様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月 ２３ 日現在

機関番号：１２１０２
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2012～2013
課題番号：２４８４０００６

研究課題名（和文）４次元の微分構造の骨格と３次元のザイフェルト手術の骨格

研究課題名（英文）Bones about 4-dimensional differential structures and about Seifert surgeries

研究代表者
丹下　基生（Tange, Motoo）

筑波大学・数理物質系・助教

研究者番号：７０４５２４２２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　1,800,000円、（間接経費）　540,000円

研究成果の概要（和文）：4次元多様体の局所変形（コルク、プラグ）に関する研究を行い、無限個のエキゾチック多様体を構成した。プラグの変種を用いることで、多くのエキゾチック構造の変種についての考察をした．負定値のスピン多様体をバウンドする4次元多様体を見つけた．スライスリボン予想に関する研究を行い、リボン円盤に関するリボン特異点の拡張としてスライス円盤に対してある種の特異点集合を見出した．
レンズ空間手術に関する研究を山田裕一氏と行い、トーラス結び目とその他の結び目と組み合わせてできる4次元多様体の解析を行った．結び目から作られるレンズ空間の分類を連分数展開を用いて行った．負定値多様体の中の向きづけ不能曲面の研究を行った．

研究成果の概要（英文）：I studied some types of the local deformation of 4-manifolds by using Cork and Plug. I constructed infinitely many exotic structures with boundary by using my plug with infinitely order. Also, I considered other various deformation arising exotic structures. I found some negative-definite spin 4-manifolds for homology spheres. T.Abe and I studied slice-ribbon conjecture, as a result we found singularity sets generalizing ribbon singurality sets. We show the annulus twists for some 8_{20} gives ribbon knots.
Y.Yamada and I did research of lens space surgery. We analyzed the closed 4-manifolds obtained from torus knot and Berge's VII and VIII knot surgeries. I advanced the research of my classification problem of lens space surgery. I established the way to use continued fraction to prove the completeness of lens space suregery. K. Sato and I studied non-orientable genus in negative-definite 4-manifolds.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：4次元多様体　3次元多様体　結び目　スライスリボン予想

１．研究開始当初の背景

(1)４次元多様体には多くの興味深いエキゾチック多様体が存在する．その全貌を理解する仕事はまだ明らかにされていない．そのような多様体のペアがあったときに、コルクもしくはプラグと言われる、部分多様体が存在して、その間の変換により両者が移り合うことが知られている．そのような状況で、どのような一般論を構成することができるかという問題が起こる．

3 次元多様体がどのような 4 次元多様体の境界となるかという問題は、３，４次元のトポロジーにおいて古くから中心的な話題である．3 次元スピン多様体のロホリン不変量は、そのような 4 次元多様体に制限を与えている．また、そのような 4 次元多様体が可縮多様体の境界となるための条件を与える問題も中心的な問題であり、松本幸夫氏の 11/8 予想にもつながる興味深い問題である．

(2)スライス結び目とは、3 次元球面上の結び目で、4 次元球体の内部に円盤を張るようなもののことであり、リボン結び目とは、3 次元球面上の結び目で、3 次元球面の内部にはめ込みの円盤をリボン特異点のみを課すことで実現できるものである．一般にリボン結び目はスライス結び目となることが知られているが、その逆（スライスリボン予想）は部分的結果を除いて知られておらず、一般的にこのことを証明する手掛かりは皆無である．また、結び目の種数はスライスになりにくさを反映したものであるが、この種数を向きづけ不能曲面に関する既存の研究がある．つまり、不定値多様体内では、向きづけ不能曲面の最小種数は結び目に因らない一定の数で抑えられることが知られている．しかし、定値多様体内の向きづけ不能種数に関してはそれほど知られていない．また、バトソンは４次元球体の内部の曲面に関して、この種数がいくらでも大きくなることを示している．

(3)３次元多様体におけるデーン手術の分野では、どのような 3 次元多様体が結び目手術の構造を持つか、もしくはどれほどあるかという問題は古典的なものである．この問題は、例外手術という現象が事を複雑にしている．例外手術は多様体の幾何構造を保たずに、起こるある例外的な手術のことであり、どのような状況で起こるか、また、どれほど起こりうるかという問題は根本的にはよく分かっていない．レンズ空間の場合でさえ、そのような結び目を全て書き出すことには至っていない．しかし、Berge が提案した構成（Berge 結び目）によれば、多くのレンズ空間を構成することができ、かつ、最近のグリーンの仕事により、その構成法が全ての"パターン"を尽くしていることが証明された. しかし１つのレンズ空間にどれほどのパターンがあるかという問題はまだ解かれていない．

