上 智 大 学 数 学 講 究 録

No. 6

二階楕円型微分作用素の境界値問題

平 良 和 昭 著

上 智 大 学 数 学 教 室

1 9 8 0 年1月

まえがき

このノートは，筆者が1979年度前学期に上智大学数学科において大学院生を対象にして行なった講義の記録である．

講義では，主として二階楕円型微分作用素に対するOblique問題について解の存在と一意性の問題を考察したが，同時に，この具体的な問題を通じて一般の楕円型微分作用素に対する境界値問題を研究するための現代的手法をも修得できるように心掛けた．

内容について簡単に触れよう．Laplace作用素に対する境界値問題は，古典的なNewtonポテンシャル，一重層ポテンシャル，二重層ポテンシャルを使って，境界上のいわゆるFredholmの積分方程式に帰着されることはよく知られているが，このことは現代的には擬微分作用素論の枠内で把えることができ，Fredholmの積分方程式に対応するものとして，境界上の擬微分方程式が登場してくる．（この辺のことについては，§2の注意2.2に簡単な説明を与えておいた．）そこで，最近の擬微分作用素に対する（局所）可解性，（局所）正則性の研究を使ってこの境界上の擬微分方程式を調べることにより，考

えている境界値問題が適当な Sobolev 空間において一意可解的であるための必要十分条件を与えることができるのである.

例えば Oblique 問題の場合, Egorov - Hörmander による擬微分作用素に対する Subellipticity の特徴付け(定理 2.4)あるいは Melin - Sjöstrand による Complex Phase をもつ Fourier 積分作用素の理論(定理 2.9)を使って, 境界値問題の解が正則性(すなわち, Data がなめらかならば解もなめらか)をもつための十分条件を与えることができる. このとき, 特に Homogeneous Solution は境界までこめてなめらかとなるから, よく知られた最大値の原理によって解の一意性定理を得ることができる(定理 3.10). 法線方向の微分(i.e., Neumann 条件)が消えうるような境界条件に対して解の一意性を示すには, 最大値の原理は Green の公式よりもしばしば有用である.

可解性の方は次のようにして示される: Agmon - Nirenberg に示唆されて仮想的に単位円をつけ加えた境界値問題を考えると, 粗くいって,『本来の境界値問題の Index がゼロであるためには, この一変数つけ加えられた境界値問題の Index が有限であることが必要かつ十分である』ことがいえる(定理 4.2, 系 4.4). Index が有限であるための十分条件は, 函数解析の初等的事実によって不等式の形で与えることができる(補題 2.8)ので, 再び Egorov - Hörmander あるいは

Melin-Sjöstrandの結果を一変数つけ加えられた境界値問題に対応する境界上の擬微分作用素に適用することによって，一変数つけ加えられた境界値問題のIndexが有限，従って，本来の境界値問題のIndexがゼロであるための十分条件を与えることができる．よって，すでに得られている解の一意性定理を考慮すれば，ただちに可解性が従う．

主結果は，§1に定理1，定理2としてまとめられている．定理1，定理2の証明は§2で与えられるが，解の一意性定理を示す際に重要な役割を果たす最大値の原理については§3で，可解性を示す際に本質的なAgmon-Nirenbergの方法については§4で，それぞれ節を改めて詳しく解説されている．

おわりに，講義を最後まできいて下さった方々とこの講義録をまとめる機会を与えて下さった上智大学数学教室に心から御礼を申し上げたい．田原秀敏君は最終原稿に目を通し多くの有益な注意をして下さった．ここに，記して感謝の言葉に代えたい．

1979年11月　　筑波研究学園都市にて

平良和昭

目　　次

§1. 問題の定式化と結果

D を $\mathbb{R}^n$ の有界領域とし，その境界 ∂D はなめらかとする．次の Oblique 問題を考えよう：

$$(\ast)\qquad \begin{cases} Au \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f & \text{in } D, \\ Bu \equiv a\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u\Big|_{\partial D} = \phi & \text{on } \partial D. \end{cases}$$

ここで，a^{ij}，b^i，c は $\overline{D} = D \cup \partial D$ 上のなめらかな実数値函数であって，次の条件をみたしているものとする：

— $a^{ij} = a^{ji}$ $(1 \leqq i, j \leqq n)$ であって，ある定数 $c_0 > 0$ が存在して，

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i \xi_j \geqq c_0 |\xi|^2, \quad x \in \overline{D}, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n,$$

すなわち，微分作用素 A は $\overline{D}$ 上で一様に楕円型である．

— $c(x) \leqq 0$ in D.

さらに，境界条件 B については

— a は ∂D 上のなめらかな実数値函数，

— α は ∂D 上のなめらかな実ベクトル場，

— $\dfrac{\partial}{\partial \nu}$ は行列 $(a^{ij})_{1 \leqq i,j \leqq n}$ に付随した外向き余法線微分，

i.e.,

$$(1.1) \qquad \frac{\partial}{\partial \nu} = \frac{1}{\left(\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} n_i n_j\right)^{1/2}} \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} n_j \frac{\partial}{\partial x_i},$$

ただし，$n = (n_1, n_2, \cdots, n_n)$ は ∂D の外向き単位法線ベクトルである．

われわれの目的は，問題(*)が Sobolev 空間の枠内で一意可解的であるための必要十分条件をもとめることである．主結果は次の定理である：

定理 1　次の２つの主張は同値である．

i)　ある $0 < \delta \leqq 1$ が存在して，問題(*)が任意の $f \in H^{s-2}(D)$ と $\phi \in H^{s-3/2}(\partial D)$ $(s \geqq 2)$ に対して一意的な解 $u \in H^{s-1+\delta}(D)$ をもつ．

ii)　次の条件 $(B)_\delta$，(C) が成り立つ：

$(B)_\delta$ ベクトル場 α は集合 $M = \{x' \in \partial D ;\ a(x') = 0\}$ 上でゼロにはならず，さらに，$t=0$ のとき M の点 x_0' を通る α の積分曲線 $x(t, x_0')$ に沿って，函数：$t \longrightarrow a(x(t, x_0'))$ は $2k$ 次以下の偶数次の零点をもち，$\delta = \frac{1}{1+2k}$ である．

(C)　函数 $c(x)$ は D で恒等的にゼロではない．

ここで，$H^s(D)$ と $H^s(\partial D)$ は，それぞれ D 上と ∂D 上の s 次

の Sobolev 空間を表わす.

<u>注意 1.1</u>　1°　主張 i) における $0 < \delta \leqq 1$ は任意ではなく, 条件 $(\mathrm{B})_\delta$ にのべられているように, $\delta = \dfrac{1}{1+2k}$, $k = 0, 1, 2, \cdots$ という限られた値しかとりえないことに注意しよう.

2°　条件 $(\mathrm{B})_\delta$ より, 函数 : $t \longrightarrow a(x(t, x_0'))$ は有限偶数次の零点しかとりえないので, 函数 $a(x')$ は境界 ∂D 上符号を変えない, すなわち, $a(x') \geqq 0$ on ∂D あるいは $a(x') \leqq 0$ on ∂D であることが従う.(注1) 函数 $a(x')$ が ∂D 上符号を変えないならば, $\delta = 0$ の場合, i.e., 函数 : $t \longrightarrow a(x(t; x_0'))$ が <u>無限次</u>の零点をもつ場合をも含めて, 定理 1 は次のように (部分的に) 拡張される:

<u>定理 2</u>　次の条件 (A), (B), (C) を仮定しよう.

(A) 函数 $a(x')$ は境界 ∂D 上符号を変えない.

(B) ベクトル場 α は集合 $M = \{x' \in \partial D \,;\, a(x') = 0\}$ 上でゼロにはならず, さらに, α のいかなる極大な積分曲線も<u>完全には</u> M には含まれない.

(C) 函数 $c(x)$ は D で恒等的にゼロではない.

このとき, 問題 (*) は任意の $f \in H^{s-2}(D)$ と $\phi \in H^{s-3/2}(\partial D)$ $(s \geqq 2)$ に対して一意的な解 $u \in H^{s-1}(D)$ をもつ.

注意 1.2　1° 条件 (B) における "完全には" の意味は，$t=0$ のとき $\mathcal{M}$ の点 x_0' を通る α の積分曲線 $x(t, x_0')$ が $t>0$ に対しても，$t<0$ に対しても有限時間で $\mathcal{M}$ を脱出することである．例えば $a(x')\geqq 0$ on ∂D の場合，$t>0$ に対する仮定は問題 (*) の解の存在と正則性に関係し（注意 2.10 を参照），$t<0$ の方は解の一意性に関係する（定理 3.10 の証明を参照）．

2° 条件 $(B)_\delta$ が成立していれば，α のいかなる積分曲線も瞬間的に $\mathcal{M}$ を脱出するので，条件 (B) が成立していることに注意しよう．

注意 1.3　ベクトル場 α が $\mathcal{M}$ 上ゼロになりうる場合は，境界条件 B に低階の項（スカラー函数）をつけ加えて考えなければならない．詳しくは [13] を参照されたい．

§ 2. 定理 1，定理 2 の証明

定理 1 の証明　i) ⇒ ii)：　1) よく知られているように（例えば [9]），任意の $f\in H^{s-2}(D)$ と $\varphi\in H^{s-1/2}(\partial D)$ $(s\geqq 2)$

に対して，Dirichlet問題：

$$\begin{cases} Au = f & \text{in } D, \\ u|_{\partial D} = \varphi & \text{on } \partial D \end{cases}$$

は一意的な解 $u \in H^s(D)$ をもつ．より詳しくいえば，写像：

$$u \longrightarrow (Au, u|_{\partial D})$$

は $H^s(D)$ から $H^{s-2}(D) \oplus H^{s-1/2}(\partial D)$ への位相同型である．従って，連続作用素

$$G : H^{s-2}(D) \longrightarrow H^s(D) \quad (s \geqq 2),$$
$$P : H^{t-1/2}(\partial D) \longrightarrow H^t(D) \quad (t \in \mathbb{R})$$

を次式で定義することができる：

$$(2.1) \qquad \begin{cases} AGf = f & \text{in } D, \\ Gf|_{\partial D} = 0 & \text{on } \partial D. \end{cases}$$

$$(2.2) \qquad \begin{cases} AP\varphi = 0 & \text{in } D, \\ P\varphi|_{\partial D} = \varphi & \text{on } \partial D. \end{cases}$$

このとき，次の命題を得る：

命題2.1　$s \geqq 2$ とする．$f \in H^{s-2}(D)$ と $\phi \in H^{s-3/2}(\partial D)$ に対して問題(＊)の解 $u \in H^{t}(D)$ $(t \leqq s)$ が存在するための必要十分条件は，Fredholm の方程式：

$$(**) \qquad T\varphi \equiv BP\varphi = \phi - BGf \quad \text{on } \partial D$$

が解 $\varphi \in H^{t-1/2}(\partial D)$ をもつことである．

証明　$f \in H^{s-2}(D)$ に対して $v = Gf \in H^{s}(D)$ とおくと，(2.1)式より，$u \in H^{t}(D)$ が問題(＊)の解であるためには，$w = u - v \in H^{t}(D)$ が問題：

$$\begin{cases} Aw = 0 & \text{in } D, \\ Bw = \phi - Bv & \text{on } \partial D \end{cases}$$

の解であることが必要かつ十分である．Dirichlet 問題の解の一意性から，$\varphi = w|_{\partial D} \in H^{t-1/2}(\partial D)$ とおくと $w = P\varphi$ とかけて（(2.2)式参照），$u \in H^{t}(D)$ が問題(＊)の解であるための必要十分条件は，$\varphi \in H^{t-1/2}(\partial D)$ が方程式(＊＊)の解であることが従う．　Q. E. D.

注意2.2　(2.1)式，(2.2)式で与えられる作用素 G, P は，それぞれ古典的な Newton ポテンシャル，二重層ポテンシ

ャルを擬微分作用素論の観点から把えなおしたものにほかならないのであるが，このことを，簡単のために $A = -\Delta$ (Laplace作用素)，$D = \mathbb{R}^3_+ = \{ (x', x_3) = (x_1, x_2, x_3) \,;\, x_3 > 0 \}$ (半空間) の場合について説明しよう．(詳しくは，[6], [8] を参照されたい.) さて，問題(*)は次のようになる：

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) \quad \text{in } \mathbb{R}^3_+ , \\ Bu(x') \equiv -a(x') \dfrac{\partial u}{\partial x_3} + \alpha^1(x') \dfrac{\partial u}{\partial x_1} + \alpha^2(x') \dfrac{\partial u}{\partial x_2} \Big|_{x_3 = +0} \\ \qquad = \varphi(x') \quad \text{on } \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

1° <u>Newton ポテンシャル</u> N： まず，方程式

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^3_+$$

を考えよう．函数 u, f を (適当に) $\mathbb{R}^3$ 全体に拡張し，拡張したものをそれぞれ U, F とかこう．Fourier変換すると，

$$|\xi|^2 \, \hat{U}(\xi) = \hat{F}(\xi) \quad \text{in } \mathbb{R}^3$$

を得る．そこで，作用素 N を (例えば，$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ に対して)

$$Nf(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{ix\xi} \, \frac{1}{|\xi|^2} \, \hat{f}(\xi) \, d\xi$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} e^{i(x-y)\xi} \frac{1}{|\xi|^2} f(y)\, dy\, d\xi$$

で定義しよう．このとき，よく知られたFourier変換の公式：

$$(2.3) \qquad \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i(x-y)\xi} \frac{1}{|\xi|^2}\, d\xi = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|}$$

より，次式を得る．

$$N f(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y)}{|x-y|}\, dy .$$

これは，古典的な *Newton* ポテンシャルである．

2° <u>二重層ポテンシャル</u> P：次の，方程式

$$-\Delta w(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3_+$$

において，変数 $x' = (x_1, x_2)$ についてだけ（部分）Fourier変換すると，x_3 に関する常微分方程式：

$$\left(\frac{d^2}{dx_3^2} - (\xi_1^2 + \xi_2^2)\right) \widetilde{w}(\xi_1, \xi_2, x_3) = 0 \qquad (x_3 > 0)$$

が従い，これを解けば，ある定数 $C(\xi_1, \xi_2)$ に対して

$$\widetilde{w}(\xi_1, \xi_2, x_3) = C(\xi_1, \xi_2)\, e^{-x_3 |\xi'|}, \quad |\xi'| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}\,.$$

そこで，作用素 P を

$$(2.4)\qquad P\varphi(x', x_3) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x_3|\xi'|} e^{ix'\xi'} \hat{\varphi}(\xi')\, d\xi'$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\iint_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} e^{-x_3|\xi'|} e^{i(x'-y')\xi'} \varphi(y')\, dy'\, d\xi'$$

で定義しよう．このとき，留数計算：

$$e^{-x_3|\xi'|} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} e^{ix_3\xi_3} \frac{\xi_3}{\xi_3^2 + |\xi'|^2}\, d\xi_3$$

により，

$$P\varphi(x', x_3) = \frac{-1}{(2\pi)^3}\iint_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^3} e^{ix_3\xi_3} e^{i(x'-y')\xi'} \frac{i\xi_3}{|\xi|^2} \varphi(y')\, dy'\, d\xi$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(y') \left[\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} e^{i(x_3\xi_3 + (x'-y')\xi')} \frac{i\xi_3}{|\xi|^2}\, d\xi\right] dy'$$

と変形できる．さらに，(2.3)式から，ξに関する積分は

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{x_3}{|x|^3}$$

に等しいので，結局，

$$P\varphi(x', x_3) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{x_3}{\left((x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + x_3^2\right)^{3/2}} \varphi(y')\, dy'$$

を得る．これは，古典的な二重層ポテンシャルである．

3° (2.1)式の作用素 G は，N と P を使って，次のように表わされる：

$$\mathcal{G} f = N f - \mathcal{P}(N f|_{\partial D}).$$

4° <u>擬微分作用素</u> $T = B\mathcal{P}$： 一般論から，$T = B\mathcal{P}$ は境界 ∂D 上の一階の擬微分作用素となることが知られているが（[6], [8]），今の場合は (2.4) 式から直接計算できて，

$$T\varphi(x') = \left(-a(x')\frac{\partial}{\partial x_3} + \alpha^1(x')\frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha^2(x')\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\mathcal{P}\varphi(x', x_3)\Big|_{x_3 = +0}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} e^{i x' \xi'} \left[a(x')|\xi'| + i\left(\alpha^1(x')\xi_1 + \alpha^2(x')\xi_2\right)\right] \hat{\varphi}(\xi')\, d\xi'.$$

従って，T は，全シンボルが

$$a(x')|\xi'| + \sqrt{-1}\sum_{j=1}^{2}\alpha^j(x')\xi_j$$

に等しい擬微分作用素である．一般の場合は，T の主シンボルが上の式で与えられる．(2.10) 式を見よ．

<u>定理 1 の証明</u> i) ⇒ ii)（続き）： $T = B\mathcal{P}$ は境界 ∂D 上の一階の擬微分作用素だから，方程式 (∗∗) に付随して，<u>閉作用素</u> $\mathfrak{T} : H^{s-3/2+\delta}(\partial D) \longrightarrow H^{s-3/2}(\partial D)$ を次式で定義することができる：

α) $\mathfrak{T}$ の定義域 $\mathcal{D}(\mathfrak{T}) = \{\varphi \in H^{s-3/2+\delta}(\partial D);\ T\varphi \in H^{s-3/2}(\partial D)\}$.

β) $J\varphi = T\varphi$, $\varphi \in \mathcal{D}(J)$.

このとき，命題2.1で $t = s-1+\delta$ とおけば，問題(*)に対する解の存在，一意性，正則性などの問題がすべて作用素 J に対するそれらの問題へと帰着されることが容易にわかる．（例えば，[6]，[12]を参照せよ．） 従って，特に問題(*)が任意の $f \in H^{s-2}(D)$ と $\phi \in H^{s-3/2}(\partial D)$ に対して一意的な解 $u \in H^{s-1+\delta}(D)$ をもてば，閉作用素 $J: H^{s-3/2+\delta}(\partial D) \longrightarrow H^{s-3/2}(\partial D)$ は 1 to 1, onto である．さらに，J の共役作用素 J^*: $H^{-s+3/2}(\partial D) \longrightarrow H^{-s+3/2-\delta}(\partial D)$ も 1 to 1, onto である．よって，J と J^* に対して閉グラフ定理を適用すれば，ある定数 $C > 0$ と $C^* > 0$ が存在して，次の不等式が成り立つことがわかる:

(2.5) $$|\varphi|_{H^{s-3/2+\delta}(\partial D)} \leqq C\,|J\varphi|_{H^{s-3/2}(\partial D)}, \quad \varphi \in \mathcal{D}(J).$$

$(2.5)^*$ $$|\psi|_{H^{-s+3/2}(\partial D)} \leqq C^*\,|J^*\psi|_{H^{-s+3/2-\delta}(\partial D)}, \quad \psi \in \mathcal{D}(J^*).$$

ところで，共役作用素 J^* は具体的に次式で特徴付けられることを示そう．

γ) J^* の定義域 $\mathcal{D}(J^*) = \{\psi \in H^{-s+3/2}(\partial D)\,;\, T^*\psi \in H^{-s+3/2-\delta}(\partial D)\}$.

ただし，T^* は T の形式的共役作用素である．（T^* も境界 ∂D

上の一階の擬微分作用素であることに注意.)

δ) $\mathcal{J}^* \psi = T^* \psi$, $\psi \in \mathcal{D}(\mathcal{J}^*)$.

実際, $\psi \in \mathcal{D}(\mathcal{J}^*)$ とすると, 定義から, 任意の $\varphi \in \mathcal{D}(\partial D)$ $\subset \mathcal{D}(\mathcal{J})$ に対して

$$(2.6) \qquad (\mathcal{J}^*\psi, \varphi)_{H^{-s+3/2-\delta}(\partial D) \quad H^{s-3/2+\delta}(\partial D)} = (\psi, \mathcal{J}\varphi)_{H^{-s+3/2}(\partial D) \quad H^{s-3/2}(\partial D)}$$

$$= (\psi, T\varphi)_{H^{-s+3/2}(\partial D) \quad H^{s-3/2}(\partial D)}$$

$$= (T^*\psi, \varphi)_{\mathcal{D}'(\partial D) \quad \mathcal{D}(\partial D)} .$$

これから, $T^*\psi = \mathcal{J}^*\psi \in H^{-s+3/2-\delta}(\partial D)$ を得る.

