数理解析研究所講究録
第355巻 1979年 72-87

拡散過程の存在について

筑波大 数学系　　平良和昭

$\mathbb{R}^N$ の有界領域 D で，与えられた拡散方程式 $\frac{\partial}{\partial t}-A$ （A は2階の楕円型微分作用素）によって支配される拡散過程をすべて決定せよ，という問題について考える．詳細nついては近刊の [7] を参照されたい．

§1. 序

拡散過程 $\mathfrak{M}$ の"Markov 性"は，その遷移確率系 $\{p(t,x,dy)\}$ に対しては，Chapman－Kolmogorov の等式：

$$p(t+s,x,B)=\int_{\overline{D}} p(t,x,dy)\,p(s,y,B)$$

（B は $\overline{D}=D\cup\partial D$ の Borel 集合）として遺伝し，さらn，$p(t,x,dy)$ を積分核とする作用素 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ を

$$T_t f(x)=\int_{\overline{D}} p(t,x,dy)\,f(y)$$

で定義すれば，半群の性質：$T_{t+s}=T_t\cdot T_s$ として遺伝する．このとき，$\{T_t\}_{t\geq 0}$ は，

$$0 \leqq f \leqq 1 \implies 0 \leqq T_t f \leqq 1$$

をみたすことに注意しよう.

逆に，次の結果が知られている.

<u>定理A</u>　$\{T_t\}_{t\geq 0}$ が $C(\overline{D})$ 上の non-negative, contraction な半群であって，<u>$t=0$ で強連続</u>ならば，Markov 過程 $\mathfrak{M}$ が存在して，その遷移確率系 $\{p(t,x,dy)\}$ に対して

$$T_t f(x) = \int_{\overline{D}} p(t,x,dy)\, f(y)$$

が成立する.

<u>定義</u>　$C(\overline{D})$ 上の，$t=0$ で強連続，non-negative, contraction な半群 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ を，$\overline{D}$ 上の <u>Feller 半群</u>という.

Hille-Yosida の半群の理論に依れば，半群 $\{T_t\}$ はその生成作用素：$\mathfrak{A} f = \lim_{t \downarrow 0} (T_t f - f)/t$ によって特徴付けられる. 実際，次の結果が知られている.

<u>定理B</u>　i) $\{T_t\}_{t\geq 0}$ が $\overline{D}$ 上の Feller 半群ならば，その生成作用素 $\mathfrak{A}$ は次をみたす：

a)　定義域 $\mathcal{D}(\mathfrak{A})$ は $C(\overline{D})$ の dense な部分空間である.

b)　$\alpha > 0$ とする. 任意の $f \in C(\overline{D})$ に対して，$(\alpha - \mathfrak{A})u = f$ をみたす一意的な解 $u \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$ が存在する.

c)　b) で $u = (\alpha - \mathfrak{A})^{-1} f$ (Green 作用素) とおくと

$$\|(\alpha - \mathfrak{A})^{-1}\| \leqq \frac{1}{\alpha} \quad (\alpha > 0).$$

d)　$f \geqq 0 \implies (\alpha - \mathfrak{A})^{-1} f \geqq 0$.

ii) 逆に，$\mathfrak{A}$ が a) をみたす $C(\overline{D})$ 上の線型作用素であって，ある α_0 が存在して，$\alpha > \alpha_0$ なるすべての α に対して b) ~ d) が成立すれば，$\mathfrak{A}$ は $\overline{D}$ 上の Feller 半群 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ を生成する．

われわれは拡散方程式 $\frac{\partial}{\partial t} - A$ を固定して考えるので，$\mathfrak{A}$ の定義域 $\mathcal{D}(\mathfrak{A})$ を調べることに帰着される．このことについて，より詳しくのべよう．以下，$u \in \mathcal{D}(\mathfrak{A}) \cap C^2(\overline{D})$ に対して

$$\mathfrak{A}u(x) = Au(x) \underset{\text{def.}}{=} \sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{N} b^i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + c(x)u(x), \quad x \in D$$

を仮定しよう．ただし

$$\begin{cases} a^{ij} \in C^\infty(\overline{D}); \quad a^{ij} = a^{ji}, \ \sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j > 0, \ \forall x \in \overline{D}, \ \forall \xi \in \mathbb{R}^N \setminus 0, \\ b^i \in C^\infty(\overline{D}), \\ c \in C^\infty(\overline{D}); \quad c(x) \leqq 0 \ \text{in } D. \end{cases}$$