２．研究の目的

(1)背景に書いたような 4 次元多様体の状況において、多くの興味深い多様体（特に、新しいコルクやプラグ）を構成することは非常に有益である．まだ、コルクが見つかっていないペアに関してどのようなコルクにより移り合うかということが必然的に興味深い研究となる．このような研究の中から、統一的に４次元多様体を構成する方法が模索できるであろう．本研究の代表者は、これまでの研究で無限位数をもつプラグ P を構成していた．このプラグの特徴として、そのツイストを行うと、結び目手術を行うことができる．また、さらに結び目の交差交換についての操作を行うことができる．このプラグによるツイストによりどれほど多くのエキゾチック多様体を得ることができるかという問題は４次元多様体の一般論につながる可能性がある．

(2)スライス結び目とリボン結び目の間に幾何学的にどのような差が存在するのかとい

うことを幾何的に突き止めることで、スライスリボン予想を証明のための方針をたてることができる．また、結び目の向きづけ不能種数に関する問題が結び目のスライス性とどのように関わっているかという問題にも着手する．

(3)レンズ空間がいつ結び目のデーン手術として得られるか、又は、どれほど多くの結び目で得られるかという問題はデーン手術の問題の中で未解決であるが、比較的易しい部類の問題である．さらに、この問題を解決することで、他の問題への応用が見やすい形となる．例えば、ザイフェルト手術の場合に応用することができる．よって、レンズ空間手術の問題に着手することが今後の研究の足がかりとなる．

上記の背景で書いたレンズ空間を作る 2 重のパターンを求める研究を行う．また、その 2 種類の Berge 結び目から得られる 4 次元多様体接着させることで閉 4 次元多様体が得られる．作られる 4 次元多様体は、2 つの 2 次元球面の直積空間か、複素射影平面もしくはその逆向きの 2 つの連結和である．そのような多様体を通常とは異なる作り方をしており、微分構造の観点から興味深い対象を与えている．

３．研究の方法

(1)Fintushel-Stern による結び目手術や他のいくつかの多様体のハンドル分解を描いておき、標準的な多様体からを得るためのハンドルの操作を発見する．この操作から可縮多様体が構成できる．この可縮多様体がコルクとなりうる．また、これらの構成をいくつか組み合わせることで、特定の性質をもつ 4 次元多様体をもつことがわかる．バウンドを構成しないことは、correction term や mu-bar 不変量を用いて行う．

(2)任意のスライス結び目は、４次元球体のハンドル分解のある 2 ハンドルのココア円盤の境界として実現することができる．この境界の結び目と球体のハンドル分解の間にどのような関係があるかということを突き止める．また、定値多様体の中の結び目の種数を、Heegaard Floer ホモロジーを用いて評価することを考える．

(3)レンズ空間手術の問題は、レンズ空間手術パラメータを用いて、そのパラメータがもつ手術の可能性を、アレクサンダー多項式の係数に繋げて考察をする．そのため、そのパラメータがもつ、レンズ空間の連分数展開とその間に成り立つ制限が求められる．またその制限がもつ幾何的役割についても考察をする．

レンズ空間が 2 種類の結び目の手術で得られる場合の研究については、Berge 結び目から重なって得られる部分を取り出す．このとき、リストが代数的に特徴づけられていることから、ある方程式が導き出されるはずである．この方程式を解析することで、このような 2 種類の結び目を完全に求める．

４．研究成果

(1)本研究では、研究代表者が定義した P によるプラグツイストが一般化され、あらゆる結び目の局所変形に対して、４次元多様体の局所変形を構成できることを示すことができた．例えば、P を再び用いることで、2-bridge 結び目の手術を一度に行うことができる．P の境界の Heegaard Floer ホモロジーを計算した．また、コルクとなるための、ハンドル図上に成り立つ非常に弱い条件を得た．ただ、この場合、Stein とならない場合もありうることがわかる．また、結び目の mutation に関する 4 次元多様体の局所変形は、ある部分多様体 M のツイストとして実現できることがわかった．しかし、一般に M が Stein かどうか分からないのと、サイバーグウィッテン不変量で微分構造の変化を読み取れないことがこの M の謎となっている．

しかし、M の境界の同相写像は内部の同相写像に延びることは示すことができた．Ozsvath-Szabo による 4 次元多様体不変量を用いて無限位数コルクに関するある制約を求めた．上記のプラグ P を用いて、その拡大（2 ハンドルを一つ付けたもの）は無限個の微分構造をもつことをサイバーグウィッテン不変量を用いて示すことができた．二つ付けたものは全て微分構造が異なることも示すことができた．

ホモロジー球面が負定値なスピン多様体の境界となるとき、そのベッチ数の評価についての研究は多くある．しかし、実際そのような多様体がいつ存在するかという問題は広く知られていない．本研究の代表者は、(2,3,6n-1)型ブリースコーンホモロジー球面のいくつかにおいて、数値上存在するバウンドを実際多様体として構成することに成功した．また、自然なザイフェルト表示からくる最小特異点解消グラフが-E8 となるブリースコーン球面は(2,3,5)型か(3,4,7)型のみであることを示した．さらに、最小特異点解消グラフをブローダウンしてできる負定値スピン多様体もいくらか求めることができた．

