアプローチ．

問題１に関しては，これまでの研究を元に次の問題にまず挑戦する：

問題(Woodin)．
巨大基数の後続基数上に稠密イデアルが存在するモデルを構成せよ．

現在のところ，稠密イデアルを含むモデルの構成はすべて Woodin の手法によっている．Woodin の問題の背景には，彼自身の手法の特殊性がある．Woodin の構成法は，途中で選択公理不成立のモデルを経由するため，最終的なモデルを与えるブール代数を明示的に定義できない．Woodin の問題は，まさに彼自身の手法が適用できない領域についてのものであり，これを解決できれば問題１への突破口となることが期待される．

一方，定理 2 のモデルを与えるブール代数は，非常に複雑なものであった．その複雑さが，その後 30 年にわたって進展を阻んでいたことは間違いない．そこで，同様のモデルをもっと簡単に構成することができれば，問題 2 も肯定的解決できることが期待される．また

4 組について適切に解決できれば，一般の n 組についても解決できるであろうと期待される．

2. 否定的解決を目指すアプローチ．

鍵となるのは，Shelah が開発した Nonstructure 理論と Pcf 理論である．

Nonstructure 理論は，モデル理論と集合論の境界領域にあって，構造定理が成立しないような 1 階理論に関する強力な一般論である．集合論自体がそうした理論の代表例であり，Nonstructure 理論は，これらの理論が多数の非同型なモデルを持つことを示す．かつて申請者はその手法を用いて，緩い条件の下でいわゆる $P_\kappa\lambda$ 上の NS イデアルが弱い飽和性すら持ち得ないことを示すことができた．モデル理論の専門家である坪井氏の協力を仰ぎながら，Nonstructure 理論のさらなる可能性を追求する．

松原氏との共同研究においては，Pcf 理論を用いる．かつて申請者は松原氏と共に，λが共終数κ未満の強極限基数のとき，$P_\kappa\lambda$上の NS イデアルが至る所で（飽和よりさらに弱い）precipitous ですらあり得ないことを示した．さらに松原氏は，Shelah との共同研究でλの共終数に関する条件を外すことに成功した．その際威力を発揮したのが Pcf 理論である．Pcf 理論の最も有名な応用例は，不等式「$P\omega_1\omega_\omega$の共終数$<\omega_4$番目の基数」である．奇しくも，この不等式と問題 2 には共に数 4 が現れる．その秘密を松原氏と共に探る

４．研究成果

問題１に関して．Laver が Kunen の方法を用いて構成した強飽和イデアルを含むモデルを Easton 崩壊の２段階反復強制法によって構成することに成功した．さらに Foreman と Laver が Kunen の方法を用いて構成した中心イデアルを含むモデルも同様の強制法の２段階反復によって構成することに成功した．
問題 2 に関して．Foreman による定理 2 のモデルと同様のものを遥かに簡単に構成することに成功した．
以上の研究成果は，まだ査読付きの専門誌には出版されていない．しかし，プレプリントを読んだ研究者が新たな展開の糸口をつかんでいる．例えば，UCI の大学院生が問題 1 に関するプレプリントから稠密イデアルのモデルに関する新たなアプローチを報告している．従って，問題の最終的な解決を与えてはいないが，これらの成果を出版する価値はあるものと思われる．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 6 件）

①塩谷真弘：The Easton collapse and a saturated filter, RIMS Kokyuroku, 1754 (2011) 108-114．査読無． URL http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/1754.html

②塩谷真弘：A model theoretic reflection principle revisited, RIMS Kokyuroku, 1851 (2013) 72-86．査読無． URL http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/1851.html

③阿部吉弘　薄葉季路：Notes on the partition property of $P_\kappa\lambda$, Arch. Math. Logic 51 (2012) 575-589．査読有． URL http://link.springer.com/article/10.1007/s00153-012-0283-x

④松原洋　薄葉季路：On skinny stationary subsets of $P_\kappa\lambda$, J. Symbolic Logic, 78 (2013) 667-680．査読有． URL http://projecteuclid.org/euclid.jsl/1368627071

⑤竹内耕太　坪井明人：On the existence of indiscernible trees, Ann. Pure Appl. Logic, 163 (2012) 1891-1902．査読有． URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168007212000978

⑥川上智宏　田中浩　竹内耕太　坪井明人：Locally o-minimal structures, J. Math. Soc. Japan, 64 (2012) 783-797．査読有． URL http://projecteuclid.org/euclid.jmsj/1343133743

〔学会発表〕（計 4 件）

①塩谷真弘：A simplified approach to saturated ideals, Reflection Principles and Set Theory of Large Cardinals, 京都大学数理解析研究所, 2013 年 9 月 9 日-12 日．

②坪井明人：Simple proof of a basic result of forking, Model Theoretic Aspects of the Notion of Independence and Dimension, 京都大学数理解析研究所, 2013 年 11 月 18 日-20 日．

③坪井明人：Real closed field as an extension of Q, 高知モデル理論研究集会, 高知工科大学, 2013 年 3 月 4 日-6 日．

④坪井明人：On small models, モデル理論夏の勉強会, 東海大学山中湖セミナーハウス, 2012 年 8 月 28 日-30 日．

６．研究組織

(1)研究代表者

塩谷 真弘 (Shioya, Masahiro)
筑波大学・数理物質系・准教授
研究者番号：30251028

(2)研究分担者
　　　　　　　　(　　　)

　研究者番号：

(3)連携研究者
阿部 吉弘 (Abe, Yoshihiro)
神奈川大学・理学部・教授
研究者番号：10159452

松原 洋 (Matsubara, Yo)
名古屋大学・情報文化学部・教授
研究者番号：30242788

坪井 明人 (Tsuboi, Akito)
筑波大学・数理物質系・教授
研究者番号：30180045