このとき，Ventcel' は，u のみたす境界条件 L の具体的な形を与えた：

$$\begin{aligned} Lu(x) = & \left[\sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right] + \gamma(x)u(x) \\ & + \mu(x) \frac{\partial u}{\partial n}(x) - \delta(x) Au(x) + Tu(x) \\ = & \ 0, \quad x \in \partial D. \end{aligned}$$

ここで，$(x_1, x_2, \cdots, x_{N-1})$ は境界 ∂D の局所座標であって，

$$\begin{cases} \alpha^{ij} = \alpha^{ji}; \quad \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqq 0, \ \forall x \in \partial D, \ \forall \xi \in \mathbb{R}^{N-1} \setminus 0, \\ \mu(x) \geqq 0 \ \text{on } \partial D; \quad \gamma(x) \leqq 0 \ \text{on } \partial D; \quad \delta(x) \geqq 0 \ \text{on } \partial D, \\ T \text{ は内部 } D \text{ から境界 } \partial D \text{ への積分作用素，} \end{cases}$$

きられ，n は (a^{ij}) に付随した（内向き）余法線ベクトルである．

<u>注意</u> 境界条件 L の各項の"確率論的意味"をのべる．$\mu\frac{\partial u}{\partial n}$ は n に沿っての境界での反射；γu は境界での吸収；δAu は（δ に比例する時間だけの）境界での停留；Tu は境界から内部へのジャンプ；$\sum_{i,j}\alpha^{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_i \beta^i\frac{\partial u}{\partial x_i}$ は境界上の拡散をそれぞれ表わしている．

以上のことをまとめると，粒子は，領域の内部では与えられた拡散方程式 $\frac{\partial}{\partial t}=A$ に支配されて運動し，境界では Ventcel' の境界条件 L に従って運動する，ことがわかる．

本稿の目的は，逆に，（微分作用素 A を固定しておいて）どのような Ventcel' の境界条件 L に対して，実際に $\bar{D}$ 上の拡散過程 $\mathfrak{M}$ が存在するか，という問題を考えることである．いいかえれば，粒子の<u>境界での挙動</u>によって拡散過程を特徴付けることである．

§2．問題の定式化

§1 の事情を踏まえて，次の定義を導入しよう．

<u>定義</u> $\{T_t\}_{t\geq 0}$ を Feller 半群とする．$\{T_t\}$ の生成作用素 $\mathfrak{A}$ が，$\mathfrak{A}u = Au$，$u \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$ をみたすとき，半群 $\{T_t\}$ を <u>A－拡散過程</u>であるという．ここで，Au は Distribution の

意味でとる.

われわれは次の問題を考える.

問題　$\bar{D}$ 上の A-拡散過程 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ をすべて求めよ.

$N=1$ のときは, Feller, Dynkin, Itô-McKean, Ray によって完全に解決されているので, 以下, $N \geqq 2$ とする.

上の問題を次の形で考察しよう.

問題′　$C(\bar{D})$ 上の線型作用素 $\mathfrak{A}$ を

$$\mathfrak{A}u = Au, \quad u \in \mathcal{D}(\mathfrak{A}) = \{ u \in C(\bar{D})\ ;\ Au \in C(\bar{D}),\ Lu = 0 \}$$

で定義する. このとき, Ventcel′ の境界条件 L がどのような条件をみたせば, 作用素 $\mathfrak{A}$ が Feller 半群 (従って, A-拡散過程) $\{T_t\}_{t\geq 0}$ を生成するか.

注意　$u \in C(\bar{D})$ で $Au \in C(\bar{D})$ ならば, 境界条件 Lu は Distribution の意味で存在する. 実際, $Lu \in H^{-5/2}(\partial D)$ であることが示せる.

§3. 一般的結果

簡単のため, 積分作用素 $T=0$, すなわち, 境界から内部へのジャンプはないとする. さらに, 境界条件 L の係数はすべて C^∞ とする. より詳しくのべると,

$$Lu(x) = \left[\sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right] + \gamma(x)\, u(x)$$
$$+ \mu(x) \frac{\partial u}{\partial n}(x) - \delta(x)\, Au(x),$$