このバウンドは実際 E(1)の中に埋め込めることができ、E(1)の最小種数に関する結果に繋げることができた．松本幸夫氏は 2 成分結び目の手術(0,n)でできる３次元多様体 M(0,n)がいつ可縮多様体をバウンドするかという問題を出した．代表者は、Heegaard correction term を計算することで、n が２以下のときに、M(0,n)は可縮多様体でバウンドしないことを示した．

(2)東京工業大学の安部哲哉氏とスライスリボン予想に関する研究を行った．結び目のアニュラスツイストでできる結び目はスライスリボン予想の反例、もしくはポアンカレ予想の反例になっていることを示している．本研究では、アニュラス表示をもつ結び目のアニュラスツイストは全てスライスであることを示した．つまりポアンカレ予想の反例にならないことを示した．証明法としてアクブルトによるキャンセリングペアの導入による方法とゴンプによる魚尾ファイバーの対数変換による方法の 2 種類あった．また、元の結び目が 8{20}であれば、このアニュラスツイストはリボン結び目であることをハンドル図を用いて示した．実際リボン表示を構成した．リボン結び目はそのはめ込み円盤上に特異点集合があらわれる．その特異点集合をスライス結び目に一般化させた．結果的に、スライス円盤を、ある穴あき円盤上の"リボン特異点集合"を持つものとして特徴づけることができた．この特異点集合表示上でのグラフの変形理論がスライスリボン予想につながることがわかる．

学芸大学の佐藤光樹氏と負定値多様体の中の向きづけ不能曲面の最小種数に関する研究を行った．我々の研究では、定値多様体の中で、最小種数をがいくらでも大きくできる結び目の族が存在することを示した．

これはバトソンの手法を拡張することで得られる結果である．この結果は、Heegaard Floer ホモロジーと安原氏による結果から得られるものであり、既存の指数定理からくる結び目の種数評価では得られなかったものである．また、複素射影平面内の存在する向きづけられた種数の評価についても、その最小種数がいくらでも大きくできるようなものが存在することを示すことができた．

(3)レンズ空間手術の研究を進めた．結び目の手術として書けるレンズ空間を見つけることは難しいことであるが、それをレンズ空間の連分数を用いて行う手法を確立した．レンズ空間手術からくるパラメタと連分数展開の関係からくる 2 種類の指数にはレンズ空間手術の必要条件から制限を受ける．そのときに分類をいくつか成功できた．また、レンズ空間手術をもつ結び目のアレクサンダー多項式の係数の 2 番目および、2n-1 番目と 2n

番目の非自明な項がどのように現われるかについて、以前考察したものを係数の上下の関係性を用いることで、以前より簡単に議論することができることを示した.

電気通信大学の山田裕一氏とレンズ空間を作る２つの結び目についての研究をした. 本研究では､我々は､トーラス結び目と Berge のタイプ VII およびタイプ VIII から得られるレンズ空間の対を全て求めた. このとき、両者の関係に成り立つ関係式を解くことになるが、初等整数論の枠組でこの問題を解決することができた. なお、この手法は以前のトーラス結び目同士の分類の際にも役に立つことがわかった. また、我々はこの対から得られる閉４次元多様体の微分構造を全て決定することができた.

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　3　件）

①Motoo Tange, The link surgery of S2×S2and Scharlemann's manifolds, Hiroshima, Math.J.44 (2014), no. 1, 35-62. 57R65、査読有

②Tetsuya Abe, and Motoo Tange, Omae's knot and 12a990 are ribbon (Proceeding of Intelligence of Low-dimensional Topology at RIMS 、(2012)34-42 査読無

③ Tange, Motoo and Yamada, Yuichi, Four-dimensional manifolds constructed by lens space surgeries along torus knots,J. Knot Theory Ramifications 21 (2012), no. 11, 1250111, 65 pp.査読有

https://www.tulips.tsukuba.ac.jp/dspace/handle/2241/117937（つくばリポジトリ）

〔学会発表〕（計　6　件）

① 丹下基生、−E8 を交差形式とする 4 次元多様体の境界となるホモロジー球面, 日本数学会秋季総合分科会 2013 年 9 月 24 日愛媛大学

② 安部哲哉、丹下基生、スライス円盤が作るあるグラフとその変形, 日本数学会秋季総合分科会 2013 年 9 月 24 日愛媛大学

③丹下基生 Lens space surgery and a classification, The 9th East Asian School of Knots and Related Topics 2013 年 1 月東京大学

④丹下基生 Primitive/Seifert knots in the Poincar'e homology spheres, 日本数学会秋季総合分科会 2012 年 9 月 20 日九州大学

⑤ 安部哲哉、丹下基生 Omae's knot and 12a990 are ribbon, 日本数学会秋季総合分科会 2012 年 9 月 20 日九州大学

⑥丹下基生 Annulus twist of a knot and log transform 研究集会「４次元トポロジー」2012 年 11 月 広島大学.

〔その他〕

ホームページ等

http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/

６．研究組織

(1)研究代表者

丹下　基生　　（TANGE　Motoo　）

筑波大学・数理物質系・助教

研究者番号：70452422