逆を示すには, Hörmander による次の補題が必要である:

補題 2.3 ([6]) Ω を境界のない compact な n 次元 C^∞-多様体, P を Ω 上の s 階の classical, properly supported な擬微分作用素とする. このとき, $u \in H^\sigma(\Omega)$, $Pu \in H^{\sigma-s+1}(\Omega)$ ($\sigma \in \mathbb{R}$) をみたす u に対して, $\mathcal{D}(\Omega)$ の列 $\{u_j\}_{j=1}^\infty$ を選んで $u_j \longrightarrow u$ in $H^\sigma(\Omega)$, $Pu_j \longrightarrow Pu$ in $H^{\sigma-s+1}(\Omega)$ とできる.

補題 2.3 で $P = T$, $s = 1$, $\sigma = s - 3/2$ とおけば, 任意の $\varphi \in$

$\mathscr{D}(\mathfrak{T})$ に対して，$\mathscr{D}(\partial D)$ の列 $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ を選んで $\varphi_k \to \varphi$ in $H^{s-3/2}(\partial D)$，$T\varphi_k \to \mathfrak{T}\varphi$ in $H^{s-3/2}(\partial D)$ とできるから，(2.5)式より $\varphi_k \to \varphi$ in $H^{s-3/2+\delta}(\partial D)$ が従う．これから，容易に $\mathscr{D}(\partial D) \subset \mathscr{D}(\mathfrak{T}^*)$，$\mathfrak{T}^*|_{\mathscr{D}(\partial D)} = T^*$ であることがわかる．

さて，$\psi \in H^{-s+3/2}(\partial D)$，$T^*\psi \in H^{-s+3/2-\delta}(\partial D)$ としよう．このとき，補題 2.3 で $P = T^*$，$s=1$，$\sigma = -s+3/2-\delta$ とおけば，$\mathscr{D}(\partial D)$ の列 $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ を $\psi_j \to \psi$ in $H^{-s+3/2-\delta}(\partial D)$，$T^*\psi_j \to T^*\psi$ in $H^{-s+3/2-\delta}(\partial D)$ となるように選べるが，さらに，$\mathfrak{T}^*|_{\mathscr{D}(\partial D)} = T^*$ に注意すれば，(2.5)* 式から $\psi_j \to \psi$ in $H^{-s+3/2}(\partial D)$ が従う．よって，任意の $\varphi \in \mathscr{D}(\mathfrak{T})$ に対して

$$
\begin{aligned}
(2.7)\qquad (\psi, \mathfrak{T}\varphi)_{H^{-s+3/2}(\partial D)\ H^{s-3/2}(\partial D)} &= \lim_{j} (\psi_j, \mathfrak{T}\varphi)_{H^{-s+3/2}(\partial D)\ H^{s-3/2}(\partial D)} \\
&= \lim_{j}\lim_{k} (\psi_j, T\varphi_k)_{H^{-s+3/2}(\partial D)\ H^{s-3/2}(\partial D)} \\
&= \lim_{j}\lim_{k} (T^*\psi_j, \varphi_k)_{H^{-s+3/2-\delta}(\partial D)\ H^{s-3/2+\delta}(\partial D)} \\
&= (T^*\psi, \varphi)_{H^{-s+3/2-\delta}(\partial D)\ H^{s-3/2+\delta}(\partial D)}
\end{aligned}
$$

が成り立ち，$\psi \in \mathscr{D}(\mathfrak{T}^*)$，$\mathfrak{T}^*\psi = T^*\psi$ を得る．

以上で，共役作用素 $\mathfrak{T}^*$ が γ), δ) で特徴付けられることが示された．

そこで，(2.5)式，$(2.5)^*$式に戻って，作用素 T, T^* をそれぞれ $\mathcal{D}(\partial D)$ に制限すれば，次の Subelliptic 評価式を得る：

$$
(2.5)' \left\{ \begin{array}{ll} |\varphi|_{H^{s-3/2+\delta}(\partial D)} \leqq C\,|T\varphi|_{H^{s-3/2}(\partial D)}, & \varphi \in \mathcal{D}(\partial D). \\ |\psi|_{H^{-s+3/2}(\partial D)} \leqq C^*\,|T^*\psi|_{H^{-s+3/2-\delta}(\partial D)}, & \psi \in \mathcal{D}(\partial D). \end{array} \right.
$$

2) Egorov - Hörmander によって，Subellictic 評価式が成立するための必要十分条件が知られている：

<u>**定理 2.4**</u> ([4], [7]) P を $\mathbb{R}^n$ の開集合 Ω 上の m 階の classical, properly supported な擬微分作用素とし，その主シンボルを $p^0(x,\xi)$ で表わそう．このとき，次の 2 つの主張は同値である．

i) 作用素 P が Ω で <u>Subelliptic</u> である，すなわち，Ω の任意の compact 集合 K と $s \in \mathbb{R}$ に対して定数 $C_{K,s} > 0$ と $0 \leqq \delta' < 1$ が存在して，すべての $u \in C_0^\infty(K)$ に対して，評価式：

$$
(2.8) \quad \|u\|_{H^s(\Omega)} \leqq C_{K,s} \left(\|Pu\|_{H^{s-m+\delta'}(\Omega)} + \|u\|_{H^{s-1}(\Omega)} \right)
$$

が成り立つ．

ii) a) (x_0, ξ^0) を P の Characteristic Set $\Sigma = \{(x,\xi) \in T^*\Omega \setminus 0;$ $p^0(x,\xi) = 0\}$ の点とする．もし $\mathrm{grad}_{x,\xi} \mathrm{Re}\, p^0(x_0,\xi^0) \neq 0$ ならば，(x_0,ξ^0) の近傍で $\mathrm{Im}\, p^0(x,\xi)$ は，$\mathrm{Re}\, p^0(x,\xi)$ の Null Bicharacteristics に沿って正の方向に動くとき，符号をプラスからマイナスに変えない．もし $\mathrm{grad}_{x,\xi} \mathrm{Re}\, p^0(x_0,\xi^0) = 0$ ならば，(x_0,ξ^0) の近傍で $\mathrm{Re}\, p^0(x,\xi)$ は，$\mathrm{Im}\, p^0(x,\xi)$ の Null Bicharacteristics に沿って正の方向に動くとき，符号をマイナスからプラスに変えない．

b) 点 $(x,\xi) \in T^*\Omega \setminus 0$ に対して，$k_1(x,\xi)$ を

$$\begin{cases} H^{\alpha}_{\mathrm{Re}\, p^0} H^{\beta}_{\mathrm{Im}\, p^0} \ \mathrm{Im}\, p^0(x,\xi) \neq 0, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r),\ \beta = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r); \\ |\alpha + \beta| = k_1 \end{cases}$$

をみたす最小の非負整数とする．ただし，

$$H_f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \xi_j} \frac{\partial}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \xi_j},$$

$$H^{\alpha}_f H^{\beta}_g = H^{\alpha_1}_f H^{\beta_1}_g H^{\alpha_2}_f H^{\beta_2}_g \cdots H^{\alpha_r}_f H^{\beta_r}_g .$$

このとき，次が成り立つ：

(2.9) $$k = \sup_{\substack{(x,\xi) \in T^*\Omega \setminus 0, \\ |\xi| = 1}} k_1(x,\xi) < \infty$$

さらに，今の場合 $\delta' = \dfrac{k}{1+k}$ で与えられる．

3) 定理 2.4 を擬微分作用素 T, T^* に適用するために, T, T^* の主シンボルを [6] に従って計算しよう.

境界 ∂D の点 x_0' の近傍における局所座標 $x = (x', x_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n)$ を, $\overline{D} = D \cup \partial D$ が $x_n \geqq 0$ で与えられ, x_n 軸に平行な線が x_n を弧長とする ∂D の測地法線となるようにとる. $(x, \xi) = (x', x_n, \xi', \xi_n)$ を余接バンドル T^*D の局所座標とする. このとき, 点 x_0' の近傍で微分作用素 A の主シンボル $\lambda_2(x, \xi)$ は次のようにかける:

$$\begin{aligned}\lambda_2(x, \xi) &= a^{nn}(x)\xi_n^2 + 2\left(\sum_{j=1}^{n-1} a^{nj}(x)\xi_j\right)\xi_n + \sum_{k,m=1}^{n-1} a^{km}(x)\xi_k\xi_m \\ &= a^{nn}(x)\left(\xi_n - \xi_n^+(x, \xi')\right)\left(\xi_n - \xi_n^-(x, \xi')\right).\end{aligned}$$

ただし,

$$\left\{\begin{aligned}\xi_n^{\pm}(x, \xi') &= -\frac{\sum_{j=1}^{n-1} a^{nj}(x)\xi_j}{a^{nn}(x)} \pm \frac{A(x, \xi')}{\sqrt{a^{nn}(x)}}\sqrt{-1}, \\ A(x, \xi') &= \left[\sum_{k,m=1}^{n-1} a^{km}(x)\xi_k\xi_m - \frac{1}{a^{nn}(x)}\left(\sum_{j=1}^{n-1} a^{nj}(x)\xi_j\right)^2\right]^{1/2}.\end{aligned}\right.$$

さらに, 外向き余法線微分 $\frac{\partial}{\partial\nu}$ は, (1.1) 式によって

$$\frac{\partial}{\partial\nu} = -\left(\sqrt{a^{nn}}\frac{\partial}{\partial x_n} + \frac{1}{\sqrt{a^{nn}}}\sum_{j=1}^{n-1} a^{nj}\frac{\partial}{\partial x_j}\right).$$

従って，[6]によって，擬微分作用素 Π：

$$\varphi \longrightarrow \Pi\varphi \equiv \frac{\partial}{\partial\nu}(P\varphi)\Big|_{\partial D}$$

の主シンボル $p_1(x', \xi')$ は

$$p_1(x',\xi') = -\left(\sqrt{a^{nn}(x',0)}\;\xi_n^+(x',0,\xi')\sqrt{-1}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{a^{nn}(x',0)}}\sum_{j=1}^{n-1} a^{nj}(x',0)\xi_j\sqrt{-1}\right)$$

$$= |\xi'|$$

で与えられる．ただし，$|\xi'| = A(x',0,\xi')$ は R^n の Riemann 計量 $(a_{ij}(x))_{1\leqq i,j\leqq n}$ $\left((a_{ij}(x))\text{ は }(a^{ij}(x))\text{ の逆行列}\right)$ によって境界 ∂D に導入された Riemann 計量 $(a_{ij}(x',0))_{1\leqq i,j\leqq n-1}$ に関する ξ' の長さである．

以上のことから，擬微分作用素：$T = a\Pi + \alpha$ の主シンボル $t_1(x',\xi')$ は

$$(2.10)\qquad t_1(x',\xi') = a(x')|\xi'| + \sqrt{-1}\sum_{j=1}^{n-1}\alpha^j(x')\xi_j$$

に等しいことが従う．ここで，$\alpha^j(x')$ $(1\leqq j\leqq n-1)$ はベクトル場 α の成分を表わす．

4) 定理2.4によって，擬微分作用素 T, T^* が境界 ∂D 上で Subelliptic であるためには，定理1の条件 $(B)_\delta$ が成り立つことが必要かつ十分であることがわかる．

実際，以下の事実 1°〜6° に注意すればよい：

1° Ω が境界のない compact な C^∞-多様体の場合，(2.8)式が局所的に成立していれば，$0 \leqq \delta' < 1$ ということから，1の分解によって (2.8)式が Ω 全体で成立することが従う．

2° 定理2.4の主張 i) において作用素 P の代わりに作用素 $-\sqrt{-1}\,P$ を考えてもよいから，定理2.4の主張 ii) において $\mathrm{Re}\, p^0 \leftrightarrow \mathrm{Im}\, p^0$，$\mathrm{Im}\, p^0 \leftrightarrow -\mathrm{Re}\, p^0$ とそれぞれ交換してよい．

3° 擬微分作用素 T の Characteristic Set Σ は，(2.10)式によって

$$\Sigma = \left\{ (x', \xi') \in T^*\partial D \setminus 0 \;;\; a(x') = 0,\; \sum_{j=1}^{n-1} \alpha^j(x')\xi_j = 0 \right\}$$

で与えられるから，

$$H_{\mathrm{Re}\, t_1} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial a}{\partial x_j} |\xi'| \frac{\partial}{\partial \xi_j} \quad \text{on } \Sigma$$

となり，任意の多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)$，$\beta = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r)$ に対して

$$H^{\alpha}_{\mathrm{Im}\, t_1} H^{\beta}_{\mathrm{Re}\, t_1} \mathrm{Re}\, t_1 = \sum_{k=1}^{|\alpha|} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \alpha^j \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^k a \cdot h_k \quad \text{on } \Sigma$$

を得る．ここで，$h_k \in C^\infty(T^*\partial D \setminus 0)$．従って，定理 2.4 の条件 (2.9) がみたされるためには，

$$\alpha(x') \neq 0 \quad \text{on } M = \{ x' \in \partial D \,;\, a(x') = 0 \}$$

であって，さらに，M の各点 x' に対して

$$\left(\sum_{j=1}^{n-1} \alpha^j(x') \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^k (a(x')) \neq 0$$

をみたす非負整数 k が存在し，そのような k のうち最小の整数を $k(x')$ とおくと

$$\sup_{x' \in M} k(x') < \infty$$

が成り立つことが必要かつ十分である．

4° $\alpha(x') \neq 0$ on M ならば，(2.10) 式より

$$\mathrm{grad}_{x', \xi'} \, \mathrm{Im}\, t_1(x', \xi') \neq 0 \quad \text{on } \Sigma.$$

5° $\mathrm{Im}\, t_1$ の Bicharacteristic Curve はベクトル場 α の積分曲線と一致する．

6° T の形式的共役作用素 T^* の主シンボルは

$$\overline{t_1(x', \xi')} = a(x')|\xi'| - \sqrt{-1}\sum_{j=1}^{n-1}\alpha^j(x')\xi_j$$

に等しい.

5) 条件 (C) が成立しなければ, i.e., $c(x) \equiv 0$ in D ならば, 明らかに $u \equiv \text{Constant}\ (\neq 0)$ は

$$\begin{cases} Au = 0 & \text{in } D, \\ Bu = 0 & \text{on } \partial D \end{cases}$$

をみたすから, 問題(*)に対して解の一意性が成立しない.

以上によって, 条件 $(B)_\delta$, (C) の必要性が示され, 定理1の i) ⇒ ii) の部分の証明が終った.

<u>定理1の証明</u> ii) ⇒ i): まず, 問題(*)の解に対する<u>一意性</u>を示そう: 上の 4) でのべたように, 条件 $(B)_\delta$ が成り立てば, 擬微分作用素 T は ∂D 上で Subelliptic だから, 任意の $s \in \mathbf{R}$ に対して

$$\varphi \in \mathcal{D}'(\partial D),\ T\varphi \in H^{s-3/2}(\partial D) \Rightarrow \varphi \in H^{s-3/2+\delta}(\partial D).$$

従って, 命題 2.1 により, 問題(*)の解に対して正則性が成り

立つ．特に，Sobolevの補題により，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$u \in H^t(D),\quad Au = 0 \text{ in } D,\quad Bu = 0 \text{ on } \partial D$$
$$\Rightarrow\ u \in C^\infty(\overline{D})$$

を得る．よって，次の命題をみとめれば $u = 0$ が従い，問題(*)に対して解の一意性が示される．

<u>命題 2.5</u>　条件 $(B)_\delta$, (C) が成り立てば，

$$u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D}),\quad Au = 0 \text{ in } D,\quad Bu = 0 \text{ on } \partial D$$
$$\Rightarrow\ u = 0 \text{ in } D.$$

命題2.5はより一般的な形であとで証明する．定理3.10を見よ．

次に，問題(*)の<u>可解性</u>を示そう：　a) Agmon-Nirenberg に示唆されて，単位円 $S = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ を補助的に導入して，問題(*)に付随して次の問題を考えよう：

$$(\widetilde{*})\qquad \begin{cases} \left(A + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\tilde{u} = \tilde{f} & \text{in } D \times S, \\ B\tilde{u} = \tilde{\varphi} & \text{on } \partial D \times S. \end{cases}$$

ここで，$y \in S$ である．

注意 2.6　正確にいえば，単位円を導入する上の方法は，〔1〕，〔9〕にのべられている Agmon-Nirenberg 本来の方法とは見かけ上違うが，仮想的に一変数つけ加えて考えるという点で本質的に同じである．この修正は藤原〔5〕による．

さて，任意の $\tilde{f} \in H^{s-2}(D \times S)$ と $\tilde{\varphi} \in H^{s-\frac{1}{2}}(\partial D \times S)$ $(s \geqq 2)$ に対して，Dirichlet 問題：

$$\begin{cases} \left(A + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\tilde{u} = \tilde{f} & \text{in } D \times S, \\ \tilde{u}|_{\partial D \times S} = \tilde{\varphi} & \text{on } \partial D \times S \end{cases}$$

は一意的な解 $\tilde{u} \in H^s(D \times S)$ をもつから，(2.1)式，(2.2)式と同様にして，連続作用素

$$\tilde{G} : H^{s-2}(D \times S) \longrightarrow H^s(D \times S) \quad (s \geqq 2),$$

$$\tilde{P} : H^{t-\frac{1}{2}}(\partial D \times S) \longrightarrow H^t(D \times S) \quad (t \in \mathbb{R})$$

を次式で定義することができる：

$$\begin{cases} \left(A + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\tilde{G}\tilde{f} = \tilde{f} & \text{in } D \times S, \\ \tilde{G}\tilde{f}|_{\partial D \times S} = 0 & \text{on } \partial D \times S. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(A + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\tilde{P}\tilde{\varphi} = 0 & \text{in } D \times S, \\ \tilde{P}\tilde{\varphi}|_{\partial D \times S} = \tilde{\varphi} & \text{on } \partial D \times S. \end{cases}$$

さらに，$T = BP$ のときと同様にして，$\widetilde{T} = B\widetilde{P}$ は境界 $\partial D \times S$ 上の一階の擬微分作用素となるから，<u>閉作用素</u> $\widetilde{\mathfrak{T}}$：$H^{s-3/2+\delta}(\partial D \times S) \longrightarrow H^{s-3/2}(\partial D \times S)$ を次式で定義することができる：

$\widetilde{\alpha}$）　$\widetilde{\mathfrak{T}}$ の定義域 $\mathcal{D}(\widetilde{\mathfrak{T}}) = \{ \widetilde{\varphi} \in H^{s-3/2+\delta}(\partial D \times S) ;\ \widetilde{T}\widetilde{\varphi} \in H^{s-3/2}(\partial D \times S) \}$.

$\widetilde{\beta}$）　$\widetilde{\mathfrak{T}}\widetilde{\varphi} = \widetilde{T}\widetilde{\varphi}$，$\widetilde{\varphi} \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathfrak{T}})$.