ただし

$$\begin{cases} \alpha^{ij} \in C^\infty(\partial D)\ ;\ \alpha^{ij} = \alpha^{ji},\ \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqq 0,\ {}^\forall x \in \partial D,\ {}^\forall \xi \in \mathbb{R}^{N-1} \setminus 0, \\ \beta^i \in C^\infty(\partial D), \\ \mu \in C^\infty(\partial D)\ ;\quad \mu(x) \geqq 0 \quad \text{on} \quad \partial D, \\ \gamma \in C^\infty(\partial D)\ ;\quad \gamma(x) \leqq 0 \quad \text{on} \quad \partial D, \\ \delta \in C^\infty(\partial D)\ ;\quad \delta(x) \geqq 0 \quad \text{on} \quad \partial D. \end{cases}$$

次の定義は本質的である．

<u>定義</u> 境界条件 L が，$\mu(x) + \delta(x) > 0$ on ∂D をみたすとき，L は <u>Transversal</u> であるという．

<u>注意</u> 境界条件 L が Transversal であるとは，内部 D の拡散過程と境界 ∂D 上の拡散過程とが "無関係" ではないことを意味する．より具体的に，偏微分方程式論の言葉でいえば，次の定理にでてくる境界値問題 (*) が境界上の積分方程式に帰着できることを意味する．

さて，われわれの主結果は次の定理であり，[6] のひとつの拡張を与えている．

<u>定理</u> Ventcel' の境界条件 L は Transversal とする．次を仮定する．

(I) [解の存在] ある $\lambda \geqq 0$ と $\alpha \geqq 0$ が存在して，$C(\partial D)$ のある dense な部分集合に属する任意の φ に対して，境界値問題：

$$(*)\begin{cases}(\alpha - A)u = 0 & \text{in } D,\\ (\lambda - L)u = \varphi & \text{on } \partial D\end{cases}$$

が $u \in C^2(\bar{D})$ なる解をもつ.

(II) [解の一意性] 任意の $\alpha > 0$ に対して, $u \in C(\bar{D})$ が

$$\begin{cases}(\alpha - A)u = 0 & \text{in } D,\\ Lu = 0 & \text{on } \partial D\end{cases}$$

をみたせば, $u \equiv 0$ である.

このとき,

$$\mathfrak{A}u = Au, \quad u \in \mathcal{D}(\mathfrak{A}) = \{u \in C(\bar{D});\ Au \in C(\bar{D}),\ Lu = 0\}$$

で定義される, $C(\bar{D})$ 上の線型作用素 $\mathfrak{A}$ は A-拡散過程 $\{T_t\}_{t \geq 0}$ を生成する.

注意　仮定 (II) は解の正則性と密接な関係がある. 実際, 次の結果を示すことができる.

系　Ventcel' の境界条件 L は Transversal とする. 次を仮定する.

(I)　定理と同じとする.

(II)′ [解の正則性] 任意の $\alpha > 0$ に対して, $u \in C(\bar{D})$ が

$$\begin{cases}(\alpha - A)u = 0 & \text{in } D,\\ Lu \in C^\infty(\partial D)\end{cases}$$

をみたせば, $u \in C^2(\bar{D})$ である.

このとき, 定理と同じ結論を得る. さらに, 作用素 $\mathfrak{A}$ は

$A\Big|_{\{u\in C^2(\bar{D})\,;\,Lu=0\}}$ の $C(\bar{D})$ における最小閉拡張と一致する.

§4. 具体的結果

仮定(I), (II) の境界値問題に対して, 解の存在, 一意性, 正則性を調べることにより, 以下の結果を得る.

<u>定理 1</u> Ventcel' の境界条件 $Lu(x) = \left[\sum_{i,j=1}^{N-1}\alpha^{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{N-1}\beta^i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right] + \gamma(x)u(x) + \mu(x)\frac{\partial u}{\partial n}(x) - \delta(x)Au(x)$ $(u\in C^2(\bar{D}))$ が Transversal であって, 次をみたしているとする.

(A) $\Sigma = \{(x,\xi)\in T^*\partial D\setminus 0\,;\,|\xi|=1,\ q_2(x,\xi)\equiv\sum_{i,j=1}^{N-1}\alpha^{ij}(x)\xi_i\xi_j=0\}$ において

$$\widetilde{\mathrm{Tr}}\,H_{q_2}(x,\xi) + \mu(x) + \left(\sum_{i=1}^{N-1}\left(\beta^i(x) - \sum_{j=1}^{N-1}\frac{\partial\alpha^{ij}}{\partial x_j}(x)\right)\xi_i\right)\sqrt{-1} \neq 0.$$

ここで, $\widetilde{\mathrm{Tr}}\,H_{q_2}(x,\xi)$ は, $q_2(x,\xi)=\sum_{i,j=1}^{N-1}\alpha^{ij}(x)\xi_i\xi_j$ の (x,ξ) に関する Hessian $H_{q_2}(x,\xi)$ の Hamilton 写像の正の固有値の(重複度をこめた)和である.

