様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ５ 月 ２８ 日現在

機関番号：１２１０２
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2011～2013
課題番号：２３５４００４０

研究課題名（和文）非可換ゴレンシュタイン環の研究

研究課題名（英文）Study of noncommutative Gorenstein rings

研究代表者
星野　光男（Hoshino, Mitsuo）

筑波大学・数理物質系・講師

研究者番号：９０１８１４９５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,800,000円、（間接経費）　840,000円

研究成果の概要（和文）：先ず、ネター環上の有限生成加群に対するゴレンシュタイン次元の概念を一般化して、連接環上の有限表示加群に対して弱ゴレンシュタイン次元の概念を導入した。次に、連接環について左右の極小余生成素がともに有限の平坦次元を持つならそれらは一致することを示し、更に、左右の極小余生成素がともに有限の平坦次元を持つためにはすべての有限表示右加群が上に有界な弱ゴレンシュタイン次元を持つことが必要十分であることを示した。

研究成果の概要（英文）：First, generalizing the notion of Gorenstein dimension for finitely generated modules over Noetherian rings, we introduced the notion of weak Gorenstein dimension for finitely presented modules over coherent rings. Next, we showed that for a coherent ring, if both the minimal cogenerator for left modules and that for right modules have finite flat dimension then they coincide, and that both the minimal cogenerator for left modules and that for right modules have finite flat dimension if and only if every finitely presented right module has a bounded weak Gorenstein dimension.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：非可換ゴレンシュタイン環

１．研究開始当初の背景

（１）１９７０年代初めにアウスランダーによって提唱された両側ネター環に対する左右対称なホモロジー代数的条件（アウスランダー条件）は、可換ゴレンシュタイン環のホモロジー代数的特徴付けを与えるものである。提唱された当初はそれほど注目されなかった様であるが、１９９０年代になって、アウスランダー・ゴレンシュタイン環（左右で有限の自己移入次元を持ち、かつ、アウスランダー条件をみたす両側ネター環）上では、任意の有限生成加群が非常に良い性質を持ったフィルター付けを持ち、かつ、或るクラスの微分作用素環がアウスランダー・ゴレンシュタイン環であることが判明（ビヨルクに依る）して以来、アウスランダー・ゴレンシュタイン環の重要性が認識される様になって来た。

　アウスランダー条件というのはホモロジー代数的な性質とは必ずしも云えない面を持つ。即ち、アウスランダー条件は導来同値の下で必ずしも保存されない性質である。他方で、自己移入次元の有限性は導来同値の下で保存されることが知られている。

（２）ネター環のゴレンシュタイン性の定義には幾つかの異なるものがあるが、導来圏における双対理論との関連において捉えた場合、左右の自己移入次元の有限性をもってゴレンシュタイン性を定義するのが妥当の様である。実際、導来圏における双対理論は左右の自己移入次元の有限性の下で成り立つ理論であり、アウスランダー条件を必用としない。この観点から、左右で有限の自己移入次元を持つネター環を特徴付ける必用がある。

２．研究の目的

　アウスランダー・ゴレンシュタイン環について、基礎環を持つとの設定の下で、その基礎環上の相対ホモロジー代数的構造を解明することによって、アウスランダー・ゴレンシュタイン環を基礎環に持つアウスランダー・ゴレンシュタイン環を特徴づけるとともに、具体的な構成法を与えることを目的とする。更に、左右で有限の自己移入次元を持つネター環を特徴付けることを目的とする。

３．研究の方法

　研究代表者・連携研究者の各々が独自の立場からの研究を行い、研究代表者がそれらを統括した。

　研究代表者の星野は研究協力者の古賀との間で定期的に研究セミナーを開催し、連携研究者の西田をはじめとする関連分野の研究者のもとを適宜訪問して研究打ち合わせを綿密に行った。また、研究代表者の星野と研究協力者の古賀は国内外の研究集会に積極的に参加し、成果発表・情報収集を行うとともに、関連分野の研究者との研究討論を活発に行った。

４．研究成果

（１）先ず、完備な可換ゴレンシュタイン局所環Ｒ上のネター多元環ΛでＲ加群としてゴレンシュタイン射影的であるものについて、左右で有限の自己移入次元を持つとの仮定の下で、それがアウスランダー条件をみたす、即ち、Λ自身の右加群としての極小移入分解におけるｎ番目の項の平坦次元がｎ以下である（ここで、ｎは自己移入次元以下の任意の非負整数とする）ためには、ΛのＲ双対Ωの左Λ加群としての極小射影分解のＲ双対を取って得られる右Λ加群としてのΛの有限生成加群による有限右分解