このとき，前と同様に，問題$(\widetilde{*})$に対する解の存在，一意性，正則性などの問題はすべて作用素 $\widetilde{\mathfrak{T}}$ に対するそれらの問題へと帰着されるが，われわれにとって重要なのは，問題$(\widetilde{*})$と問題$(*)$との関係を与える次の結果である：

<u>命題 2.7</u>　作用素 $\widetilde{\mathfrak{T}}$ の Index が有限，すなわち，$\widetilde{\mathfrak{T}}$ の核 $N(\widetilde{\mathfrak{T}})$ が有限次元であって，さらに，像 $R(\widetilde{\mathfrak{T}})$ が閉じていて，その余次元が有限ならば，作用素 $\mathfrak{T}$ の Index は<u>ゼロ</u>である．

命題 2.7 はより一般的な形であとで証明する．注意 4.5 を見よ．

b)　$T = BP$ のときと同様にして，擬微分作用素 $\widetilde{T} = B\widetilde{P}$

の主シンボル $\widetilde{t}_1(x', \xi', y, \eta)$ を計算すると（(2.10)式を参照），

$$\widetilde{(2.10)} \quad \widetilde{t}_1(x', \xi', y, \eta) = a(x')\sqrt{|\xi'|^2 + \eta^2} + \sqrt{-1}\sum_{j=1}^{n-1} \alpha^j(x')\xi_j$$

で与えられる．ここで，(x', ξ', y, η) は余接バンドル $T^*\partial D \times T^*S = T^*(\partial D \times S)$ の局所座標である．

従って，前と同様に，定理 2.4 を擬微分作用素 $\widetilde{T}, \widetilde{T}^*$ に適用すれば，次のことがわかる：

作用素 $\widetilde{T}, \widetilde{T}^*$ が境界 $\partial D \times S$ 上で Subelliptic である，すなわち，次の２つの不等式 (2.11), $(2.11)^*$ が成り立つためには，条件 $(B)_\delta$ が成り立つことが必要かつ十分である．(注2)

$$(2.11) \quad |\widetilde{\varphi}|_{H^{s-3/2+\delta}(\partial D \times S)} \leqq \widetilde{C}\left(|\widetilde{T}\widetilde{\varphi}|_{H^{s-3/2}(\partial D \times S)} + |\widetilde{\varphi}|_{H^{s-3/2}(\partial D \times S)}\right), \quad \widetilde{\varphi} \in \mathcal{D}(\partial D \times S).$$

$$(2.11)^* \quad |\widetilde{\psi}|_{H^{-s+3/2}(\partial D \times S)} \leqq \widetilde{C}^*\left(|\widetilde{T}^*\widetilde{\psi}|_{H^{-s+3/2-\delta}(\partial D \times S)} + |\widetilde{\psi}|_{H^{-s+3/2-\delta}(\partial D \times S)}\right), \quad \widetilde{\psi} \in \mathcal{D}(\partial D \times S).$$

さらに，前と同様に補題 2.3 を使えば，(2.11)式より，任

意の $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathfrak{T}})$ に対して $\mathcal{D}(\partial D \times S')$ の列 $\{\widetilde{\varphi}_j\}_{j=1}^{\infty}$ を選んで $\widetilde{\varphi}_j \longrightarrow \widetilde{\varphi}$ in $H^{s-3/2+\delta}(\partial D \times S')$, $\widetilde{T}\widetilde{\varphi}_j \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{T}}\widetilde{\varphi}$ in $H^{s-3/2}(\partial D \times S')$ とできるから, (2.11) 式が任意の $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathfrak{T}})$ に対して成立することが従う. また, 前と同様にして, $\widetilde{\mathfrak{T}}$ の共役作用素 $\widetilde{\mathfrak{T}}^* : H^{-s+3/2}(\partial D \times S') \longrightarrow H^{-s+3/2-\delta}(\partial D \times S')$ を具体的に

$\widetilde{\gamma}$) $\widetilde{\mathfrak{T}}^*$ の定義域 $\mathcal{D}(\widetilde{\mathfrak{T}}^*) = \{\widetilde{\psi} \in H^{-s+3/2}(\partial D \times S')\ ;\ \widetilde{T}^*\widetilde{\psi} \in H^{-s+3/2-\delta}(\partial D \times S')\}$,

$\widetilde{\delta}$) $\widetilde{\mathfrak{T}}^*\widetilde{\psi} = \widetilde{T}^*\widetilde{\psi}$, $\widetilde{\psi} \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathfrak{T}}^*)$

で特徴付けることができるので, 再び補題 2.3 を使って, $(2.11)^*$ 式が任意の $\widetilde{\psi} \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathfrak{T}}^*)$ に対して成立することが従う.

c) 条件 $(B)_\delta$ が成り立っていれば, 作用素 $\widetilde{\mathfrak{T}}$ の Index は有限, 従って, 命題 2.7 によって作用素 $\mathfrak{T}$ の Index はゼロであることを示そう.

そのために, いわゆる Peetre の補題 (例えば [9]) を拡張しよう:

<u>補題 2.8</u>　X, Y, Z を Banach 空間とし, $X \hookrightarrow Z$ は完全連続とする. $T: X \longrightarrow Y$ は閉作用素であって, その

定義域を $D(T)$ で表わす．このとき，次の２つの主張は同値である．

i)　T の核 $N(T)$ は有限次元であって，像 $R(T)$ は Y で閉じている．

ii)　ある定数 $C>0$ が存在して，すべての $x \in D(T)$ に対して，不等式：

$$(2.12) \qquad |x|_X \leqq C \left(|Tx|_Y + |x|_Z \right)$$

が成り立つ．

<u>証明</u>　i) $\Rightarrow$ ii)：　$X_0 = N(T)$ とおく．$\dim X_0 < \infty$ より，X を X_0 とその補空間 X_1 との直和に分解することができる：　$X = X_0 \oplus X_1$．そこで，閉作用素 T を $D(T) \cap X_1$ に制限して考えれば，像 $R(T)$ が Y で閉じていることから閉グラフ定理が使えて，ある定数 $c>0$ が存在して，不等式

$$|x_y|_X \leqq c\,|Tx_y|_Y \,, \quad x_y \in D(T) \cap X_1$$

が成り立つ．従って，$x \in D(T)$ を $x = x_y + x_y'$，$x_y \in D(T) \cap X_1$，$x_y' \in X_0$ と分解すれば（$Tx_y = Tx$ に注意），有限次元空間 X_0 上のノルムの同値性から，

$$|x|_X \leqq |x_y|_X + |x_y'|_X \leqq c' \left(|Tx|_Y + |x_y'|_Z \right)$$

を得る．また，$X \hookrightarrow Z$ は（完全）連続だから，

$$|x_y'|_Z \leqq |x|_Z + |x_y|_Z \leqq |x|_Z + c'' |x_y|_X .$$

以上から，不等式（2.12）が従う．

ii) ⇒ i)：　まず，(2.12)式により，$X_0 = N(T)$ 上では不等式

$$|x|_X \leqq C\, |x|_Z$$

が成り立ち，$X \hookrightarrow Z$ の完全連続性により，$\dim X_0 < \infty$ を得る．

次に，不等式：

$$(2.13) \qquad |x|_X \leqq c\, |Tx|_Y , \quad x \in D(T) \cap X_1$$

を示そう．これから，像 $R(T)$ が Y で閉じていることが従う．実際，$R(T)$ の点列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して $y_n \longrightarrow y$ in Y を仮定すると，各 y_n に対して $Tx_n = y_n$ なる元 $x_n \in D(T) \cap X_1$ を選ぶことができるが，このとき，点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は (2.13)式によって X における Cauchy 列になる．従って，$x_n \longrightarrow x$

in X とすると，T は閉作用素であるから $x \in D(T)$, $Tx = y$, i.e., $y \in R(T)$ を得る．

(2.13) 式の証明は背理法による：否定すると，$|x_n|_X = 1$, $Tx_n \longrightarrow 0$ in Y $(n \to \infty)$ をみたす $D(T) \cap X_1$ の列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する．$X \hookrightarrow Z$ の完全連続性によって，列 $\{x_n\}$ の適当な部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ が Z における Cauchy 列をなすが，さらに，(2.12) 式によって，X においても Cauchy 列をなすことがわかる．そこで，$x_{n_k} \longrightarrow x$ $(k \to \infty)$ とすると，T は閉作用素であるから，$x \in D(T)$, $Tx = 0$, i.e., $x \in N(T) = X_0$ が従うが，他方，X_1 が X で閉じていることから，$x \in X_1$ が従い，結局，$x \in X_0 \cap X_1 = \{0\}$ を得る．これは，$|x|_X = \lim_k |x_{n_k}|_X = 1$ に矛盾する．

Q.E.D.

さて，$0 < \delta \leqq 1$ であるから，Rellich の定理によって $H^{s-3/2+\delta}(\partial D \times S) \hookrightarrow H^{s-3/2}(\partial D \times S)$ が完全連続になることに注意して，補題 2.8 を $T \leftrightarrow \tilde{\mathfrak{T}}$, $X \leftrightarrow H^{s-3/2+\delta}(\partial D \times S)$, $Y \leftrightarrow H^{s-3/2}(\partial D \times S)$, $Z \leftrightarrow H^{s-3/2}(\partial D \times S)$ として使えば，不等式 (2.11) により（b)の結果に注意）

$$\dim N(\tilde{\mathfrak{T}}) < \infty$$

であって，像 $R(\tilde{\mathcal{J}})$ が閉じていることが従う．同様に，補題 2.8 を $T \leftrightarrow \tilde{\mathcal{J}}^*$，$X \leftrightarrow H^{-s+3/2}(\partial D \times S^1)$，$Y \leftrightarrow H^{-s+3/2-\delta}(\partial D \times S^1)$，$Z \leftrightarrow H^{-s+3/2-\delta}(\partial D \times S^1)$ として使えば，$R(\tilde{\mathcal{J}})$ が閉じていることから，不等式 $(2.11)^*$ により

$$\operatorname{codim} R(\tilde{\mathcal{J}}) = \dim N(\tilde{\mathcal{J}}^*) < \infty$$

が従う．よって，作用素 $\tilde{\mathcal{J}}$ の Index は有限であることが示された．

d) 条件 $(B)_\delta$ が成り立っていれば，c) の結果と命題 2.7 によって，作用素 $\mathcal{J}$ の Index はゼロ，i.e.，$\dim N(\mathcal{J}) - \operatorname{codim} R(\mathcal{J}) = 0$ であることが従うが，さらに，条件 (C) を仮定すれば，（すでにのべたように）問題(*)に対する解の一意性が成り立ち，$\dim N(\mathcal{J}) = 0$ となるから，$\operatorname{codim} R(\mathcal{J}) = 0$，すなわち，$\mathcal{J}$ が onto であることが従う．これから，問題(*)に対する可解性を得る．

以上で，条件 $(B)_\delta$，(C) の十分性が示された．定理 1 は（命題 2.5，命題 2.7 の証明を除いて）完全に証明された．

<u>定理2の証明</u>　定理2.4の代わりに次にのべる Melin-Sjöstrand による結果を使い、命題2.5の代わりに §3の定理3.10を使えば、定理1の ii) ⇒ i) の部分の証明とほとんど同じであるが、今の場合 $\delta=0$ であるので、補題2.8を適用する際に、$X \hookrightarrow Z$ が完全連続になるように、例えば $T \leftrightarrow \tilde{\mathcal{J}}$ のときは $Z \leftrightarrow L^2(\partial D \times S^1)$ に、$T \leftrightarrow \tilde{\mathcal{J}}^*$ のときは $Z \leftrightarrow H^{-s+1/2}(\partial D \times S^1)$ ($s \geqq 2$ に注意) にそれぞれとり直す必要がある。(注3)

<u>定理2.9</u> ([10])　X を境界のない compact な n 次元 C^∞-多様体、$P(x, D_x) = m(x, D_x) + \sqrt{-1}\,Q(x, D_x)$ を X 上の一階の擬微分作用素とする。ただし、$m(x, \partial/\partial x)$ は X 上のなめらかな実ベクトル場、Q は X 上の一階の classical, properly supported な擬微分作用素であって、その主シンボル $q(x, \xi)$ は実数値とする。

次の条件を仮定しよう：

—— ベクトル場 m は集合 $K = \{x \in X ;\ q(x, \xi) = 0,\ \xi \neq 0\}$ 上でゼロにはならない。

—— m のいかなる極大な積分曲線も<u>完全には</u> K には含まれない。

—— $q(x, \xi) \geqq 0$ あるいは $q(x, \xi) \leqq 0$.

このとき，作用素 P は両側の Parametrix E をもち，任意の $s \in \mathbb{R}$ に対して $E : H^s(X) \to H^s(X)$ は連続である：

$$P E \equiv E P \equiv I.$$ (注4)

ここで，$A \equiv B$ とは，$A - B$ がなめらかな積分核をもつ作用素であることを意味する．

注意 2.10　定理 2.9 における作用素 P の Parametrix E は，形式的には，例えば $q \leqq 0$ の場合

$$(2.14) \quad \begin{cases} (D_t + P) A_t \equiv 0 & \left(D_t = \dfrac{1}{\sqrt{-1}} \dfrac{\partial}{\partial t} \right), \\ A_0 \equiv I \end{cases}$$

をみたす Fourier 積分作用素の族 $\{A_t\}_{0 \leqq t < +\infty}$ $(A_t = e^{-\sqrt{-1}\, t P})$ をもとめて，

$$E = \sqrt{-1} \int_0^{+\infty} A_t \, dt$$

とおけばよいが，これは，定理 2.9 の条件がみたされているならば，実際に次のようにして意味付けられる（詳しくは，[10]を参照されたい）：

1° 恒等作用素 I を X の余接球バンドル S^*X において "曲面波" $\{\pi_\alpha\}_{\alpha \in S^*X}$ に分解する．

$$I \equiv \int_{S^*X} \Pi_\alpha \, d\alpha .$$

従って，（2.14）を解くには，各 Π_α に対して，

$$(2.15) \qquad \begin{cases} (D_t + P) A_{t,\alpha} \equiv 0 , \\ \qquad\qquad A_{0,\alpha} \equiv \Pi_\alpha \end{cases}$$

をみたす Fourier 積分作用素の族 $\{A_{t,\alpha}\}_{0 \leqq t < +\infty}$ をもとめて，

$$A_t = \int_{S^*X} A_{t,\alpha} \, d\alpha$$

と重ね合わせればよい．

2° ベクトル場 m が集合 $K = \{x \in X ; \ q(x, \xi) = 0, \ \xi \neq 0\}$ 上でゼロにならず，$q \leqq 0$ ならば，各 Π_α に対して (2.15) の解 $A_{t,\alpha}$ がある有限区間：$0 \leqq t < t_+(\alpha)$ で存在することがいえる．さらに，m のいかなる極大な積分曲線も完全には K には含まれないならば，ある $T_+(\alpha) < t_+(\alpha)$ が存在して，$t > T_+(\alpha)$ に対しては作用素 $A_{t,\alpha}$ がなめらかな積分核をもつことがいえるので，積分：

$$E = \sqrt{-1} \int_0^{+\infty} \int_{S^*X} A_{t,\alpha} \, d\alpha \, dt$$

が意味をもち，作用素 P に対する両側の Parametrix になる．

§3. 最大値の原理

この節では，D は $\mathbb{R}^n$ の連結開集合であって，その境界 ∂D は必ずしもなめらかとは限らないとする．さらに，考える作用素

$$(3.1) \qquad A = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x)$$

は実数値係数をもつ D 上の二階の微分作用素であって，次の条件をみたしているとする：

1° $a^{ij} \in C^\infty(D)$; $a^{ij} = a^{ji}$ $(1 \leqq i, j \leqq n)$,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \geqq 0, \quad x \in D, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n.$$

2° $b^i \in C^\infty(D)$ $(1 \leqq i \leqq n)$

3° $c \in C^\infty(D)$; $c(x) \leqq 0$ in D.

(微分作用素 A は必ずしも楕円型とは限らないことに注意.)

1) われわれの最初の目的は，最大値の伝播に関する次の Oleĭnik – Radkevič の結果を示すことである．証明の本質的なアイデアは Bony [3] による．

定理 3.1 ([11]) 次を仮定する:

$$(3.2) \qquad u \in C^2(D), \quad Au \geqq 0 \ \ \text{in } D, \quad N = \sup_{x \in D} u(x) \geqq 0.$$

このとき，ベクトル場 $\pm X_j = \pm \sum_{k=1}^{n} a^{jk} \frac{\partial}{\partial x_k}$ $(1 \leqq j \leqq n)$ の積分曲線 $x(t)$ が，ある t_0 に対して $x(t_0) \in F = \{x \in D;\ u(x) = N\}$ ならば，すべての $t \geqq t_0$ に対して $x(t) \in F$ である．

注意 3.2 微分作用素 A が D で楕円型ならば，ベクトル場 $\{X_j\}_{j=1}^{n}$ はベクトル場 $\{\frac{\partial}{\partial x_j}\}_{j=1}^{n}$ と同値になるから，定理 3.1 によって，u が最大値 N を D の点 x_0 でとれば，N は D 全体に伝わり $u \equiv N$ in D を得る．より詳しく次の定理が成り立つ．

定理 3.3 ベクトル場 $X_j = \sum_{k=1}^{n} a^{jk} \frac{\partial}{\partial x_k}$ $(1 \leqq j \leqq n)$ によって $\mathbb{R}$ 上生成される Lie algebra $\mathcal{L}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ の階数が D の各点で n とする，すなわち，

$$\dim \mathcal{L}(X_1, X_2, \cdots, X_n) = n \quad \text{in } D.$$

このとき，(3.2) をみたす u が最大値 N を D の点 x_0 でとれば，$u \equiv N$ in D である．

定理 3.3 は，次の定理に注意すれば，定理 3.1 から従う．

<u>定理 3.4</u>（Chow）(注5)　D上のベクトル場 $\{Y_j\}_{j=1}^{r}$ によって $\mathbb{R}$ 上生成される Lie algebra $\mathcal{L}(Y_1, Y_2, \cdots, Y_r)$ の階数が D の点 x_0 で n ならば，x_0 の近傍 V が存在して，V 内の任意の点 x は x_0 とベクトル場 $\pm Y_j$ $(1 \leqq j \leqq r)$ の有限個の積分曲線からなる鎖によって結べる．

<u>定理 3.1 の証明</u>　証明は背理法による．補題を4つほど準備しよう．

<u>補題 3.5</u>　$u \in C^2(D)$，$N = \sup_{x \in D} u(x) \geqq 0$ とする．このとき，u が最大値 N を D の点 x_0 でとれば，$Au(x_0) \leqq 0$ である．

<u>証明</u>　まず，n 次実対称行列 A, B が非負定値ならば，$\mathrm{tr}(AB) \geqq 0$ であることを示そう：そのためには，$\mathrm{tr}(AB)$ は行列 AB の固有値 λ の和に等しいから，$\lambda \geqq 0$ を示せばよい．$ABx = \lambda x$，$x \neq 0$ とすると，$\lambda(Bx, x) = (ABx, Bx) \geqq 0$ だから，$(Bx, x) > 0$ ならば，$\lambda \geqq 0$ を得る．また，

$(Bx, x) = 0$ ならば，$B \geqq 0$ であるから $Bx = 0$ が従い，$\lambda x = ABx = 0$，$x \neq 0$ より $\lambda = 0$ を得る．よって，$\lambda \geqq 0$ が示された．

さて，$A \longleftrightarrow (a^{ij}(x_0))_{1 \leqq i, j \leqq n}$，$B \longleftrightarrow -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\right)_{1 \leqq i, j \leqq n}$ として上の事実を適用すれば，

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x_0) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \leqq 0 .$$

従って，$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0) = 0 \quad (1 \leqq i \leqq n)$，$c(x_0) \leqq 0$ に注意すれば，

$$A u(x_0) \leqq 0$$

を得る．　　Q.E.D.