このとき, 作用素 $A\Big|_{\{u\in C^2(\bar{D});\,Lu=0\}}$ の $C(\bar{D})$ における最小閉拡張 $\mathfrak{A}$ が存在して, $\mathfrak{A}$ は A-拡散過程 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ を生成する.

<u>注意</u> 定理で, $q_2(x,\xi)=\sum_{i,j=1}^{N-1}\alpha^{ij}(x)\xi_i\xi_j>0$, $\forall x\in\partial D$, $\forall\xi\in\mathbb{R}^{N-1}\setminus 0$ の場合は, [1] で扱われた.

境界条件 L が1階の場合, すなわち, $\alpha^{ij}\equiv 0$ on ∂D のときは, $\beta=(\beta^1,\beta^2,\cdots,\beta^{N-1})$ が ∂D 上の<u>ベクトル場</u>であると

仮定して，より詳しく次の結果を得る．

定理2 Ventcel'の境界条件 $Lu(x) = \sum_{i=1}^{N-1}\beta^i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + \gamma(x)u(x) + \mu(x)\frac{\partial u}{\partial n}(x) - \delta(x)Au(x)$ $(u \in C^2(\bar{D}))$ が Transversal であって，次をみたしているとする．

(B) 定数 $C_0 > 0$ が存在して

$$\left|\sum_{i=1}^{N-1}\beta^i(x)\xi_i\right| \leqq C_0\,\mu(x)\,|\xi| \quad \text{on } T^*\partial D.$$

このとき，定理1と同じ結論を得る．

仮定(B)から，ベクトル場 $\beta = (\beta^1, \beta^2, \cdots, \beta^{N-1})$ は，$M = \{x \in \partial D;\ \mu(x) = 0\}$ 上2次で消えることが従うが，$\beta \neq 0$ on M の場合には，次の結果を得る．

定理3 Ventcel'の境界条件 $Lu(x) = \sum_{i=1}^{N-1}\beta^i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + \gamma(x)u(x) + \mu(x)\frac{\partial u}{\partial n}(x) - \delta(x)Au(x)$ $(u \in C^2(\bar{D}))$ が Transversal であって，次をみたしているとする．

(C) ベクトル場 $\beta = (\beta^1, \beta^2, \cdots, \beta^{N-1}) \neq 0$ on $M = \{x \in \partial D;\ \mu(x) = 0\}$ で，βのいかなる極大な積分曲線も M に完全には含まれない．

このとき，定理1と同じ結論を得る．

注意 定理2，定理3で，$\mu(x) > 0$ on ∂D の場合は，[1]で扱われた．

注意 条件(A),(B),(C)の"確率論的"な意味付けを与えることは，(A),(B),(C)の必要性を調べるうえでも，重要な

ことと思われるが，完全には解明できていない。

§5. 証明のスケッチ

<u>§3 定理の証明</u>　[6] と殆んど同じなので，要点のみをのべよう．1° よく知られているように，任意の $\alpha \geq 0$ に対して，$G_\alpha^0 : C(\overline{D}) \longrightarrow C(\overline{D})$，$H_\alpha : C(\partial D) \longrightarrow C(\overline{D})$ なる有界且非負な作用素が存在して，それぞれ次をみたす．

$$\begin{cases} (\alpha - A) G_\alpha^0 f = f & \text{in } D \quad (f \in C(\overline{D})), \\ G_\alpha^0 f|_{\partial D} = 0 & \text{on } \partial D. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\alpha - A) H_\alpha \varphi = 0 & \text{in } D \quad (\varphi \in C(\partial D)), \\ H_\alpha \varphi|_{\partial D} = \varphi & \text{on } \partial D. \end{cases}$$

そこで，Ventcel' の境界条件 L に対して，線型作用素 $LG_\alpha^0 : C(\overline{D}) \longrightarrow C(\partial D)$ を

$$LG_\alpha^0 f = L(G_\alpha^0 f),\ f \in \mathcal{D}(LG_\alpha^0) = \{ f \in C(\overline{D});\ G_\alpha^0 f \in C^2(\overline{D}) \}$$

で定義すると，LG_α^0 は非負且有界な作用素

$$\overline{LG_\alpha^0} : C(\overline{D}) \longrightarrow C(\partial D)$$

に（一意的に）拡張される．同様に，線型作用素 $LH_\alpha : C(\partial D) \longrightarrow C(\partial D)$ を

$$LH_\alpha \psi = L(H_\alpha \psi),\ \psi \in \mathcal{D}(LH_\alpha) = \{ \psi \in C(\partial D);\ H_\alpha \psi \in C^2(\overline{D}) \}$$

で定義すると，LH_α の最小閉拡張

$$\overline{LH_\alpha} : C(\partial D) \longrightarrow C(\partial D)$$

が存在する.