$$0 \to \Lambda \to Q^0 \to Q^1 \to \cdots \to Q^m \to 0$$

においてｍ以下の任意の非負整数ｒに対してｒ番目の項がｒ以下の射影次元を持つことが必用十分であることを示した。

　次に、上の右分解における各項の基礎環Ｒ上の加群としての構造を詳しく調べ、その性質を抽出することによって、一般のネター環に対して他のネター環上のアウスランダー・ゴレンシュタイン分解の概念を導入した。ネター環Ｒ、Λに対して、右加群としてのΛの有限右分解

$$0 \to \Lambda \to Q^0 \to Q^1 \to \cdots \to Q^m \to 0$$

がＲ上のアウスランダー・ゴレンシュタイン分解であるとは、以下の４条件をみたすことであるとする：

① すべての項 Q^r は(R,Λ)双加群である。
② すべての項 Q^r は左Ｒ加群として有限生成かつゴレンシュタイン射影的である。
③ すべての項 Q^r の直和のＲ双対は左Λ加群として忠実平坦である。
④ すべての項 Q^r は右Λ加群としてｒ以下の平坦次元を持つ。

　上では、Ｒを基礎環とみなしているわけであるが、環準同型Ｒ→Λの存在を仮定してはない。また、Ｒが可換環でかつ環準同型Ｒ→Λが存在したとしても、その像がΛの中心に含まれるとは限らないことに注意しておく。

　主結果として、ネター環Λがアウスランダー・ゴレンシュタイン環Ｒ上のアウスランダー・ゴレンシュタイン分解を持つなら、Λはまたアウスランダー・ゴレンシュタイン環であることを示した。また、任意の基礎環Ｒに対して、その上のアウスランダー・ゴレンシュタイン分解を持つネター環Λの構成例

を幾つか与えた。

これらの成果は研究代表者の星野と研究協力者の古賀との共同研究によって得られたもので、共著論文（論文③）として発表した。

（２）先ず、連接環について、左右の極小余生成素の平坦次元がともに有限なら、それらは一致することを示した。ネター環の場合、左（右）自己移入次元と右（左）の極小余生成素の平坦次元とは一致することに注意すば、上の結果は「ネター環の左右の自己移入次元がともに有限ならそれらは一致する」と云う、ザックスに依る有名な結果の一般化である。

ネター環上の有限生成加群からなる上下に有界な複体に対して、導来圏における双対がまた上下に有界な複体であり、かつ、元の複体から導来圏における二重双対への自然射が導来圏における同型射であるとき、その複体は有限のゴレンシュタイン次元を持つと云う。ここで、加群は０次に凝縮した複体とみなす。有限のゴレンシュタイン次元を持つ加群については、導来圏における双対のホモロジーが生きている次数の最大値としてゴレンシュタイン次元が定義される。この定義は連接環上の有限表示加群からなる複体に対しても有効であることに注意する。

ゴレンシュタイン次元の概念を一般化して、弱ゴレンシュタイン次元の概念を導入した。即ち、連接環上の有限表示加群からなる上下に有界な複体に対して、導来圏における双対がまた上下に有界な複体であり、かつ、元の複体から導来圏における二重双対への自然射が、元の複体のホモロジーが生きている最大の次数ｄ未満の次数においてホモロジーの同型を誘導し、次数ｄにおいては単射を誘導するときに、その複体は有限の弱ゴレンシュタイン次元を持つと云う。加群については、やはり０次に凝縮した複体とみなし、有限の弱ゴレンシュタイン次元を持つ加群については、導来圏における双対のホモロジーが生きている次数の最大値として弱ゴレンシュタイン次元が定義される。

以下、ゴレンシュタイン次元０の加群をゴレンシュタイン射影加群と呼ぶのにならい、弱ゴレンシュタイン次元０の加群を弱ゴレンシュタイン射影加群と呼ぶことにする。ゴレンシュタイン次元が有限な加群については、ゴレンシュタイン次元と弱ゴレンシュタイン次元とは一致する、弱ゴレンシュタイン射影加群でゴレンシュタイン次元が有限ではない例（宮地に依る）が在ることに注意する。

次に、導来圏における近似定理を確立した。即ち、連接環上の有限表示加群からなる上下に有界な複体Ｘに対して、そのホモロジーが生きている最大の次数をｄとすれば、Ｘが有限の弱ゴレンシュタイン次元を持つためには、導来圏における三角形

$$X \to Y \to Z \to$$

で以下の３条件をみたすものが存在することが必要十分であることを示した：

① Ｙは有限生成射影加群からなる上下に有界な複体である。
② Ｙのｄより大きい次数の項はすべて０である。
③ Ｚは被約グレードが無限大の加群を　ｄだけ上に移動したものである。