補題 3.6　(3.2) を仮定する．$F = \{ x \in D ; u(x) = N \}$ の点 x_0 に対して，中心 x_1，半径 ρ，球面 S を境界とする開球 Q を選んで，$x_0 \in S$，$Q \cup S \subset D$，$(Q \cup S) \cap F = \{x_0\}$ をみたすようにできるとする．このとき，ベクトル $X_j(x_0) = (a^{1j}(x_0), a^{2j}(x_0), \ldots, a^{nj}(x_0))$ $(1 \leqq j \leqq n)$ はベクトル $x_1 - x_0 = (x_1^1 - x_0^1, x_1^2 - x_0^2, \ldots, x_1^n - x_0^n)$ と直交する．

証明　　$a(x_0, x_1 - x_0) \equiv \sum_{k,j=1}^{n} a^{kj}(x_0)(x_1^k - x_0^k)(x_1^j - x_0^j)$

$$= 0$$

を示せば、 $\sum_{k,j=1}^{n} a^{kj}(x)\xi_k\xi_j \geqq 0,\ x \in D,\ \xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ より

$$\sum_{k=1}^{n} a^{kj}(x_0)(x_1^k - x_0^k) = 0 \qquad (1 \leqq j \leqq n)$$

が従い、ベクトル $X_j(x_0)$ $(1 \leqq j \leqq n)$ がベクトル $x_1 - x_0$ と直交することがわかる。

そこで、 $a(x_0, x_1 - x_0) \geqq 0$ だから、

$$(3.3) \qquad a(x_0, x_1 - x_0) > 0$$

を仮定すれば矛盾が導かれることを示そう。

定数 $q > 0$ に対して

$$v(x) = e^{-q|x - x_1|^2} - e^{-q\rho^2}$$

とおくと、

$$Av(x_0) = e^{-q\rho^2}\left[4q^2 a(x_0, x_1 - x_0) - 2q\sum_{k=1}^{n}\left(a^{kk}(x_0) + b^k(x_0)(x_0^k - x_1^k)\right)\right]$$

だから、仮定 (3.3) より、q が十分大ならば、 $Av(x_0) > 0$ を得る。従って、x_0 を中心とする開球 $Q_1 \subset D$ が存在して、

$$Av > 0 \quad \text{in } Q_1 .$$

よって，定数 $\varepsilon>0$ に対して

$$w(x) = u(x) + \varepsilon v(x)$$

とおけば，(3.2) より $Au \geqq 0$ in D だから，

$$(3.4) \qquad Aw > 0 \quad \text{in } Q_1$$

が従う．

さらに，仮定から $(\overline{Q} \cup S) \cap F = \{x_0\}$ だから，開球 Q_1 の球面を S_1 で表わすと，x_1 から $S_1 \cap F$ への距離は Q の半径 ρ よりも大きく，

$$v(x) \leqq \text{Constant} < 0, \quad x \in S_1 \cap F$$

である．従って，$S_1 \cap F$ の近傍 σ_1 が存在して

$$w(x) < N, \quad x \in \sigma_1 .$$

一方，$S_1 \setminus \sigma_1$ では，ある定数 $\delta>0$ が存在して $u(x) \leqq N-\delta$ だから，ε が十分小ならば

$$w(x) < N, \quad x \in S_1 \setminus \sigma_1 .$$

以上まとめて，ε が十分小ならば

$$(3.5) \qquad w(x) < N \quad \text{on } S_1$$

が成りたつ.

そこで, $u(x) \longleftrightarrow w(x) - N$ として補題3.5を適用すれば, (3.4), (3.5) より

$$w(x) < N \quad \text{in } Q_1$$

を得るが, これは $w(x_0) = N,\ x_0 \in Q_1$ に矛盾する.

Q.E.D.

<u>補題3.7</u> (3.2) を仮定する. $x(t)$ はベクトル場 $\pm X_j = \pm \sum_{k=1}^{n} a^{jk} \frac{\partial}{\partial x_k}$ $(1 \leqq j \leqq n)$ の積分曲線であって, ある t_0 に対して $x(t_0) \in F = \{ x \in D;\ u(x) = N \}$ とする. このとき, $x(t)$ と F との距離 $\delta(t) = \inf_{y \in F} |x(t) - y|$ が

$$\delta(t) > 0, \qquad t_0 < t \leqq t_1$$

をみたせば, すべての $t \in [t_0, t_1]$ に対して

$$\varliminf_{h \to 0} \frac{\delta(t+h) - \delta(t)}{|h|} \geqq -K\, \delta(t)$$

が成り立つ. ここで, $K > 0$ は定数である.

証明　$\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $h_n \to 0\ (n\to\infty)$ をみたす任意の数列として，$x_n = x(t+h_n)$ とおこう．われわれは $x = x(t)$ の十分近くで考える．y_n で x_n の $\bar{F}$ への射影 $\left(|x_n - y_n| = \inf_{z\in\bar{F}} |x_n - z| = \delta(t+h_n)\right)$ を表わすと，$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ の適当な部分列 $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ が存在して $\bar{F}$ の点 y に収束する：$y_{n_k} \to y\ (k\to\infty)$．このとき，明らかに y は x の $\bar{F}$ への射影 $\left(|x-y| = \inf_{z\in\bar{F}} |x-z| = \delta(t)\right)$ である．従って，$X_j(x)$ と $(y-x)$ のなす角を γ とすると，

$$(3.6)\qquad \frac{\delta(t+h_{n_k}) - \delta(t)}{|h_{n_k}|} = \frac{|y_{n_k} - x_{n_k}| - |y-x|}{|h_{n_k}|}$$

$$\geqq -|X_j(x)|\,|\cos\gamma| - K(t)\,|h_{n_k}|$$

が成り立つ．ただし，$K(t) > 0$ は t に依存する定数である．

ところで，仮定から $\delta(t) = |x-y| > 0$ だから，補題 3.6 によって $X_j(y)$ と $(x-y)$ とが直交することがわかり，$X_j(x)$ と $X_j(y)$ のなす角を γ_1 とすれば，

$$|\cos\gamma| = |\sin\gamma_1|$$

が従う．よって，

$$(3.7)\qquad |X_j(x)\cos\gamma| = |X_j(x)\sin\gamma_1|$$

$$\leqq |X_j(x) - X_j(y)|$$

$$\leqq K\,|x-y|$$
$$= K\,\delta(t)$$

を得る．ただし，$K>0$ は $X_j(x)$ に対する Lipschitz 定数である．

従って，(3.7)式を(3.6)式の右辺に代入して $k\to\infty$ とすれば，所期の式：

$$\varliminf_{h\to 0}\frac{\delta(t+h)-\delta(t)}{|h|}\geqq -K\,\delta(t)$$

を得る．　　　　　　　　　　　　　　Q. E. D.

補題 3.8　関数 $f(t)$ が閉区間 $[t_1,t_2]$ で連続であって，さらに，定数 $K>0$ に対して

(3.8)　$$\varliminf_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{|h|}\geqq -K,\quad t\in[t_1,t_2]$$

をみたせば，f は $[t_1,t_2]$ において K を Lipschitz 定数として Lipschitz 連続である．

証明　背理法による：　ある $s_1,s_2\in[t_1,t_2]$ と $\varepsilon>0$ が存在して

(3.9) $$\left|\frac{f(s_1)-f(s_2)}{s_1-s_2}\right| \geqq K+\varepsilon$$

ならば，矛盾に導かれることを示そう．

$f(t)$ は $[t_1, t_2]$ で連続だから，仮定 (3.9) により，ある $\rho_0>0$ が存在して $|t'-s_1|\leqq \rho_0$，$|t''-s_2|\leqq\rho_0$ ならば，

(3.10) $$\left|\frac{f(t')-f(t'')}{t'-t''}\right| \geqq K+\frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．

一方，仮定 (3.8) によって，各 $\tau\in[t_1,t_2]$ に対して定数 $0<\rho(\tau)\leqq\frac{\rho_0}{2}$ が存在して，$|t-\tau|\leqq\rho(\tau)$ ならば

$$\left|\frac{f(t)-f(\tau)}{t-\tau}\right| \leqq K+\frac{\varepsilon}{4}$$

を得る．従って，$[t_1,t_2]$ が compact だから，適当な有限個の点 $\tau_1<\tau_2<\cdots<\tau_N$ と定数 $0<\rho(\tau_i)<\frac{\rho_0}{2}$ $(1\leqq i\leqq N)$ を選べば，

$$[t_1, t_2] \subset \bigcup_{i=1}^{N}\{t\,;\,|t-\tau_i|\leqq\rho(\tau_i)\},$$

(3.11) $$\left|\frac{f(t)-f(\tau_i)}{t-\tau_i}\right| \leqq K+\frac{\varepsilon}{4}, \qquad |t-\tau_i|\leqq\rho(\tau_i)$$

が成り立つ．さらに，幾何学的意味を考えてみれば，容易に

(3.12) $$\left|\frac{f(\tau_k)-f(\tau_s)}{\tau_k-\tau_s}\right| \leqq K+\frac{\varepsilon}{4},\quad k\neq s,\quad 1\leqq k\leqq N,\quad 1\leqq s\leqq N$$

であることもわかる．

よって，S_1 が τ_i を中心とする $\rho(\tau_i)$－近傍に，S_2 が τ_j を中心とする $\rho(\tau_j)$－近傍に含まれているとすると，$\tau_i=\tau_j$ ならば (3.11) 式によって，また，$\tau_i \neq \tau_j$ ならば (3.12) 式によって，ある t', t'' に対して (3.10) 式が成り立たないことがわかり，矛盾を得る．　　　　　　Q.E.D.

<u>定理 3.1 の証明</u>（続き）　ある閉区間 $[t_1, t_2]$ が存在して，

$$x(t_1) \in F, \quad x(t) \notin F, \quad t_1 < t \leqq t_2 \tag{3.13}$$

ならば，矛盾に導かれることを示そう．

(3.13) を仮定すれば，補題 3.7 と補題 3.8 によって，ある定数 $K>0$ が存在し，任意の閉区間 $[t', t''] \subset [t_1, t_2]$ に対して

$$|\delta(t+h) - \delta(t)| \leqq K\,|h| \max_{t\in[t',t'']} \delta(t), \qquad t,\ t+h \in [t', t''] \tag{3.14}$$

が成り立つ．従って，$|h| \leqq \dfrac{1}{2K}$ をみたすように $h>0$ をとり，(3.14) 式で $t' \leftrightarrow t_1$, $t'' \leftrightarrow t_1+h$, $t \leftrightarrow t_1$, $t+h \leftrightarrow t$ とおけば，$\delta(t_1)=0$ だから

$$\delta(t) \leqq \frac{1}{2} \max_{t\in[t_1, t_1+h]} \delta(t), \qquad t \in [t_1, t_1+h]$$

を得る．これから $\delta(t)=0$, $t_1 \leqq t \leqq t_1+h$ が従い，仮定

(3.13) に矛盾する.

以上で, 定理3.1は証明された.

2) 次に, 最大値の原理が成り立っているときの函数 u の境界 ∂D での挙動を調べよう. 簡単のため, 境界 ∂D はなめらかとし, 微分作用素 A の係数については $a^{ij} \in C^\infty(\overline{D})$ $(1 \leqq i, j \leqq n)$, $b^i \in C^\infty(\overline{D})$ $(1 \leqq i \leqq n)$, $c \in C^\infty(\overline{D})$ とする.

定理3.9 次を仮定する:

(3.2)′ $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$, $Au \geqq 0$ in D, $N = \sup_{x \in D} u(x) \geqq 0$.

さらに, 境界 ∂D の点 x_0' が存在して

(3.15) $$u(x) < u(x_0'), \quad x \in D$$

が成り立っているとする.

このとき,

(3.16) $$(\nu, n) = \sum_{i=1}^{n} \nu_i n_i > 0 \quad \text{at } x_0',$$

(3.17) $$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \nu_i \nu_j > 0 \quad \text{at } x_0'$$

をみたすベクトル $\nu = (\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n)$ に沿っての微分 $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0')$

が存在すれば，

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0') > 0$$

である．

<u>証明</u>　仮定(3.16)によって，x_0' における局所座標 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を $x_0' \longleftrightarrow$ 原点，$\overline{D} = D \cup \partial D \longleftrightarrow \{x_n \geqq 0\}$，$-\nu \longleftrightarrow (0, \cdots, 0, 1)$ となるように選ぶことができる．定数 $\alpha > 0$, $\beta > 0$ に対して

$$v(x) = \alpha \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 - \beta x_n - x_n^2$$

とおこう．α, β はあとできめる．新しい座標 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ に関して微分作用素 A が再び(3.1)式で与えられるとすると，

$$Av(0) = 2\alpha \sum_{i=1}^{n-1} a^{ii}(0) - 2a^{nn}(0) - \beta b^n(0)$$

を得る．従って，仮定(3.17)によって $a^{nn}(0) > 0$ だから，α, β を十分小に選べば，原点の適当な近傍 V が存在して

(3.18)　　$Av < 0 \quad \text{in } V$

が成り立つ．

超曲面 $\{v=0\}$ と超平面 $\{x_n=\eta\}$ $(\eta>0)$ とで囲まれる領域を E で表わそう．ただし，η は $E\subset V$ をみたすように十分小に選ばれているとする．定数 $\varepsilon>0$ に対して

$$w(x) = \varepsilon\, v(x) - u(x) + u(0)$$

とおけば，仮定 (3.15) によって

$$u(0) = u(x_0') \geqq \sup_{x\in D} u(x) = N \geqq 0$$

だから，$(3.2)'$, (3.18) より

$$Aw = \varepsilon Av - Au + c\, u(0) < 0 \quad \text{in } E \tag{3.19}$$

が従う．さらに，仮定 (3.15) によって，ε が十分小ならば，

$$w \geqq 0 \quad \text{on } \partial E$$

を得る．ここで，∂E は E の境界を表わす．従って，補題 3.5 を $u \leftrightarrow -w$ として適用すれば，(3.19) によって，

$$w \geqq 0 \quad \text{in } E,$$

すなわち，

$$\varepsilon\, v(x) \geqq u(x) - u(0), \quad x\in E \tag{3.20}$$

を得る.

(3.20)式において $x=(0, x_n)$ とおけば, $v(0)=0$ より

$$\varepsilon\left(\frac{v(0,x_n)-v(0,0)}{x_n}\right) \geqq \frac{u(0,x_n)-u(0,0)}{x_n}, \quad x_n>0$$

が従い, $x_n \downarrow 0$ とすると,

$$\frac{\partial v}{\partial x_n}(0) = -\beta < 0$$

だから,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0') = -\frac{\partial u}{\partial x_n}(0) \geqq \varepsilon\beta > 0$$

を得る. Q.E.D.

3) 最後に, 応用として §1 の Oblique 問題 (*) に対する解の一意性定理を証明しよう.

$$(*)\quad \begin{cases} Au \equiv \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f \quad \text{in } D, \\ Bu \equiv a\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u\Big|_{\partial D} = \phi \quad \text{on } \partial D. \end{cases}$$

ここで,

—— 微分作用素 A は $\overline{D} = D \cup \partial D$ 上で一様に楕円型,

—— $\frac{\partial}{\partial \nu}$ は行列 $(a^{ij})_{1\leqq i,j\leqq n}$ に付随した外向き余法線微分

であったことを思い出そう.

主結果は次の定理である：

<u>定理3.10</u>　次の条件(A), (B)を仮定しよう．

(A) 函数 $a(x')$ は境界 ∂D 上符号を変えない．

(B) ベクトル場 α は集合 $M = \{x' \in \partial D;\ a(x') = 0\}$ 上でゼロにはならず，さらに，α のいかなる極大な積分曲線も<u>完全には</u> M には含まれない．

このとき，

$$
(3.21) \qquad u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D}),\ Au = 0 \text{ in } D,\ Bu = 0 \text{ on } \partial D \\
\Longrightarrow \quad u = 0 \text{ in } D
$$

であるための必要十分条件は，次の条件(C)が成り立つことである：

(C) 函数 $c(x)$ は D で恒等的にゼロではない．

<u>注意3.11</u>　注意1.1，注意1.2でのべたように，条件 $(B)_\delta$ が成立していれば，条件(A), (B)が成立するので，命題2.5は定理3.10からただちに従う．

<u>定理3.10の証明</u>　"必要性"：　$c(x) \equiv 0$ in D ならば，明らかに $u \equiv \text{Constant}\ (\neq 0)$ が

$$\begin{cases} Au = 0 & \text{in } D, \\ Bu = 0 & \text{on } \partial D \end{cases}$$

をみたすから，(3.21) は成立しない．

“十分性”： u が D で恒等的に定数ならば，条件 (C) より $u = 0$ in D を得るので，次のことを示せば十分である．

(3.21)′ $\quad u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$, $Au = 0$ in D, $Bu = 0$ on ∂D

$$\Longrightarrow \quad u \equiv \text{Constant} \quad \text{in } D.$$

<u>証明</u>　u が D で恒等的に定数ではないとすると矛盾に導かれることを示そう．

必要ならば，u の代わりに $-u$ を考えることにより

(3.22) $$0 \leqq \sup_{x \in D} u(x) \leqq \max_{x \in \overline{D}} u(x)$$

と仮定してよい．微分作用素 A は $\overline{D}$ 上で一様に楕円型だから，注意 3.2 によって

(3.23)　境界 ∂D の点 x_0' が存在して

$$\begin{cases} u(x_0') = \max_{x \in \overline{D}} u(x) \geqq 0, \\ u(x) < u(x_0'), \quad x \in D \end{cases}$$

が成り立つ．実際，$u(x_0) = \max_{x \in \overline{D}} u(x)$ となるような D の点 x_0 が存在すれば，(3.22) より $u(x_0) = \sup_{x \in D} u(x) \geqq 0$ であるから，注意3.2 によって $u \equiv \text{Constant}$ in D が従う．これは，u は D で恒等的に定数ではないという仮定に反する．

(3.23) によって定理3.9 が使えて（A は $\overline{D}$ で一様に楕円型，$u \in C^1(\overline{D})$ に注意），

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0') > 0 .$$

一方，$\alpha u(x_0') = 0$ に注意すれば，

$$\begin{aligned} a(x_0') \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0') &= a(x_0') \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0') + \alpha u(x_0') \\ &= Bu(x_0') \\ &= 0 . \end{aligned}$$

従って，$a(x_0') = 0$，すなわち，

$$x_0' \in M = \{ x' \in \partial D \, ; \, a(x') = 0 \}$$

を得る．

まず，$a(x') \geqq 0$ on ∂D の場合について考えよう：$t = 0$ のとき x_0' を通る α の積分曲線 $x(t, x_0')$ に対して

$$t^- = \sup \{ t < 0 \, ; \, x(t, x_0') \notin M \}$$

とおくと，条件(B)によって t^- は有限である．このとき，

$$x(t, x_0') \in M, \quad t^- \leqq t \leqq 0$$

だから，

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} u(x(t, x_0')) &= \alpha u(x(t, x_0')) \\
&= a(x(t, x_0')) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x(t, x_0')) + \alpha u(x(t, x_0')) \\
&= Bu(x(t, x_0')) \\
&= 0
\end{aligned}$$

が成り立ち，函数：$t \longrightarrow u(x(t, x_0'))$ は $[t^-, 0]$ において定数であることが従う．特に

$$(3.24) \qquad u(x(t^-, x_0')) = u(x_0') = \max_{x \in \bar{D}} u(x)$$

を得るから，再び定理3.9によって

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x(t^-, x_0')) > 0.$$

従って，$\delta > 0$ を十分小に選べば，$t^- - \delta < t < t^-$ に対して

$$\begin{aligned}
(3.25) \qquad \frac{d}{dt} u(x(t, x_0')) &= \alpha u(x(t, x_0')) \\
&= -a(x(t, x_0')) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x(t, x_0')) \leqq 0
\end{aligned}$$

であるから，函数：$t \longrightarrow u(x(t, x_0'))$ は $(t^- - \delta, t^-)$ において

単調減少であり，かつ (3.25) 式の右辺が真に負になる点が存在する．これは (3.24) に矛盾する．

$a(x') \leqq 0$ on ∂D の場合も同様にして矛盾に導かれることがわかる．

以上で，(3.21)$'$，従って (3.21) が示された．　　Q.E.D.

注意 3.12　函数 $a(x')$ が境界 ∂D 上で符号を変える場合の問題 (*) に対する解の一意性定理については，Winzell [15] を参照されたい．

§4. 境界値問題に対する一意存在定理

この節では，われわれは次の一般境界値問題に対する一意可解性の問題を Sobolev 空間の枠内で考察しよう：

$$(+)\quad \begin{cases} (A-\alpha)u \equiv \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + (c(x)-\alpha)u = f & \text{in } D, \\ Bu \equiv B_1\left(\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial D}\right) + B_0\left(u|_{\partial D}\right) = \varphi & \text{on } \partial D. \end{cases}$$

ここで，

—— $\alpha \geqq 0$ は実のパラメーター，

―― A は $\overline{D} = D \cup \partial D$ 上のなめらかな実数値函数 a^{ij}, b^i, c を係数とする一様に楕円型な微分作用素; $c(x) \leqq 0$ in D,

―― B_j $(j=0,1)$ は境界 ∂D 上の $(m-j)$ 階の擬微分作用素,

―― $\frac{\partial}{\partial \nu}$ は行列 $(a^{ij})_{1 \leqq i,j \leqq n}$ に付随した外向き余法線微分

である.

さて, §2でのべたように, 単位円 $S = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ を仮想的に導入し, 問題(†)におけるパラメーター α を S 上の2階の微分作用素 $-\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ で置き換えた境界値問題を考えよう:

$$
(\tilde{\dagger}) \quad \begin{cases} \left(A + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\tilde{u} = \tilde{f} & \text{in } D \times S, \\ B\tilde{u} = \tilde{\varphi} & \text{on } \partial D \times S. \end{cases}
$$

ただし, 境界条件 B は, ∂D 上の擬微分作用素 B_j $(j=0,1)$ を $\partial D \times S$ 上の擬微分作用素と見て

$$
B\tilde{u} = B_1\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu}\Big|_{\partial D \times S}\right) + B_0\left(\tilde{u}\big|_{\partial D \times S}\right)
$$

の意味でとる.