最後に、連接環について次の５条件はすべて同値であることを示した：

① 左右の極小余生成素が有限の平坦次元を持つ。
② 有限表示右加群の弱ゴレンシュタイン次元は上に有界である。
③ 有限表示右加群のゴレンシュタイン次元は上に有界である。
④ 有限表示左加群の弱ゴレンシュタイン次元は上に有界である。
⑤ 有限表示左加群のゴレンシュタイン次元は上に有界である。

特に、アルティン環の場合には、左右で有限の自己移入次元を持つためには、単純右加群がすべて有限の弱ゴレンシュタイン次元を持つことが必用十分であることになる。

これらの成果は研究代表者の星野と研究協力者の古賀との共同研究によって得られたもので、共著論文（論文②）として発表した。

（３）上の（２）で定義した弱ゴレンシュタイン次元についての研究を進展させた。

先ず、連接環上の有限表示加群Ｘで、導来圏における双対が有界な複体であるものについて、そのホモロジーが生きている次数の最大値をｄとする。このとき、Ｘが有限の弱ゴレンシュタイン次元を持つためには、導来圏における双対の d+1 次のコサイクルが ｄ＋2 以上の被約グレードを持つことが必要十分であることを示した。

次に、アルティン環の場合、左右で有限の自己移入次元を持つためには、単純右加群がすべて有限の弱ゴレンシュタイン次元を持つことが必用十分であることを上の（２）で指摘したが、この事実を可換局所環上のネター多元環の場合に拡張した。具体的には、先ず、可換局所環上のネター多元環が条件 (G) をみたすとは、すべての単純右加群が有限の

弱ゴレンシュタイン次元を持つことであると定義し、可換局所環上のネター多元環が左右で有限の自己移入次元を持つためには、基礎環の任意の素イデアルで局所化したとき、そのネター多元環が条件（G）をみたすことであることを示した。

最後に、可換局所環上のネター多元環でさらに局所環であるものについて、任意の非負整数ｄに対して以下の３条件は同値であることを示した：
① 左右で自己移入次元ｄを持つ。
② 自分自身を右加群としてみたとき、自己移入次元をよび深度がともにｄである。
③ 単純右加群（一つしかない）の弱ゴレンシュタイン次元はｄである。

更に、可換局所環上のネター多元環でさらに局所環であるものについて、左右で有限の自己移入次元を持つとき、その極小移入分解における０でない最後の項は単純加群の移入包絡であることを示した。また、これらの結果は局所環の仮定なしには成立しないことを、例を挙げて示した。

これらの成果は研究代表者の星野と研究協力者の古賀との共同研究によって得られたもので、共著論文（論文①）として発表した。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

① M. Hoshino and H. Koga, “Finiteness of selfinjective dimension for noetherian algebras”, Comm. Algebra, 査読有, vol. 41(9), 2013, 3414-3428.
DOI: 10.1080/00927872.2012.686645

② M. Hoshino and H. Koga, “Zaks’ lemma for coherent rings”, Algebras and Representation Theory, 査読有, vol. 16, 2013, 1647-1660.
DOI: 10.1007/s10468-012-9376-9

③ M. Hoshino and H. Koga, “Auslander-Gorenstein resolution”, J. Pure Appl. Algebra, 査読有, vol. 216, 2012, 130-139.
DOI: 10.1016/j.jpaa.2011.05.011

〔学会発表〕（計４件）

① M. Hoshino, N. Kameyama and H. Koga, “Group-graded and group-bigraded rings”, 第４６回環論および表現論シンポジウム, 東京理科大学神楽坂キャンパス, 東京, ２０１３年１０月１３日.

② M. Hoshino, N. Kameyama and H. Koga, “Clifford extensions”, 第４６回環論および表現論シンポジウム, 東京理科大学神楽坂キャンパス, 東京, ２０１３年１０月１３日.

③ M. Hoshino, N. Kameyama and H. Koga, “Constructions of Auslander-Gorenstein local rings”, 第４５回環論および表現論シンポジウム, 信州大学, 松本, ２０１２年9月７日.

④ M. Hoshino and H. Koga, “Weak Gorenstein dimension for modules and Gorenstein algebras”, 第４４回環論および表現論シンポジウム, 岡山大学, 岡山, ２０１１年9月２６日.

６．研究組織

(1)研究代表者
星野　光男（HOSHINO, Mitsuo）
筑波大学・数理物質系・講師
研究者番号：９０１８１４９５

(2)連携研究者
西田　憲司（NISHIDA, Kenji）
信州大学・理学部・教授
研究者番号：７０１２５３９２

(3)研究協力者
古賀　寛尚（KOGA, Hirotaka）
筑波大学・数理物質系・特別研究員ＰＤ
研究者番号：３０７３６７２３

亀山　統胤（KAMEYAMA, Noritsugu）
信州大学・大学院総合工学系研究科・D3