このとき, われわれの基本的結果は, 粗くいって, 次の通りである (定理4.2, 系4.4):

「問題(†)が十分大きな $\alpha > 0$ に対して一意可解的であるための必要十分条件は, 問題$(\tilde{\dagger})$の Index が有限であることであ

る』

より詳しくのべよう．問題 (+) に付随して，<u>閉作用素</u> $\mathfrak{A}(\alpha)$: $H^{s-1}(D) \longrightarrow H^{s-2}(D) \oplus H^{s-m-1/2}(\partial D)$ $(s \geqq 2)$ を次式で定義することができる：

a) $\mathfrak{A}(\alpha)$ の定義域 $\mathcal{D}(\mathfrak{A}(\alpha)) = \{ u \in H^{s-1}(D) ;\ (A-\alpha)u \in H^{s-2}(D), Bu \in H^{s-m-1/2}(\partial D) \}$.

b) $\mathfrak{A}(\alpha)u = \left((A-\alpha)u, Bu \right)$, $u \in \mathcal{D}(\mathfrak{A}(\alpha))$.

同様に，問題 $(\widetilde{+})$ に付随して，<u>閉作用素</u> $\widetilde{\mathfrak{A}}$: $H^{s-1}(D \times S) \rightarrow H^{s-2}(D \times S) \oplus H^{s-m-1/2}(\partial D \times S)$ $(s \geqq 2)$ を次式で定義することができる：

$\tilde{a}$) $\widetilde{\mathfrak{A}}$ の定義域 $\mathcal{D}(\widetilde{\mathfrak{A}}) = \{ \tilde{u} \in H^{s-1}(D \times S) ;\ (A + \frac{\partial^2}{\partial y^2})\tilde{u} \in H^{s-2}(D \times S),\ B\tilde{u} \in H^{s-m-1/2}(\partial D \times S) \}$.

$\tilde{b}$) $\widetilde{\mathfrak{A}}\tilde{u} = \left((A + \frac{\partial^2}{\partial y^2})\tilde{u}, B\tilde{u} \right)$, $\tilde{u} \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathfrak{A}})$.

ここで，次の定義を思い出そう．

<u>定義 4.1</u>　X, Y を Banach 空間，$T : X \longrightarrow Y$ を閉作用素とする．作用素 T が <u>Index をもつ</u> とは，

— T の核 $N(T) = \{ x \in D(T) ;\ Tx = 0 \}$ が有限次元，

―― T の像 $R(T)=\{Tx\,;\,x\in D(T)\}$ が Y で閉じていて，さらに，$R(T)$ の Y における余次元が有限

のときをいう．ここで，$D(T)$ は T の定義域を表わす．このとき，<u>T の指数</u> Index T は次式で定義される：

$$\mathrm{Index}\ T = \dim N(T) - \mathrm{codim}\, R(T).$$

以上の準備のもとに，われわれの基本的結果は次のようにのべられる：

<u>定理 4.2</u>　$s \geqq \max(2, m+1)$ とする．次の2つの主張は同値である．

i) 作用素 $\widetilde{\mathfrak{A}} : H^{s-1}(D\times S) \longrightarrow H^{s-2}(D\times S)\oplus H^{s-m-1/2}(\partial D\times S)$ が Index をもつ．

ii) 任意の $\alpha \geqq 0$ に対して作用素 $\mathfrak{A}(\alpha) : H^{s-1}(D) \longrightarrow H^{s-2}(D)\oplus H^{s-m-1/2}(\partial D)$ の Index はゼロ．さらに，定数 $R'>0$ が存在して，$\alpha' = \ell^2 \geqq R'$, $\ell\in\mathbb{Z}$ をみたすすべての α' に対して作用素 $\mathfrak{A}(\alpha')$ は 1 to 1, onto であって，任意の $u\in\mathcal{D}(\mathfrak{A}(\alpha'))$ に対して次の評価式が成り立つ：

$$(4.1)\quad \|u\|^2_{H^{s-1}(D)} + \alpha'^{\,s-1}\|u\|^2_{L^2(D)} \leqq C' \Big(\|(A-\alpha')u\|^2_{H^{s-2}(D)}$$
$$+ \alpha'^{\,s-2}\|(A-\alpha')u\|^2_{L^2(D)} + |Bu|^2_{H^{s-m-1/2}(\partial D)} + \alpha'^{\,s-m-1/2}|Bu|^2_{L^2(\partial D)} \Big).$$

ここで, $C' > 0$ は α' に依らない定数である.

注意 4.3　一般に, 関係式:

$$\mathrm{Index}\ \tilde{\mathfrak{A}} = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \mathrm{Index}\ \mathfrak{A}(\ell^2) \qquad (\text{形式和})$$

が成り立つので (命題 4.9, 命題 4.14), 定理 4.2 の i) ⇒ ii) の部分によって, 実は

$$\mathrm{Index}\ \tilde{\mathfrak{A}} < \infty \Rightarrow \mathrm{Index}\ \tilde{\mathfrak{A}} = 0$$

であることがわかる.

"Subelliptic" のときは, 定理 4.2 は次のように拡張される:

系 4.4　$s \geqq \max(2, m+1)$ とする. 次の 2 つの主張は同値である.

i) ある $0<\delta \leqq 1$ に対して $\mathcal{D}(\tilde{\mathfrak{A}}) \subset H^{s-1+\delta}(D \times S^1)$ であって，作用素 $\tilde{\mathfrak{A}}: H^{s-1+\delta}(D \times S) \longrightarrow H^{s-2}(D \times S) \oplus H^{s-m-1/2}(\partial D \times S)$ が Index をもつ．

ii) すべての $\alpha \geqq 0$ に対して $\mathcal{D}(\mathfrak{A}(\alpha)) \subset H^{s-1+\delta}(D)$ であって，作用素 $\mathfrak{A}(\alpha): H^{s-1+\delta}(D) \longrightarrow H^{s-2}(D) \oplus H^{s-m-1/2}(\partial D)$ の Index はゼロ．さらに，定数 $R>0$ が存在して，$\alpha \geqq R$ をみたすすべての α に対して作用素 $\mathfrak{A}(\alpha)$ は 1 to 1, onto であって，任意の $u \in \mathcal{D}(\mathfrak{A}(\alpha))$ に対して次の評価式が成り立つ：

$$
(4.2) \quad \|u\|^2_{H^{s-1+\delta}(D)} + \alpha^{s-1+\delta}\|u\|^2_{L^2(D)} \leqq C\Big(\|(A-\alpha)u\|^2_{H^{s-2}(D)} + \alpha^{s-2}\|(A-\alpha)u\|^2_{L^2(D)} + |Bu|^2_{H^{s-m-1/2}(\partial D)} + \alpha^{s-m-1/2}|Bu|^2_{L^2(\partial D)} \Big).
$$

ここで，$C>0$ は α に依らない定数である．

<u>注意4.5</u>　1° あとでのべるように（後出の (Ⅲ), ($\tilde{\text{Ⅲ}}$)），§2 で導入した作用素 $\tilde{\mathfrak{J}}$, $\mathfrak{J}$ に対して，関係式：

$$
\begin{cases}
\text{Index } \tilde{\mathfrak{J}} = \text{Index } \tilde{\mathfrak{A}}, \\
\text{Index } \mathfrak{J} = \text{Index } \mathfrak{A}(0)
\end{cases}
$$

が成立するので，命題2.7 は系4.4 の i) ⇒ ii) $(m=1)$ の部分から従う．

2° 定理4.2，系4.4は，微分作用素 A が高階，パラメーター α が複素数の場合に容易に拡張される．詳しくは[14]を参照されたい．

定理4.2の証明　1）§2におけると同様に，微分作用素 $(A-\alpha)$，$\left(A+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ に対する Dirichlet 問題の解を使って，問題 $(\dagger)$，問題 $(\tilde{\dagger})$ をそれぞれ境界 ∂D，$\partial D \times S^1$ 上の Fredholm の擬微分方程式に帰着させよう．

よく知られているように（例えば[9]），$\alpha \geqq 0$ ならば，任意の $f \in H^{s-2}(D)$ と $\varphi \in H^{s-1/2}(\partial D)$ $(s \geqq 2)$ に対して Dirichlet 問題：

$$\begin{cases} (A-\alpha)u = f & \text{in } D, \\ u|_{\partial D} = \varphi & \text{on } \partial D \end{cases}$$

は一意的な解 $u \in H^s(D)$ をもつから，(2.1)，(2.2) と同様に，連続作用素

$$G(\alpha) : H^{s-2}(D) \longrightarrow H^s(D) \quad (s \geqq 2),$$
$$P(\alpha) : H^{t-1/2}(\partial D) \longrightarrow H^t(D) \quad (t \in \mathbb{R})$$

を次式で定義することができる．

$$\begin{cases} (A-\alpha)\,G(\alpha)f = f & \text{in } D, \\ G(\alpha)f|_{\partial D} = 0 & \text{on } \partial D. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (A-\alpha)\,P(\alpha)\varphi = 0 & \text{in } D, \\ P(\alpha)\varphi|_{\partial D} = \varphi & \text{on } \partial D. \end{cases}$$

このとき，命題2.1と同様にして

<u>命題 4.6</u>　$s \geqq 2$, $\alpha \geqq 0$ とする．$f \in H^{s-2}(D)$ と $\phi \in H^{s-m-1/2}(\partial D)$ に対して問題(+)の解 $u \in H^t(D)$ $(t \leqq s)$ が存在するための必要十分条件は，Fredholm の方程式：

$$(++) \qquad T(\alpha)\varphi \equiv B\,P(\alpha)\varphi = \phi - B\,G(\alpha)f \quad \text{on } \partial D$$

が解 $\varphi \in H^{t-1/2}(\partial D)$ をもつことである．

一般論によって（例えば [6], [8]），$T(\alpha) = B\,P(\alpha)$：

$$\varphi \longrightarrow B\,P(\alpha)\varphi = B_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \nu}\left(P(\alpha)\varphi\right)\Big|_{\partial D} + B_0\varphi$$

は境界 ∂D 上の m 階の擬微分作用素であるから，方程式(++)に付随して<u>閉作用素</u> $\mathcal{T}(\alpha): H^{s-3/2}(\partial D) \longrightarrow H^{s-m-1/2}(\partial D)$ を次式で定義することができる：

α) $\mathfrak{J}(\alpha)$ の定義域 $\mathcal{D}(\mathfrak{J}(\alpha)) = \{ \varphi \in H^{s-3/2}(\partial D);\ T(\alpha)\varphi \in H^{s-m-1/2}(\partial D) \}$.

β) $\mathfrak{J}(\alpha)\varphi = T(\alpha)\varphi$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathfrak{J}(\alpha))$.

このとき，命題4.6で $t = s-1$ おけば，容易に次の結果を得る（例えば [12]）：

(I) $\mathfrak{A}(\alpha)$ の核 $N(\mathfrak{A}(\alpha))$ が有限次元であるための必要十分条件は，$\mathfrak{J}(\alpha)$ の核 $N(\mathfrak{J}(\alpha))$ が有限次元であることである．このとき，$\dim N(\mathfrak{A}(\alpha)) = \dim N(\mathfrak{J}(\alpha))$ も成り立つ．

(II) $\mathfrak{A}(\alpha)$ の像 $R(\mathfrak{A}(\alpha))$ が閉じているための必要十分条件は，$\mathfrak{J}(\alpha)$ の像 $R(\mathfrak{J}(\alpha))$ が閉じていることである．さらに，$R(\mathfrak{A}(\alpha))$ の余次元が有限であるためには，$R(\mathfrak{J}(\alpha))$ の余次元が有限であることが必要かつ十分である．このとき，$\operatorname{codim} R(\mathfrak{A}(\alpha)) = \operatorname{codim} R(\mathfrak{J}(\alpha))$ も成り立つ．

(III) $\mathfrak{A}(\alpha)$ の Index が有限であるための必要十分条件は，$\mathfrak{J}(\alpha)$ の Index が有限であることである．このとき，$\operatorname{Index} \mathfrak{A}(\alpha) = \operatorname{Index} \mathfrak{J}(\alpha)$ も成り立つ．

同様に，Dirichlet 問題：

$$(\widetilde{\mathrm{D}}) \qquad \begin{cases} \left(A + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\widetilde{w} = 0 & \text{in } D \times S, \\ \widetilde{w}\big|_{\partial D \times S} = \widetilde{\varphi} & \text{on } \partial D \times S \end{cases}$$

は任意の $\widetilde{\varphi} \in H^{t-1/2}(\partial D \times S)$ $(t \in \mathbb{R})$ に対して一意的な解 $\widetilde{w} \in H^{t}(D \times S)$ をもつから，連続作用素

$$\widetilde{P} : H^{t-1/2}(\partial D \times S) \longrightarrow H^{t}(D \times S) \quad (t \in \mathbb{R})$$

を $\widetilde{w} = \widetilde{P}\widetilde{\varphi}$ で定義すると，$\widetilde{T} \equiv B\widetilde{P}$：

$$\widetilde{\varphi} \longrightarrow B\widetilde{P}\widetilde{\varphi} = B_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \nu}(\widetilde{P}\widetilde{\varphi})\Big|_{\partial D \times S} + B_0\widetilde{\varphi}$$

は境界 $\partial D \times S$ 上の m 階の擬微分作用素である．従って，$T(\alpha)$ と同様に，閉作用素 $\widetilde{\mathcal{T}} : H^{s-3/2}(\partial D \times S) \longrightarrow H^{s-m-1/2}(\partial D \times S)$ を次式で定義することができる：

$\widetilde{\alpha}$）$\widetilde{\mathcal{T}}$ の定義域 $\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{T}}) = \{\widetilde{\varphi} \in H^{s-3/2}(\partial D \times S) ; \widetilde{T}\widetilde{\varphi} \in H^{s-m-1/2}(\partial D \times S)\}$.

$\widetilde{\beta}$）$\widetilde{\mathcal{T}}\widetilde{\varphi} = \widetilde{T}\widetilde{\varphi}$，$\widetilde{\varphi} \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{T}})$.

このとき，(I), (II), (III) と同様にして，次の結果を得る：

$(\widetilde{\mathrm{I}})$ $\widetilde{\mathfrak{A}}$ の核 $N(\widetilde{\mathfrak{A}})$ が有限次元であるための必要十分条件は，$\widetilde{\mathcal{T}}$ の核 $N(\widetilde{\mathcal{T}})$ が有限次元であることである．このとき，

$\dim N(\widetilde{\mathfrak{A}}) = \dim N(\widetilde{\mathfrak{T}})$ も成り立つ．

$(\widetilde{\mathrm{II}})$ $\widetilde{\mathfrak{A}}$ の像 $R(\widetilde{\mathfrak{A}})$ が閉じているための必要十分条件は，$\widetilde{\mathfrak{T}}$ の像 $R(\widetilde{\mathfrak{T}})$ が閉じていることである．さらに，$R(\widetilde{\mathfrak{A}})$ の余次元が有限であるためには，$R(\widetilde{\mathfrak{T}})$ の余次元が有限であることが必要かつ十分である．このとき，$\mathrm{codim}\ R(\widetilde{\mathfrak{A}}) = \mathrm{codim}\ R(\widetilde{\mathfrak{T}})$ も成り立つ．

$(\widetilde{\mathrm{III}})$ $\widetilde{\mathfrak{A}}$ の Index が有限であるための必要十分条件は，$\widetilde{\mathfrak{T}}$ の Index が有限であることである．このとき，$\mathrm{Index}\ \widetilde{\mathfrak{A}} = \mathrm{Index}\ \widetilde{\mathfrak{T}}$ も成り立つ．

2) 問題(十)は閉作用素 $\mathfrak{T}(\alpha)$ に，問題$(\widetilde{十})$は閉作用素 $\widetilde{\mathfrak{T}}$ にそれぞれ帰着されることがわかったので，以下ではこの２つの作用素 $\mathfrak{T}(\alpha)$ と $\widetilde{\mathfrak{T}}$ の間の関係について詳しく調べよう．

もっとも基本的なのは次の補題である：

<u>補題 4.7</u> $\alpha' = \ell^2$, $\ell \in \mathbb{Z}$ とする．このとき，任意の $\varphi \in \mathcal{D}'(\partial D)$ に対して関係式：

$$\widetilde{T}(\varphi \otimes e^{i\ell y}) = T(\alpha')\varphi \otimes e^{i\ell y} \quad in\ \mathcal{D}'(\partial D \times S^1)$$

が成り立つ．

証明　$\mathcal{D}'(\partial D) = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} H^t(\partial D)$ だから，ある $t \in \mathbb{R}$ に対して $\varphi \in H^{t-1/2}(\partial D)$ であるとしてよい．$\tilde{w} = P(\alpha')\varphi \otimes e^{ily}$ とおくと，作用素 $P(\alpha')$ の定義によって

$$\tilde{w} \in H^t(D \times S)$$

であって，さらに，$\tilde{w}$ は

$$\begin{cases} \left(A + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\tilde{w} = \left(A + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(P(\alpha')\varphi \otimes e^{ily}\right) \\ \qquad = \left((A-\alpha')P(\alpha')\varphi\right) \otimes e^{ily} \\ \qquad = 0 \quad \text{in } D \times S; \\ \tilde{w}|_{\partial D \times S} = P(\alpha')\varphi \otimes e^{ily}|_{\partial D \times S} \\ \qquad = \varphi \otimes e^{ily} \quad \text{on } \partial D \times S \end{cases}$$

をみたすから，Dirichlet 問題 $(\tilde{D})$ の解の一意性によって，$\tilde{w} = \tilde{P}(\varphi \otimes e^{ily})$，すなわち，関係式：

$$(4.3) \qquad \tilde{P}(\varphi \otimes e^{ily}) = P(\alpha')\varphi \otimes e^{ily} \quad \text{in } H^t(D \times S)$$

を得る．この両辺に境界条件 B を施せば，

$$\tilde{T}(\varphi \otimes e^{ily}) = T(\alpha')\varphi \otimes e^{ily} \quad \text{in } H^{t-m-1/2}(\partial D \times S)$$

が従う．　　　　Q.E.D.

ここで，Fourier展開についての補題をのべよう．

<u>補題 4.8</u>　$\mathcal{M} = \partial D$ あるいは $\mathcal{M} = D$ とする．任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して，$\tilde{\varphi} \in H^t(\mathcal{M} \times S)$ は

$$\begin{cases} \tilde{\varphi} = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \varphi_\ell \otimes e^{i\ell y} \quad \text{in } H^t(\mathcal{M} \times S), \\ \varphi_\ell \in H^t(\mathcal{M}) \end{cases}$$

とFourier展開される．

さらに，$t \geqq 0$ ならば，次の評価式が成り立つ：

$$(4.4) \quad |\tilde{\varphi}|^2_{H^t(\mathcal{M}\times S)} \approx \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left(|\varphi_\ell|^2_{H^t(\mathcal{M})} + (1+\ell^2)^t |\varphi_\ell|^2_{L^2(\mathcal{M})} \right)$$

$$= |\tilde{\varphi}|^2_{(t,0)} + |\tilde{\varphi}|^2_{(0,t)}$$

ここで，記号 $\approx$ はノルム間の同値を意味し，$|\ \ |_{(t,0)}$，$|\ \ |_{(0,t)}$ はそれぞれ $L^2(S\,;H^t(\mathcal{M}))$，$H^t(S\,;L^2(\mathcal{M}))$ におけるノルムを表わす．

<u>証明</u>　$\mathcal{M} = D$ の場合は D の "Double" $\hat{D}$ を考えることにより，一般性を失なわずに $\mathcal{M}$ は<u>境界のない</u> compact な C^∞-多様体であるとしてよい．実際，$H^t(D\times S)$ は $H^t(\hat{D}\times S)$ の $D\times S$ への制限に，$H^t(D)$ は $H^t(\hat{D})$ の D への制限にそれ

ぞれ位相もこめて一致するからである．

$\{\chi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathcal{M}$ 上の Laplace-Beltrami 作用素 $-\Delta_{\mathcal{M}}$ の固有函数としよう：

$$-\Delta_{\mathcal{M}}\chi_n = \lambda_n\chi_n, \quad \lambda_n \geqq 0.$$

ただし，$\{\chi_n\}$ は $L^2(\mathcal{M})$ で正規直交化されているものとする．このとき，よく知られているように（例えば［9］），固有函数 $\{\chi_n\}$ は空間 $\mathcal{D}'(\mathcal{M}) = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} H^t(\mathcal{M})$ を張る．より正確にいえば，

$$\begin{cases} H^t(\mathcal{M}) = \left\{\varphi \in \mathcal{D}'(\mathcal{M})\,;\ \sum_{n\in\mathbb{N}} (1+\lambda_n)^t |a_n|^2 < \infty\right\}, \\ |\varphi|_{H^t(\mathcal{M})} = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} (1+\lambda_n)^t |a_n|^2\right)^{1/2}. \end{cases}$$

ここで，$\{a_n\}$ は $\{\chi_n\}$ に関する φ の Fourier 係数である．

同様に，$\mathcal{M}\times S^1$ 上の Laplace-Beltrami 作用素 $-\Delta_{\mathcal{M}} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ の固有函数 $\{\chi_n \otimes e^{i\ell y}\}_{n\in\mathbb{N},\,\ell\in\mathbb{Z}}$ ：

$$\left(-\Delta_{\mathcal{M}} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\chi_n \otimes e^{i\ell y}) = (\lambda_n + \ell^2)(\chi_n \otimes e^{i\ell y})$$

は空間 $\mathcal{D}'(\mathcal{M}\times S^1) = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} H^t(\mathcal{M}\times S^1)$ を張る．すなわち，

$$
\begin{cases} H^t(M \times S^1) = \left\{ \tilde{\varphi} \in \mathcal{D}'(M \times S^1) \; ; \; \displaystyle\sum_{\substack{n \in N, \\ \ell \in \mathbb{Z}}} (1 + \lambda_n + \ell^2)^t |a_{n\ell}|^2 < \infty \right\}, \\ |\tilde{\varphi}|_{H^t(M \times S)} = \left(\displaystyle\sum_{\substack{n \in N, \\ \ell \in \mathbb{Z}}} (1 + \lambda_n + \ell^2)^t |a_{n\ell}|^2 \right)^{1/2}. \end{cases}
$$

ここで，$\{a_{n\ell}\}$ は $\{\chi_n \otimes e^{i\ell y}\}$ に関する $\tilde{\varphi}$ の Fourier 係数である．

従って，任意の $\tilde{\varphi} \in H^t(M \times S^1)$ は

$$
\tilde{\varphi} = \sum_{\substack{n \in N, \\ \ell \in \mathbb{Z}}} a_{n\ell} \, \chi_n \otimes e^{i\ell y} \quad \text{in} \quad H^t(M \times S^1)
$$

と Fourier 展開されるが，$t \geqq 0$ ならば，不等式：

$$
\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[(1+\lambda_n)^t + (1+\ell^2)^t \right] &\leqq (1 + \lambda_n + \ell^2)^t \\ &\leqq 2^t \left[(1+\lambda_n)^t + (1+\ell^2)^t \right] \end{aligned}
$$

によって，

$$
(4.5) \qquad \begin{cases} \varphi_\ell = \displaystyle\sum_{n \in N} a_{n\ell} \, \chi_n \in H^t(M), \\ \tilde{\varphi} = \displaystyle\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \varphi_\ell \otimes e^{i\ell y} \quad \text{in} \quad H^t(M \times S^1) \end{cases}
$$

であることがわかり，さらに，評価式

$$
|\tilde{\varphi}|^2_{H^t(M \times S)} = \sum_{\substack{n \in N, \\ \ell \in \mathbb{Z}}} (1 + \lambda_n + \ell^2)^t |a_{n\ell}|^2
$$

$$\approx \sum_{\substack{n\in N,\\ \ell\in\mathbb{Z}}} (1+\lambda_n)^t |a_{n\ell}|^2 + \sum_{\substack{n\in N,\\ \ell\in\mathbb{Z}}} (1+\ell^2)^t |a_{n\ell}|^2$$

$$= \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \left(|\varphi_\ell|^2_{H^t(M)} + (1+\ell^2)^t |\varphi_\ell|^2_{L^2(M)} \right)$$

$$= |\tilde{\varphi}|^2_{(t,0)} + |\tilde{\varphi}|^2_{(0,t)}$$

を得る．

一方，$t<0$ ならば，任意の $\ell\in\mathbb{Z}$ に対して

$$\sum_{n\in N} (1+\lambda_n)^t |a_{n\ell}|^2 \leqq (1+\ell^2)^{-t} \sum_{n\in N} (1+\lambda_n+\ell^2)^t |a_{n\ell}|^2$$

$$\leqq (1+\ell^2)^{-t} \sum_{\substack{n\in N,\\ \ell\in\mathbb{Z}}} (1+\lambda_n+\ell^2)^t |a_{n\ell}|^2$$

$$= (1+\ell^2)^{-t} |\tilde{\varphi}|^2_{H^t(M\times S^1)}$$

を得るから，(4.5) が成り立つことがわかる．　Q.E.D.

補題 4.7，補題 4.8 によって，核 $N(\tilde{J})$ と $N(J(\alpha))$ の間の関係を与えることができる：

<u>命題 4.9</u>　次の２つの主張は同値である．

i) $\dim N(\tilde{J}) < \infty$.

ii) $\mathbb{Z}$ の有限集合 I が存在して

$$\begin{cases} \dim N(J(\ell^2)) < \infty & \text{if} \quad \ell \in I, \\ \dim N(J(\ell^2)) = 0 & \text{if} \quad \ell \in \mathbb{Z} \setminus I. \end{cases}$$

さらに，このとき，関係式：

$$\begin{cases} N(\tilde{J}) = \bigoplus_{\ell \in I} N(J(\ell^2)) \otimes e^{i\ell y}, \\ \dim N(\tilde{J}) = \sum_{\ell \in I} \dim N(J(\ell^2)) \end{cases}$$

が成り立つ．

証明　補題 4.8 によって，任意の $\tilde{\varphi} \in H^{s-3/2}(\partial D \times S)$ は

$$\begin{cases} \tilde{\varphi} = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \varphi_\ell \otimes e^{i\ell y} \quad \text{in} \quad H^{s-3/2}(\partial D \times S), \\ \varphi_\ell \in H^{s-3/2}(\partial D) \end{cases}$$

と Fourier 展開される．従って，補題 4.7 より

$$\begin{aligned} \tilde{T}\tilde{\varphi} &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \tilde{T}(\varphi_\ell \otimes e^{i\ell y}) \\ &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} T(\ell^2)\varphi_\ell \otimes e^{i\ell y} \quad \text{in} \quad H^{s-m-3/2}(\partial D \times S) \end{aligned}$$

を得るから，Fourier展開の一意性によって

$$\widetilde{T}\widetilde{\varphi}=0 \iff \text{すべての } \ell\in\mathbb{Z} \text{ に対して } T(\ell^2)\varphi_\ell=0,$$

すなわち，関係式：

$$(4.6)\qquad N(\widetilde{J})=\bigoplus_{\ell\in\mathbb{Z}} N(J(\ell^2))\otimes e^{i\ell y}\quad(\text{形式和})$$

が成り立つことがわかる．$\{N(J(\ell^2))\otimes e^{i\ell y}\}_{\ell\in\mathbb{Z}}$ は一次独立だから，（4.6）から命題を得る．　Q.E.D.

像 $R(\widetilde{J})$ と $R(J(\alpha))$ の間の関係については，まず，次のことがいえる：

<u>補題 4.10</u>　$\widetilde{J}$ の像 $R(\widetilde{J})$ が閉じていれば，すべての $\ell\in\mathbb{Z}$ に対して $J(\ell^2)$ の像 $R(J(\ell^2))$ も閉じている．

<u>証明</u>　任意の $\ell\in\mathbb{Z}$ をとって固定する．$\mathcal{D}(J(\ell^2))$ の列 $\{\varphi^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ が $T(\ell^2)\varphi^{(k)}\longrightarrow\psi_\ell$ in $H^{s-m-1/2}(\partial D)$ $(k\to\infty)$ をみたせば，$\psi_\ell\in R(J(\ell^2))$ であることを示せばよい：$\widetilde{\varphi}^{(k)}=\varphi^{(k)}\otimes e^{i\ell y}$ とおくと，補題 4.7，補題 4.8 によって，$\widetilde{\varphi}^{(k)}\in\mathcal{D}(\widetilde{J})$，$\widetilde{T}\widetilde{\varphi}^{(k)}=T(\ell^2)\varphi^{(k)}\otimes e^{i\ell y}\longrightarrow\psi_\ell\otimes e^{i\ell y}$ in $H^{s-m-1/2}(\partial D\times S^1)$ $(k\to\infty)$ を得る．従って，仮定から $R(\widetilde{J})$ は閉じているので，ある $\widetilde{\varphi}\in$

$\mathcal{D}(\tilde{J})$ が存在して

$$\psi_\ell \otimes e^{i\ell y} = \tilde{T}\tilde{\varphi}$$

である．そこで，$\tilde{\varphi}$ を補題 4.8 によって

$$\begin{cases} \tilde{\varphi} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi_n \otimes e^{iny} & \text{in } H^{s-3/2}(\partial D \times S^1), \\ \varphi_n \in H^{s-3/2}(\partial D) \end{cases}$$

と Fourier 展開して，補題 4.7 を使えば，

$$\begin{aligned} \psi_\ell \otimes e^{i\ell y} &= \tilde{T}\tilde{\varphi} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} T(n^2)\varphi_n \otimes e^{iny} \quad \text{in } H^{s-m-3/2}(\partial D \times S^1) \end{aligned}$$

が従い，Fourier 展開の一意性によって

$$T(\ell^2)\varphi_\ell = \psi_\ell \in H^{s-m-1/2}(\partial D)$$

$$\left(T(n^2)\varphi_n = 0, \quad n \neq \ell \right)$$

を得る．これは $\varphi_\ell \in \mathcal{D}(J(\ell^2))$，従って，

$$\psi_\ell \in R(J(\ell^2))$$

を意味する．　　　　Q. E. D.

codim $R(\tilde{J})$ と codim $R(J(\alpha))$ の間の関係を調べるには，函数解析でよく知られているように，$\tilde{J}^*$ の核 $N(\tilde{J}^*)$ と $J(\alpha)^*$ の核 $N(J(\alpha)^*)$ の関係について調べればよい．そのために次の補題を準備しよう：

<u>補題 4.11</u>　M を境界のない compuct な C^∞-多様体とする．M 上の d 階の擬微分作用素 T に付随して閉作用素 J：$H^{s-1}(M) \longrightarrow H^{s-d}(M)$ $(s \in R)$ を次式で定義しよう：

α) J の定義域 $\mathcal{D}(J) = \{ \varphi \in H^{s-1}(M)\ ;\ T\varphi \in H^{s-d}(M) \}$.

β) $J\varphi = T\varphi,\quad \varphi \in \mathcal{D}(J)$.

このとき，J の共役作用素 J^*：$H^{-s+d}(M) \longrightarrow H^{-s+1}(M)$ は

γ) J^* の定義域 $\mathcal{D}(J^*) = \{ \psi \in H^{-s+d}(M)\ ;\ T^*\psi \in H^{-s+1}(M) \}$,

δ) $J^*\psi = T^*\psi,\quad \psi \in \mathcal{D}(J^*)$

で与えられる．ここで，T^* は T の形式的共役作用素である．

証明は §2 でのべたのとほとんど同じなので省略する．（(2.6)式，(2.7)式を参照せよ．）

補題 4.11 によって，核 $\mathcal{N}(\widetilde{\mathfrak{T}}^*)$, $\mathcal{N}(\mathfrak{T}(\alpha)^*)$ はそれぞれ次のように特徴付けられる

<u>系 4.12</u>　$\alpha \geqq 0$ とする．このとき，

$$\begin{cases} \mathcal{N}(\widetilde{\mathfrak{T}}^*) = \left\{ \widetilde{\varphi} \in H^{-s+m+1/2}(\partial D \times S) \ ; \ \widetilde{T}^* \widetilde{\varphi} = 0 \right\} \\ \mathcal{N}(\mathfrak{T}(\alpha)^*) = \left\{ \varphi \in H^{-s+m+1/2}(\partial D) \ ; \ T(\alpha)^* \varphi = 0 \right\} \end{cases}$$

補題 4.7 において "Adjoint" に移れば，擬微分作用素 $\widetilde{T}^*$ と $T(\alpha)^*$ の間の関係を与えることができる．

<u>補題 4.13</u>　$\alpha' = \ell^2$, $\ell \in \mathbb{Z}$ とする．このとき，任意の $\varphi \in \mathcal{D}'(\partial D)$ に対して関係式：

$$(4.7) \qquad \widetilde{T}^*(\varphi \otimes e^{i\ell y}) = T(\alpha')^* \varphi \otimes e^{i\ell y} \quad \text{in } \mathcal{D}'(\partial D \times S)$$

が成り立つ．

<u>証明</u>　$\varphi \in \mathcal{D}(\partial D)$ と $k \in \mathbb{Z}$ を任意にとって固定する．このとき，補題 4.7 によって

$$\left(\tilde{T}^*(\psi\otimes e^{ily}),\ \varphi\otimes e^{iky}\right)_{\mathcal{D}'(\partial D\times S')\quad\mathcal{D}(\partial D\times S')}$$

$$=\left(\psi\otimes e^{ily},\ \tilde{T}(\varphi\otimes e^{iky})\right)_{\mathcal{D}'(\partial D\times S')\quad\mathcal{D}(\partial D\times S')}$$

$$=\left(\psi\otimes e^{ily},\ T(k^2)\varphi\otimes e^{iky}\right)_{\mathcal{D}'(\partial D\times S')\quad\mathcal{D}(\partial D\times S')}$$

$$=\begin{cases} 2\pi\ \left(T(\alpha')^*\psi,\ \varphi\right)_{\mathcal{D}'(\partial D)\quad\mathcal{D}(\partial D)} & \text{if}\quad k=l, \\ 0 & \text{if}\quad k\neq l \end{cases}$$

が成り立つ．

一方，明らかに

$$\left(T(\alpha')^*\psi\otimes e^{ily},\ \varphi\otimes e^{iky}\right)_{\mathcal{D}'(\partial D\times S')\quad\mathcal{D}(\partial D\times S')}$$

$$=\begin{cases} 2\pi\ \left(T(\alpha')^*\psi,\ \varphi\right)_{\mathcal{D}'(\partial D)\quad\mathcal{D}(\partial D)} & \text{if}\quad k=l, \\ 0 & \text{if}\quad k\neq l. \end{cases}$$

従って，集合 $\left\{\varphi\otimes e^{iky};\ \varphi\in\mathcal{D}(\partial D),\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ が $\mathcal{D}(\partial D\times S')$ で dense であることに注意すれば，関係式 (4.7) を得る．

Q. E. D.

系 4.12, 補題 4.13 によって, 命題 4.9 と同様にして

<u>命題 4.14</u>　次の2つの主張は同値である.

i)　$\dim N(\widetilde{\mathcal{J}}^*) < \infty$.

ii)　$\mathbb{Z}$ の<u>有限集合</u> J が存在して

$$\begin{cases} \dim N(J(\ell^2)^*) < \infty & \text{if } \ell \in J, \\ \dim N(J(\ell^2)^*) = 0 & \text{if } \ell \in \mathbb{Z} \setminus J. \end{cases}$$

さらに, このとき, 関係式:

$$\begin{cases} N(\widetilde{\mathcal{J}}^*) = \bigoplus_{\ell \in J} N(J(\ell^2)^*) \otimes e^{i\ell y}, \\ \dim N(\widetilde{\mathcal{J}}^*) = \sum_{\ell \in J} \dim N(J(\ell^2)^*) \end{cases}$$

が成り立つ.

3)　<u>定理 4.2 の証明</u>（続き）　i) $\Rightarrow$ ii):　作用素 $\widetilde{\mathfrak{A}}$: $H^{s-1}(D \times S) \longrightarrow H^{s-2}(D \times S) \oplus H^{s-m-1/2}(\partial D \times S)$ $(s \geq \max(2, m+1))$ が Index をもつとしよう. このとき, $(\widetilde{\text{III}})$ によって作用素 $\widetilde{\mathcal{J}}$: $H^{s-3/2}(\partial D \times S) \longrightarrow H^{s-m-1/2}(\partial D \times S)$ も Index をもつから, 次の事実 1°〜3° がいえる:

1° 命題4.9によって，$\mathbb{Z}$の有限集合 I が存在して

$$\begin{cases} \dim N(\mathfrak{J}(\ell^2)) < \infty & \text{if } \ell \in I, \\ \dim N(\mathfrak{J}(\ell^2)) = 0 & \text{if } \mathbb{Z} \setminus I. \end{cases}$$

2° 補題4.10によって，すべての $\ell \in \mathbb{Z}$ に対して $\mathfrak{J}(\ell^2)$ の像 $R(\mathfrak{J}(\ell^2))$ は閉じている．

3° 命題4.14によって，$\mathbb{Z}$の有限集合 J が存在して

$$\begin{cases} \operatorname{codim} R(\mathfrak{J}(\ell^2)) = \dim N(\mathfrak{J}(\ell^2)^*) < \infty & \text{if } \ell \in J, \\ \operatorname{codim} R(\mathfrak{J}(\ell^2)) = \dim N(\mathfrak{J}(\ell^2)^*) = 0 & \text{if } \ell \in \mathbb{Z} \setminus J. \end{cases}$$

従って，(I), (II), (III) から

— $\ell \in I \cup J$ ならば，$\operatorname{Index} \mathfrak{A}(\ell^2) < \infty$，

— $\ell \in \mathbb{Z} \setminus (I \cup J)$ ならば，作用素 $\mathfrak{A}(\ell^2)$ は 1 to 1, onto；特に $\operatorname{Index} \mathfrak{A}(\ell^2) = 0$（$I \cup J$ は有限集合であることに注意）

であることがわかる．

"Compact Perturbation" によって，任意の $\alpha \geqq 0$ に対して

$$\operatorname{Index} \mathfrak{A}(\alpha) = 0$$

であることを示そう．

$l \in \mathbb{Z} \setminus (I \cup J)$ をみたす l を任意にとって $\alpha' = l^2$ とおく．
等式：

$$\mathfrak{A}(\alpha) = \mathfrak{A}(\alpha') + \big((\alpha' - \alpha) I, 0\big)$$

において $\mathfrak{A}(\alpha')$ の逆 $\mathfrak{A}(\alpha')^{-1}$ を右から施せば

$$(4.8) \qquad \mathfrak{A}(\alpha)\,\mathfrak{A}(\alpha')^{-1} = I + \big((\alpha' - \alpha) I, 0\big)\,\mathfrak{A}(\alpha')^{-1}$$

を得るが，$\mathfrak{A}(\alpha')^{-1} : H^{s-2}(D) \oplus H^{s-m-1/2}(\partial D) \longrightarrow H^{s-1}(D)$ は閉グラフ定理によって連続であり，さらに，$H^{s-1}(D) \hookrightarrow H^{s-2}(D)$ $(s \geq 2)$ は Rellich の定理によって完全連続だから，(4.8)式の右辺第2項は $H^{s-2}(D) \oplus H^{s-m-1/2}(\partial D)$ において完全連続であることがわかる．従って，よく知られているように，

$$\mathrm{Index}\,\big(\mathfrak{A}(\alpha)\,\mathfrak{A}(\alpha')^{-1}\big) = 0$$

であるから，

$$\begin{aligned}\mathrm{Index}\,\mathfrak{A}(\alpha) &= \mathrm{Index}\,\Big(\big(\mathfrak{A}(\alpha)\,\mathfrak{A}(\alpha')^{-1}\big)\,\mathfrak{A}(\alpha')\Big) \\ &= \mathrm{Index}\,\big(\mathfrak{A}(\alpha)\,\mathfrak{A}(\alpha')^{-1}\big) + \mathrm{Index}\,\mathfrak{A}(\alpha') \\ &= 0\end{aligned}$$

を得る

最後に，評価式 (4.1) を示そう：　作用素 $\widetilde{\mathfrak{A}} : H^{s-1}(D\times S^1) \longrightarrow H^{s-2}(D\times S^1) \oplus H^{s-m-1/2}(\partial D\times S^1)$ が Index をもつから，補題 2.8 を $T \leftrightarrow \widetilde{\mathfrak{A}}$, $X \leftrightarrow H^{s-1}(D\times S^1)$, $Y \leftrightarrow H^{s-2}(D\times S^1) \oplus H^{s-m-1/2}(\partial D\times S^1)$, $Z \leftrightarrow L^2(D\times S^1)$ として使えば，適当な定数 $\widetilde{C}>0$ が存在して，評価式：

$$
(4.9)\quad \|\tilde{u}\|^2_{H^{s-1}(D\times S^1)} \leqq \widetilde{C}\left(\left\|\left(A+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\tilde{u}\right\|^2_{H^{s-2}(D\times S^1)} + |B\tilde{u}|^2_{H^{s-m-1/2}(\partial D\times S^1)} + \|\tilde{u}\|^2_{L^2(D\times S^1)}\right), \quad \tilde{u}\in\mathcal{D}(\widetilde{\mathfrak{A}})
$$

が成り立つ．

従って，特に (4.9) 式を $\tilde{u}(x,y) = u(x)\otimes e^{ily}$, $u\in\mathcal{D}(\mathfrak{A}(l^2))$, $l\in\mathbb{Z}$ に対して使えば，明らかに

$$
(4.10)\qquad \left(A+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(u\otimes e^{ily}) = (A-\alpha')u\otimes e^{ily} \quad (\alpha' = l^2)
$$

だから，(4.4) 式によって（$s \geqq \max(2, m+1)$ に注意），適当な定数 $R'>0$ が存在して，$\alpha' = l^2 \geqq R'$ ならば，任意の $u\in\mathcal{D}(\mathfrak{A}(\alpha'))$ に対して評価式 (4.1) が成り立つことがわかる．
（ここで，定義によって $\mathcal{D}(\mathfrak{A}(\alpha))$ は $\alpha\geqq 0$ に依らないことに注意せよ．）

以上で，定理 4.2 の i) ⇒ ii) の部分が示された．

ii) $\Longrightarrow$ i)： 主張 ii) が成り立っているとしよう．このとき，(I), (II), (III) によってすべての $\alpha \geqq 0$ に対して作用素 $\mathfrak{J}(\alpha) : H^{s-3/2}(\partial D) \longrightarrow H^{s-m-1/2}(\partial D)$ の Index はゼロ．さらに，$\alpha' = \ell^2 \geqq R'$, $\ell \in \mathbb{Z}$ をみたすすべての α' に対して作用素 $\mathfrak{J}(\alpha')$ は 1 to 1, onto である．従って，命題 4.9，命題 4.14 によって

$$
(4.11) \qquad \begin{cases} \dim N(\widetilde{\mathfrak{J}}) < \infty, \\ \operatorname{codim} [R(\widetilde{\mathfrak{J}})] = \dim N(\widetilde{\mathfrak{J}}^*) < \infty \end{cases}
$$

を得る．ここで，$[R(\widetilde{\mathfrak{J}})]$ は $\widetilde{\mathfrak{J}}$ の像 $R(\widetilde{\mathfrak{J}})$ の $H^{s-m-1/2}(\partial D \times S)$ における閉包を表わす．

よって，像 $R(\widetilde{\mathfrak{J}})$ が $H^{s-m-1/2}(\partial D \times S)$ で閉じていることがいえれば，(4.11) によって作用素 $\widetilde{\mathfrak{J}}$ が Index をもつことがわかり，従って，($\widetilde{\text{III}}$) によって作用素 $\widetilde{\mathfrak{A}}$ も Index をもつことがわかる．

$R(\widetilde{\mathfrak{J}})$ が閉じていることをいうには，任意の $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathfrak{J}})$ に対して評価式：

$$
(4.12) \qquad |\widetilde{\varphi}|^2_{H^{s-3/2}(\partial D \times S)} \leqq \widetilde{C} \left(|\widetilde{T}\widetilde{\varphi}|^2_{H^{s-m-1/2}(\partial D \times S)} + |\widetilde{\varphi}|^2_{L^2(\partial D \times S)} \right)
$$

が成り立つことをいえばよい．実際，補題 2.8 を $T \leftrightarrow \widetilde{\mathfrak{J}}$, $X \leftrightarrow H^{s-3/2}(\partial D \times S)$, $Y \leftrightarrow H^{s-m-1/2}(\partial D \times S)$, $Z \leftrightarrow L^2(\partial D \times S)$ として使えば，(4.12) 式によって $R(\widetilde{\mathfrak{J}})$ が $H^{s-m-1/2}(\partial D \times S)$ で閉じていることが従う．

評価式 (4.12) を示そう： $I = \{ \ell \in \mathbb{Z} \,;\, \ell^2 < R' \}$ とおく．作用素 $J(\ell^2) : H^{s-3/2}(\partial D) \longrightarrow H^{s-m-1/2}(\partial D)$ は Index をもつ（実はゼロ）から，補題 2.8 を $T \leftrightarrow J(\ell^2)$，$X \leftrightarrow H^{s-3/2}(\partial D)$，$Y \leftrightarrow H^{s-m-1/2}(\partial D)$，$Z \leftrightarrow L^2(\partial D)$ として使えば，$\ell \in I$ に依らない定数 $C_I > 0$ が存在して，評価式

$$(4.13) \quad |\varphi|^2_{H^{s-3/2}(\partial D)} \leqq C_I \left(|T(\ell^2)\varphi|^2_{H^{s-m-1/2}(\partial D)} + |\varphi|^2_{L^2(\partial D)} \right), \quad \varphi \in \mathcal{D}(J(\ell^2))$$

が成り立つ．実際，これは I が有限集合だから明らかである．

従って，(4.4) 式を使えば（$s \geqq \max(2, m+1)$ に注意），(4.13) 式は評価式：

$$(4.14) \quad |\varphi \otimes e^{i\ell y}|^2_{H^{s-3/2}(\partial D \times S)} \leqq \widetilde{C}_I \Big(|T(\ell^2)\varphi \otimes e^{i\ell y}|^2_{H^{s-m-1/2}(\partial D \times S)}$$

$$+ |\varphi \otimes e^{i\ell y}|^2_{L^2(\partial D \times S)} \Big), \quad \varphi \in \mathcal{D}(J(\ell^2))$$

と同値であることがわかる．ここで，$\widetilde{C}_I > 0$ は $\ell \in I$ に依らない定数である．

一方，$\ell \in \mathbb{Z} \setminus I$ ならば，評価式 (4.1) が成り立つが，関係式 (4.10) に注意して (4.4) 式を使えば，(4.1) 式は評価式：

$$(4.15)\quad \|u\otimes e^{il y}\|^2_{H^{s-1}(D\times S)} \leqq \tilde{C}'\left(\left\|\left(A+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(u\otimes e^{il y})\right\|^2_{H^{s-2}(D\times S)}\right.$$

$$\left. + \left|B(u\otimes e^{il y})\right|^2_{H^{s-m-1/2}(\partial D\times S)}\right), \quad u\in \mathcal{D}(\mathfrak{A}(l^2))$$

と同値であることがわかる．ここで，$\tilde{C}'>0$ は $l\in\mathbb{Z}\setminus I$ に依らない定数である．

従って，特に (4.15) 式を $u=P(l^2)\varphi$，$\varphi\in\mathcal{D}(J(l^2))$，$l\in\mathbb{Z}\setminus I$ に対して使えば，命題 4.7 の証明でのべたように

$$\tilde{P}(\varphi\otimes e^{il y}) = P(l^2)\varphi\otimes e^{il y}$$

だから，$l\in\mathbb{Z}\setminus I$ に依らない定数 $\tilde{C}_{\mathrm{II}}>0$ が存在して，評価式：

$$(4.16)\quad |\varphi\otimes e^{il y}|^2_{H^{s-3/2}(\partial D\times S)}$$

$$\leqq \tilde{C}_{\mathrm{II}}\ |T(l^2)\varphi\otimes e^{il y}|^2_{H^{s-m-1/2}(\partial D\times S)}, \quad \varphi\in\mathcal{D}(J(l^2))$$

が成り立つ．実際，作用素 $\tilde{P}$ が $H^{s-3/2}(\partial D\times S)$ から $H^{s-1}(D\times S)$ の部分空間 $\left\{\tilde{w}\in H^{s-1}(D\times S)\,;\ \left(A+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\tilde{w}=0 \text{ in } D\times S\right\}$ への位相同型写像であることに注意すればよい．

任意の $\tilde{\varphi}\in\mathcal{D}(\tilde{J})$ は，補題 4.7，補題 4.8 によって

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\tilde{\varphi} = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \varphi_\ell \otimes e^{i\ell y} \quad in \quad H^{s-3/2}(\partial D \times S^1), \\
&\varphi_\ell \in \mathcal{D}(J(\ell^2))
\end{aligned}
\right.
$$

と Fourier 展開されるから, φ_ℓ, $\ell \in \mathbb{Z}$ を $\ell \in \mathrm{I}$ と $\ell \in \mathbb{Z} \setminus \mathrm{I}$ の2つの場合に分けてそれぞれに対して (4.14)式と (4.16)式を適用すれば, Parseval の等式によって, 評価式:

$$
\begin{aligned}
&|\tilde{T} \tilde{\varphi}|^2_{H^{s-m-1/2}(\partial D \times S^1)} \\
&= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |T(\ell^2) \varphi_\ell \otimes e^{i\ell y}|^2_{H^{s-m-1/2}(\partial D \times S^1)} \\
&\geqq \frac{1}{\tilde{C}_{\mathrm{II}}} \sum_{\ell \in \mathbb{Z} \setminus \mathrm{I}} |\varphi_\ell \otimes e^{i\ell y}|^2_{H^{s-3/2}(\partial D \times S^1)} \\
&+ \frac{1}{\tilde{C}_{\mathrm{I}}} \sum_{\ell \in \mathrm{I}} |\varphi_\ell \otimes e^{i\ell y}|^2_{H^{s-3/2}(\partial D \times S^1)} - \sum_{\ell \in \mathrm{I}} |\varphi_\ell \otimes e^{i\ell y}|^2_{L^2(\partial D \times S^1)} \\
&\geqq \min\left(\frac{1}{\tilde{C}_{\mathrm{I}}}, \frac{1}{\tilde{C}_{\mathrm{II}}}\right) |\tilde{\varphi}|^2_{H^{s-3/2}(\partial D \times S^1)} - |\tilde{\varphi}|^2_{L^2(\partial D \times S^1)}
\end{aligned}
$$

を得る. これは所期の (4.12)式に他ならない.

以上で, ii) ⟹ i) の部分が示されたので, 定理4.2は完全に証明された.

系 4.4 の証明　i) ⇒ ii):　1) ある $0<\delta\leqq 1$ に対して $\mathcal{D}(\widetilde{\mathfrak{A}})\subset H^{s-1+\delta}(D\times S')$ であって，作用素 $\widetilde{\mathfrak{A}}: H^{s-1+\delta}(D\times S')\to H^{s-2}(D\times S')\oplus H^{s-m-1/2}(\partial D\times S')$ ($s\geqq\max(2,m+1)$) が Index をもてば，次の事実 1°, 2° が従う：

1°　すべての $\alpha\geqq 0$ に対して $\mathcal{D}(\mathfrak{A}(\alpha))\subset H^{s-1+\delta}(D)$ であって，作用素 $\mathfrak{A}(\alpha): H^{s-1+\delta}(D)\longrightarrow H^{s-2}(D)\oplus H^{s-m-1/2}(\partial D)$ の Index はゼロである．

2°　適当な定数 $R'>0$ が存在して，$\alpha'=\ell^2\geqq R'$, $\ell\in\mathbb{Z}$ をみたすすべての α' に対して作用素 $\mathfrak{A}(\alpha'): H^{s-1+\delta}(D)\longrightarrow H^{s-2}(D)\oplus H^{s-m-1/2}(\partial D)$ は 1 to 1, onto であって，任意の $u\in\mathcal{D}(\mathfrak{A}(\alpha'))$ に対して評価式 (4.2) が成り立つ．

証明　関係式 (4.10) より

$$\widetilde{\mathfrak{A}}(u\otimes e^{i\ell y})=\mathfrak{A}(\ell^2)u\otimes e^{i\ell y},\quad u\in\mathcal{D}(\mathfrak{A}(\ell^2)),\ \ell\in\mathbb{Z}$$

が従うから，ある $0<\delta\leqq 1$ に対して $\mathcal{D}(\widetilde{\mathfrak{A}})\subset H^{s-1+\delta}(D\times S')$ ならば，(4.4) 式によって，すべての $\ell\in\mathbb{Z}$ に対して $\mathcal{D}(\mathfrak{A}(\ell^2))\subset H^{s-1+\delta}(D)$ であることがわかる．従って，定義によって $\mathcal{D}(\mathfrak{A}(\alpha))$ は $\alpha\geqq 0$ に依らないから，定理 4.2 の i) ⇒ ii) の部分から 1° と 2° の前半を得る．

評価式 (4.2) を示そう： 作用素 $\widetilde{\mathfrak{A}} : H^{s-1+\delta}(D\times S) \longrightarrow H^{s-2}(D\times S) \oplus H^{s-m-1/2}(\partial D\times S)$ が Index をもつから，補題 2.8 を $T \leftrightarrow \widetilde{\mathfrak{A}}$, $X \leftrightarrow H^{s-1+\delta}(D\times S)$, $Y \leftrightarrow H^{s-2}(D\times S)\oplus H^{s-m-1/2}(\partial D\times S)$, $Z \leftrightarrow L^2(D\times S)$ として適用すれば，適当な定数 $\widetilde{C}>0$ が存在して，評価式：

$$(4.17)\qquad \|\widetilde{u}\|^2_{H^{s-1+\delta}(D\times S)} \leqq \widetilde{C}\left(\left\|\left(A+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\widetilde{u}\right\|^2_{H^{s-2}(D\times S)} + |B\widetilde{u}|^2_{H^{s-m-1/2}(\partial D\times S)} + \|\widetilde{u}\|^2_{L^2(D\times S)}\right),\quad \widetilde{u}\in\mathcal{D}(\widetilde{\mathfrak{A}})$$

が成り立つ．

従って，特に $\widetilde{u}(x,y) = u(x)\otimes e^{i\ell y}$, $u\in\mathcal{D}(\mathfrak{A}(\ell^2))$, $\ell\in\mathbb{Z}$ に対して (4.17) 式を使えば，(4.4) 式によって ($s \geqq \max(2, m+1)$ に注意)，適当な定数 $R'>0$ が存在して，$\alpha' = \ell^2 \geqq R'$, $\ell\in\mathbb{Z}$ ならば，任意の $u\in\mathcal{D}(\mathfrak{A}(\alpha'))$ に対して評価式 (4.2) が成り立つことがわかる． Q.E.D.

2) 適当な定数 $R>0$ ($R\geqq R'$) が存在して，$\alpha\geqq R$ ならば，境界条件 $Bw=0$ on ∂D をみたす任意の $w\in\mathcal{D}(\mathfrak{A}(\alpha))$ に対して評価式：

$$(4.18)\quad \|w\|^2_{H^{s-1+\delta}(D)} + \alpha^{s-1+\delta}\|w\|^2_{L^2(D)}$$
$$\leqq C''\left(\|(A-\alpha)w\|^2_{H^{s-2}(D)} + \alpha^{s-2}\|(A-\alpha)w\|^2_{L^2(D)}\right)$$

が成り立つ．ここで，$C''>0$ は α に依らない定数である．

<u>証明</u>　$0\leqq\zeta\leqq 1$,　$\mathrm{supp}\,\zeta\subset[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}]$ をみたす $\zeta\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ をとって固定する．$\tilde{w}(x,y)=w(x)\otimes\zeta(y)\,e^{i\sqrt{\alpha}y}$ とおくと（$\mathrm{supp}\,\zeta\subset[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}]$ より，$\alpha\geqq 0$ に対して $\zeta e^{i\sqrt{\alpha}y}\in C^\infty(S)$ に注意），$\tilde{w}$ は明らかに境界条件：

$$B\tilde{w} = Bw\otimes\zeta e^{i\sqrt{\alpha}y}$$
$$= 0 \quad \text{on } \partial D\times S$$

をみたすが，さらに，具体的に

$$(4.19)\quad \left(A+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\tilde{w} = (A-\alpha)w\otimes\zeta e^{i\sqrt{\alpha}y}$$
$$+\,2\sqrt{\alpha}\,i\;w\otimes\frac{d\zeta}{dy}e^{i\sqrt{\alpha}y} + w\otimes\frac{d^2\zeta}{dy^2}e^{i\sqrt{\alpha}y}$$

とかけるから，(4.4)式によって（$s\geqq 2$ に注意）

$$\tilde{w}\in\mathcal{D}(\tilde{\mathfrak{A}})$$

であることがわかる．従って，$\tilde{u}\leftrightarrow\tilde{w}$ として (4.17)式を適

用すれば，(4.19)式によって

$$(4.20)\quad \|w\otimes\zeta e^{i\sqrt{\alpha}y}\|^2_{H^{s-1+\delta}(D\times S^1)} \leqq \widetilde{C}' \Big(\|(A-\alpha)w\otimes\zeta e^{i\sqrt{\alpha}y}\|^2_{H^{s-2}(D\times S^1)} + \|2\sqrt{\alpha}\, i\, w\otimes \tfrac{d\zeta}{dy} e^{i\sqrt{\alpha}y}\|^2_{H^{s-2}(D\times S^1)} + \|w\otimes \tfrac{d^2\zeta}{dy^2} e^{i\sqrt{\alpha}y}\|^2_{H^{s-2}(D\times S^1)} + \|w\otimes\zeta e^{i\sqrt{\alpha}y}\|^2_{L^2(D\times S^1)} \Big)$$

を得る．

(4.20)式の各項を(4.4)式を使って評価しよう．そのためには，次の事実が必要である：

(4.21)　$t \geqq 0$ ならば，$\mathrm{supp}\,\zeta \subset [\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$ をみたす任意の $\zeta \in C^\infty(S^1)$ に対して評価式：

$$\frac{1}{4^t}\alpha^t |\zeta|^2_{L^2(S^1)} - |\zeta|^2_{H^t(S^1)} \leqq |\zeta e^{i\sqrt{\alpha}y}|^2_{H^t(S^1)} \leqq 4^t \left(|\zeta|^2_{H^t(S^1)} + \alpha^t |\zeta|^2_{L^2(S^1)} \right)$$

が成り立つ．

実際，これは

$$|\zeta e^{i\sqrt{\alpha}y}|^2_{H^t(S^1)} = \left| \left(1-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^{\frac{t}{2}} (\zeta e^{i\sqrt{\alpha}y}) \right|^2_{L^2(S^1)}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (1+\eta^2)^t \, |\hat{\zeta}(\eta - \sqrt{\alpha})|^2 \, d\eta$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + (\eta + \sqrt{\alpha})^2\right)^t |\hat{\zeta}(\eta)|^2 \, d\eta$$

と変形して，不等式

$$\frac{1}{4^t} \alpha^t - (1+\eta^2)^t \leqq \left(1 + (\eta + \sqrt{\alpha})^2\right)^t$$

$$\leqq 4^t \left[(1+\eta^2)^t + \alpha^t \right]$$

を使えば，ただちに従う．

そこで，(4.20)式の各項を(4.4)式によって $L^2(S\,;H^t(D))$ におけるノルム評価と $H^t(S\,;L^2(D))$ におけるノルム評価とに分け，(4.20)式の左辺に対しては(4.21)の第1の不等式を，右辺（の4項）に対しては第2の不等式を使えば，（$\zeta \in C^\infty(S)$ に依存してきまる）適当な定数 $C_1 > 0$ が存在して，$\alpha \geqq 1$ に対して評価式：

(4.22) $$\|w\|^2_{H^{s-1+\delta}(D)} + \alpha^{s-1+\delta} \|w\|^2_{L^2(D)}$$

$$\leqq C_1 \Big(\|(A-\alpha)w\|^2_{H^{s-2}(D)} + \alpha^{s-2} \|(A-\alpha)w\|^2_{L^2(D)}$$

$$+\ \alpha \|w\|^2_{H^{s-2}(D)} + \alpha^{s-1} \|w\|^2_{L^2(D)} \Big)$$

が成り立つことがわかる．

さらに，(4.22)式の右辺第３項は，Agranovič - Višik [2] による補間不等式：

$$(4.23)\quad \alpha \|v\|^2_{H^{s-2}(D)} \leqq C_2 \left(\|v\|^2_{H^{s-1}(D)} + \alpha^{s-1} \|v\|^2_{L^2(D)} \right), \quad v \in H^{s-1}(D)$$

とよく知られた補間不等式（[1], [9]）：

$$\|v\|^2_{H^{s-1}(D)} \leqq \varepsilon \|v\|^2_{H^{s-1+\delta}(D)} + C_\varepsilon \|v\|^2_{L^2(D)}, \quad v \in H^{s-1+\delta}(D)$$

を使えば，

$$(4.24)\quad \alpha \|w\|^2_{H^{s-2}(D)} \leqq \frac{1}{2C_1} \|w\|^2_{H^{s-1+\delta}(D)} + C_3\, \alpha^{s-1} \|w\|^2_{L^2(D)}$$

と評価される．ここで，$C_2 > 0$，$C_3 > 0$ は α に依らない定数である．

従って，(4.24)式を(4.22)式の右辺第３項に代入し，$0 < \delta \leqq 1$ に注意すれば，適当な定数 $R \geqq 1$ $(R \geqq R')$ が存在して，$\alpha \geqq R$ ならば，境界条件 $Bw = 0$ on ∂D をみたす任意の $w \in \mathcal{D}(\mathfrak{A}(\alpha))$ に対して評価式(4.18)が成り立つことがわかる．

Q.E.D.

3) $\alpha \geqq R$ ならば，(4.18)式によってただちに作用素 $\mathfrak{A}(\alpha)$: $H^{s-1+\delta}(D) \longrightarrow H^{s-2}(D) \oplus H^{s-m-\frac{1}{2}}(\partial D)$ が1対1であることがわかるが，さらに，1)の主張1°によって Index $\mathfrak{A}(\alpha)=0$ だったから，onto であることもわかる.

4) 最後に，$\alpha \geqq R$ ならば，任意の $u \in \mathcal{D}(\mathfrak{A}(\alpha))$ に対して評価式(4.2)が成り立つことを示そう.

1)の主張2°でその存在を示した定数 $R'>0$ は，証明からわかるように，ある正整数 l_0 に対して $R'=l_0^2$ で与えられるとしてよい. 従って，任意の $\alpha \geqq R\ (\geqq R')$ に対して $l^2 \leqq \alpha \leqq (l+1)^2$ をみたす最小の整数 $l \geqq l_0$ が存在するから，そのような l をとって $\alpha'=l^2$ とおく. このとき，α と α' に対して明らかに次の関係式が成立する：

$$
(4.25) \qquad \begin{cases} \alpha' \leqq \alpha \leqq (l+1)^2 \leqq 4\alpha', \\ \alpha-\alpha' \leqq 2l+1 \leqq 3\sqrt{\alpha'}. \end{cases}
$$

さて，$\alpha'=l^2 \geqq R \geqq R'$ だから，1)の主張2°によって，任意の $u \in \mathcal{D}(\mathfrak{A}(\alpha))$ に対して境界値問題：

$$
(4.26) \qquad \begin{cases} (A-\alpha')v = 0 & \text{in } D, \\ Bv = Bu & \text{on } \partial D \end{cases}
$$

は一意的な解 $v \in H^{s-1+\delta}(D)$ をもち，さらに，評価式：

$$
(4.27) \quad \|v\|^2_{H^{s-1+\delta}(D)} + \alpha'^{\,s-1+\delta}\|v\|^2_{L^2(D)}
$$
$$
\leq C_4 \left(|Bu|^2_{H^{s-m-1/2}(\partial D)} + \alpha'^{\,s-m-1/2}|Bu|^2_{L^2(D)} \right)
$$

が成り立つ．ここで，$C_4 > 0$ は α' に依らない定数である．

(4.25) 式によって，(4.27) 式は次のように書き直される：

$$
(4.28) \quad \|v\|^2_{H^{s-1+\delta}(D)} + \alpha^{s-1+\delta}\|v\|^2_{L^2(D)}
$$
$$
\leq C_5 \left(|Bu|^2_{H^{s-m-1/2}(\partial D)} + \alpha^{s-m-1/2}|Bu|^2_{L^2(\partial D)} \right).
$$

一方，$w = u - v$ とおくと，(4.26) 式によって w は

$$
\begin{cases}
(A - \alpha) w = (A - \alpha) u - (\alpha' - \alpha) v & \text{in } D, \\
B w = 0 & \text{on } \partial D
\end{cases}
$$

をみたすから，(4.18) 式を適用し，さらに，(4.25) 式，(4.23

式を使えば，次の評価式が従う：

$$
(4.29) \quad \|w\|^2_{H^{s-1+\delta}(D)} + \alpha^{s-1+\delta}\|w\|^2_{L^2(D)}
$$
$$
\leq C'' \left(\|(A - \alpha)u - (\alpha' - \alpha)v\|^2_{H^{s-2}(D)} \right.
$$

$$+ \alpha^{s-2} \| (A-\alpha) u - (\alpha' - \alpha) v \|^2_{L^2(D)} \Big)$$

$$\leqq C_6 \Big(\| (A-\alpha) u \|^2_{H^{s-2}(D)} + \alpha^{s-2} \| (A-\alpha) u \|^2_{L^2(D)}$$

$$+ \alpha \| v \|^2_{H^{s-2}(D)} + \alpha^{s-1} \| v \|^2_{L^2(D)} \Big)$$

$$\leqq C_7 \Big(\| (A-\alpha) u \|^2_{H^{s-2}(D)} + \alpha^{s-2} \| (A-\alpha) u \|^2_{L^2(D)}$$

$$+ \| v \|^2_{H^{s-1}(D)} + \alpha^{s-1} \| v \|^2_{L^2(D)} \Big) .$$

従って，$u = v + w$ だから，(4.28) 式，(4.29) 式によって ($0 < \delta \leqq 1$ に注意)，評価式 (4.2) を得る．

以上で，系 4.4 の i) ⇒ ii) の部分が示された．

ii) ⇒ i)：　定理 4.2 の ii) ⇒ i) の部分の証明において，$H^{s-1}(D) \to H^{s-1+\delta}(D)$，$H^{s-3/2}(\partial D) \to H^{s-3/2+\delta}(\partial D)$，$H^{s-1}(D \times S) \to H^{s-1+\delta}(D \times S)$，$H^{s-3/2}(\partial D \times S) \to H^{s-3/2+\delta}(\partial D \times S)$ とそれぞれ置き換えて，(4.1)式の代わりに (4.2) 式を使えば，ほとんど同様に示されるので省略する．

以上で，系 4.4 の証明を終る．

補　　注

（注１）　集合 $\mathcal{M}=\{x'\in\partial D\,;\ a(x')=0\}$ の点 x_0' の近傍で考える．ベクトル場 α は $\mathcal{M}$ 上でゼロにはならないから，x_0' における局所座標 $(t,y)=(t,y_1,y_2,\cdots,y_{n-2})$ （$|t|<\eta$，十分小）を $x_0'\leftrightarrow$ 原点，$\alpha\leftrightarrow\frac{\partial}{\partial t}$ となるように選ぶことができる．$A(t,y)=a(x(t,y))$ とおくと，函数：$t\longrightarrow a(x(t,y))$ が有限偶数次の零点しかとりえないということから，$A(t,y)$ が t に関して符号を変えないことがわかる．さらに，(t,y) に関しても符号を変えないことは次のようにしてわかる：任意の t（$|t|<\eta$）に対して，集合 $Z(t)=\{y\,;$ 函数 A が (t,y) で符号を変える$\}$ が空であることをいえばよい．もし $Z(t)$ が空でなければ，$A(t,y)$ が t に関して符号を変えないということから，ある y_0 が存在して

$$A(t,y_0)=0\,,\quad |t|<\eta$$

が成り立つ．これは，$A(t,y)=a(x(t,y))$ が t に関して<u>有限</u>（偶数）次の零点しかとりえないという仮定に反する．

（注２）　$s-1<t<s$ に対して，よく知られた補間不等式（[1]，[9]）：

$$\|u\|_{H^t(\Omega)} \leqq \varepsilon \|u\|_{H^s(\Omega)} + C_{\varepsilon, s, t} \|u\|_{H^{s-1}(\Omega)} \qquad (\varepsilon > 0)$$

を使えば，(2.8) 式は

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} \leqq C_{K, s, t} \left(\|Pu\|_{H^{s-m+\delta'}(\Omega)} + \|u\|_{H^t(\Omega)} \right)$$

と同値であることがわかる．(2.11)式，$(2.11)^*$式はこの形の Subelliptic 評価式である．

（注３）　1° 擬微分作用素 T の主シンボル $t_1(x', \xi')$ は (2.10) 式で与えられるから定理 2.9 が使えて，条件 (A), (B) が成り立っていれば，T が Parametrix をもつことがいえる．従って，任意の $s \in \mathbb{R}$ に対して

$$\varphi \in \mathcal{D}'(\partial D),\ T\varphi \in H^{s-3/2}(\partial D) \Rightarrow \varphi \in H^{s-3/2}(\partial D)$$

が成り立つ．

2° 同様に，擬微分作用素 $\widetilde{T}$ の主シンボル $\widetilde{t}_1(x', \xi', y, \eta)$ は $\widetilde{(2.10)}$ 式で与えられるから定理 2.9 が使えて，条件 (A), (B) が成り立っていれば，$\widetilde{T}$ が Parametrix をもつことがいえる．従って，次の評価式が成り立つ：

$$|\tilde{\varphi}|_{H^{s-3/2}(\partial D\times S)} \leqq \tilde{C}\left(|\tilde{T}\tilde{\varphi}|_{H^{s-3/2}(\partial D\times S)}\right.$$

$$\left.+|\tilde{\varphi}|_{L^2(\partial D\times S)}\right),\quad \tilde{\varphi}\in\mathcal{D}(\partial D\times S).$$

$$|\tilde{\psi}|_{H^{-s+3/2}(\partial D\times S)} \leqq \tilde{C}^*\left(|\tilde{T}^*\tilde{\psi}|_{H^{-s+3/2}(\partial D\times S)}\right.$$

$$\left.+|\tilde{\psi}|_{H^{-s+1/2}(\partial D\times S)}\right),\quad \tilde{\psi}\in\mathcal{D}(\partial D\times S).$$

3° 命題2.7は $\delta=0$ の場合も成立する．§4の定理4.2，注意4.5を見よ．

（注4） 擬微分作用素 P は左の Parametrix E をもつから，X 上で Globally Hypoelliptic，すなわち，

$$u\in\mathcal{D}'(X),\ Pu\in\mathcal{D}(X) \Rightarrow u\in\mathcal{D}(X)$$

であるが，X 上で Hypoelliptic とは限らないことに注意しよう．実際，仮定によって集合 $K=\{x\in X\,;\ q(x,\xi)=0,\ \xi\neq 0\}$ 内では作用素 P は"本質的には"ベクトル場 m に等しく，一般には m に Transversal な方向には Singularity が伝播しないからである．ただし，定理1の条件 $(B)_\delta$ が成り立っているような

場合には Hypoelliptic（実は Subelliptic）になる.

（注 5）　Chow の定理については次の論文を参照されたい：

W.L. Chow, Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, Math. Ann. 117 (1939), 98-105.

参考文献

[1] S. Agmon, "Lectures on elliptic boundary value problems," Van Nostrand Mathematical Studies, 1965.

[1]' アグモン，楕円型境界値問題（村松寿延訳），吉岡書店，1968.

[2] M.S. Agranovič and M.I. Višik, Elliptic problems with a parameter and parabolic problems of general type, Russian Math. Surv. 19 (1964), 53-157.

[3] J.M. Bony, Principe du maximum, inégalite de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 19 (1969), 277-304.

[4] Yu.V. Egorov, Subelliptic operators, Russian Math. Surv. 30:2 (1975), 59-118 ; 30:3 (1975), 55-105.

[5] D. Fujiwara, On some homogeneous boundary value problems bounded below, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA. 17 (1970), 123-152.

[6] L. Hörmander, Pseudo-differential operators and non-elliptic boundary problems, Ann. of Math. 83 (1966), 129-209.

[7] L. Hörmander, Subelliptic operators, Annals of Math. Studies, No. 91, Princeton Univ. Press, 1979, 127-208.

[8] 熊ノ郷準，擬微分作用素，岩波書店，1974.

[9] J.L. Lions et E. Magenes, "Problèmes aux limites non-homogènes et applications," Vols 1 et 2, Dunod, Paris, 1968.

[10] A. Melin and J. Sjöstrand, Fourier integral operators with complex

phase functions and parametrix for an interior boundary value problem, Comm. in P. D. E. 1 (1976), 313-400.

[11] O.A. Oleĭnik and E.V. Radkevič, Second order equations with nonnegative characteristic form, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island and Plenum Press, New York, 1973.

[12] K. Taira, On non-homogeneous boundary value problems for elliptic differential operators, Kôdai Math. Sem. Rep. 25 (1973), 337-356.

[13] K. Taira, Sur le problème de la dérivée oblique I, J. Math. pures et appl. 57 (1978), 379-395 ; II (to appear in Ark. för Mat. 17 (1979)).

[14] K. Taira, Un théorème d'existence et d'unicité des solutions pour des problèmes aux limites généraux (to appear).

[15] B. Winzell, Solutions of second order elliptic partial differential equations with prescribed directional derivative on the boundary, Dissertation, Linköping University, 1975.

[A1] O. Debbaj et A. Souissi, Problème à dérivée oblique associé à des opérateurs elliptiques singuliers, Journées "Equations aux Dérivées Partielles", Saint-Cast, 1979, Conférence n° 7.

[A2] L. Hörmander, A class of hypoelliptic pseudo-differential operators with double characteristics, Math. Ann. 217 (1975), 165-188.

[A3] O.A. Oleĭnik, On properties of solutions of certain boundary problems for equations of elliptic type, Mat. Sb. 30 (1952), 695-702 (Russian).

[A4] R.T. Seeley, Singular integrals and boundary value problems, Amer. J. Math. 88 (1966), 781-809.

[A5] R.T. Seeley, Topics in pseudo-differential operators, C.I.M.E., Stresa (1968), 167-305, Edizione Cremonese, Rome (1969).

[A6] D.W. Stroock and S.R.S. Varadhan, On degenerate elliptic-parabolic operators of second order and their associated diffusions, Comm. Pure Appl. Math. 25 (1972), 651-713.

[A7] K. Taira, Sur l'existence de processus de diffusion, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 23 (1979) (to appear).

[A7]' 平良和昭, 拡散過程の存在について, "線型微分方程式の超局所解析" 数理解析研究所講究録 355, 1979.

[A8] B.R. Vaĭnberg and V.V. Grušin, Uniformly nonelliptic problems I, II, Math. USSR Sbornik 72 (1967), 543-568 ; 73 (1967), 111-133.

あとがき

§1　講義で，微分作用素Aと境界条件Bを問題(*)のような非常に特別なものに限って考察した理由は，ひとつには，二次的と思われる複雑さをできるだけ避け，推論の筋道がはっきりとわかるようにしたかったからである．また，もうひとつには，定理1からわかるように，問題(*)がSobolev空間の枠内で一意可解的であるための必要十分条件を，Egorov [4]-Hörmander [7] の結果を使って，条件 $(B)_\delta$，(C) として具体的に与えることができるからである．

われわれの方法を使って，より一般の境界条件Bに対しても同様な問題を考察することは可能であるが（例えば，[13]，[A7]，[A7]′），その場合，必ずしも具体的な必要十分条件を与えることができるとは限らない．というのは，確かに理論的には，Egorov－Hörmander による Subellipticity の特徴付け（§2の定理2.4）を使えば，境界値問題を境界上に帰着した際に登場する擬微分作用素T（命題2.1）が Subelliptic であるための必要十分条件を与えることはできるが，一般的にいって，（定理2.4の条件a)，b)からわかるように）その条件が必ずしも見やすいものであるとは限らないからである．

問題(*)の場合は，擬微分作用素Tの主シンボルが非常に特別な形（(2.10)式）をしていることから，（条件a), b)と同値な）具体的な条件$(B)_\delta$を見つけることができたのである．

<u>§2</u>　擬微分作用素の一般論および楕円型境界値問題への応用については，例えば〔8〕，［A5］を参照されたい．

楕円型境界値問題を境界上に帰着した際に登場する基本的な作用素 $\Pi: \varphi \longrightarrow \frac{\partial}{\partial \nu}(P\varphi)|_{\partial D}$ が境界∂D上の一階の（楕円型）擬微分作用素であることは，〔6〕，〔A4〕，〔A8〕においてそれぞれの方法によって証明されている．（〔8〕には〔A8〕の証明が紹介されている．）証明の本質的部分は注意2.2にのべてあることと大差はない．

定理2の条件(A)，(B)の必要性については今のところ何もわからない．というのは，一般の擬微分作用素に対して，Ellipticな場合と比べて損失1のA priori評価式（i.e., $\delta'=1$とした(2.8)式）が成り立つための必要十分条件が，評価式が局所化できる特別な場合（〔A2〕）を除いては知られていないからである．もちろん，これが一般的に解決されれば，定理2の場合（i.e., $\delta=0$の場合）にも必要十分条件を与えることができるが，条件(B)から推察されるように，問題が"局所的"ではない点に非常な難しさがある．

§3　定理3.1およびその証明はOleǐnik－Radkevič [11] から引用したが，証明の本質的なアイデアはBony [3] による．

現在では，最大値の伝播のメカニズムはStroock－Varadhan [A6] によって確率論的観点から完全に解明されている．彼らの結果を"標語的"にのべれば次の通りである：

最大値はベクトル場 $X_j=\sum_{k=1}^{n}a^{jk}\frac{\partial}{\partial x_k}$ $(1\leqq j\leqq n)$ の積分曲線に沿っては正の方向にも負の方向にも伝わり，ベクトル場 $X_0=\sum_{j=1}^{n}\left(b^j-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial a^{jk}}{\partial x_k}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}$ の積分曲線に沿っては正の方向にのみ伝わる．（ここで，X_0 は微分作用素 A の"Subprincipal" Part であることに注意．）

定理3.9の証明はOleǐnik [A3] に従った．定理3.10は新しいと思われるが，その証明はWinzell [15] からヒントを得た．

§4　パラメーターを変数と把えるAgmon－Nirenbergの方法（[1], [5], [9]）の最大の利点は，本来の問題(†)に対する一意可解性の問題を一変数つけ加えられた問題(†̃)に対するIndex有限性の問題（これは§2でみたように補題2.8によって判定できる）に置き換えてしまう点にある．

定理4.2の主張 i), ii) において，空間 $H^{s-1}(D\times S)$,

$H^{s-1}(D)$ をそれぞれより広い空間 $H^{s-2+\varepsilon}(D\times S)$, $H^{s-2+\varepsilon}(D)$ $(0<\varepsilon\leqq 1)$ に置き換え，$s\geqq \max(3, m+1)$ とすれば，定理はそのままの形で成立する．これは，定理の証明を振り返ってみれば容易にわかる．講義ではこの拡張は必要なかったので，定理にのべた形で証明した．

定理4.2，系4.4の証明において最も基本的な役割を果たしたのは，Dirichlet問題の一意可解性（(4.3)式）から従う命題4.7とFourier級数論の補題4.8である．従って，(4.3)式が成立するような（(3.1)式で与えられる楕円型とは限らない）微分作用素Aに対して定理4.2，系4.4と類似の結果を一般論として証明することは可能である．しかしながら，その場合，境界値問題を境界上に帰着した際に登場する作用素Π: $\varphi \longrightarrow \frac{\partial}{\partial\nu}(P\varphi)|_{\partial D}$ が具体的にどのような作用素であるのか，例えばAが楕円型の場合のように境界∂D上の擬微分作用素であるのか，これは未解決な問題である．[A1]には，Πが境界∂D上の$\frac{1}{2}$階の（楕円型）擬微分作用素になるようなAの例が与えられている．