2° まず, 仮定(I) が成り立っていれば, 任意の $\alpha \geqq 0$ に対して, 作用素 $\overline{LH_\alpha}$ が ∂D 上の Feller 半群を生成することがわかり, さらに, 境界条件 L が Transversal であれば, 任意の $\alpha > 0$ に対して, 逆作用素 $-\overline{LH_\alpha}^{-1}$ が存在して, 非負且有界である. 従って, 任意の $\alpha > 0$ に対して, 作用素

$$u = G_\alpha f = G_\alpha^0 f - H_\alpha \overline{LH_\alpha}^{-1} (\overline{LG_\alpha^0 f}), \quad f \in C(\overline{D})$$

を定義することができる. このとき, $u = G_\alpha f$ は,

$$\begin{cases} (\alpha - A) u = f & \text{in } D, \\ \quad\quad Lu = 0 & \text{on } \partial D \end{cases}$$

をみたす. すなわち, $u \in \mathcal{D}(\mathfrak{A}) = \{u \in C(\overline{D}) ; Au \in C(\overline{D}), Lu = 0\}$ であって, $(\alpha - \mathfrak{A}) u = f$. 仮定(II) から, 一意性も従うので, $G_\alpha = (\alpha - \mathfrak{A})^{-1}$ $(\alpha > 0)$ を得る. この G_α を使うと, [6] と殆んど同様にして, 定理 B の条件 a) ～ d) がすべてみたされていることがいえて, 作用素 $\mathfrak{A}$ は, $\overline{D}$ 上の Feller 半群の生成作用素となる.

<u>§3 系の証明</u> 1° まず, [仮定 (I) + 仮定(II)'] $\Longrightarrow$ [仮定 (I) + 仮定 (II)] を示そう. 任意の $\alpha > 0$ に対して, $u \in C(\overline{D})$ で

$$\begin{cases} (\alpha - A) u = 0 & \text{in } D, \\ \quad\quad Lu = 0 & \text{on } \partial D \end{cases}$$

ならば，仮定 (II)$'$ から，$u \in C^2(\overline{D})$ が従う．よって，$\varphi = u|_{\partial D}$ とおけば，Dirichlet 問題の解の一意性から，$u = H_\alpha \varphi$ とかけて，$\varphi \in \mathcal{D}(LH_\alpha)$，$LH_\alpha \varphi = Lu = 0$ が従う．仮定 (I) が成り立っていて，境界条件 L が Transversal ならば，$\overline{LH_\alpha}$ は 1 to 1 になるので，$\varphi = 0$，すなわち，$u \equiv 0$ を得る．仮定 (II) がみたされていることがわかったので，定理から，作用素 $\mathfrak{A}$ は，$\overline{D}$ 上の Feller 半群の生成作用素である．

2° 次に，$\{G_\alpha f\,;\, f \in C^\infty(\overline{D})\} \subset \{u \in C^2(\overline{D})\,;\, Lu = 0\}$ を示す．$f \in C^\infty(\overline{D})$ ならば，$G_\alpha^0 f \in C^\infty(\overline{D})$，よって，$LG_\alpha^0 f \in C^\infty(\partial D)$ が従う．また，仮定 (II)$'$ から，$w = H_\alpha\left(\overline{LH_\alpha}^{-1}(LG_\alpha^0 f)\right)$ とおくと，

$$\begin{cases} (\alpha - A)w = 0 & \text{in } D, \\ \quad Lw = LG_\alpha^0 f \in C^\infty(\partial D) \end{cases}$$

より，$w \in C^2(\overline{D})$ である．従って，

$$u = G_\alpha f = G_\alpha^0 f - H_\alpha\left(\overline{LH_\alpha}^{-1}(LG_\alpha^0 f)\right) \in C^2(\overline{D}).$$

3° 最後に，作用素 $\mathfrak{A}$ が，$A|_{\{u \in C^2(\overline{D})\,;\, Lu = 0\}}$ の $C(\overline{D})$ における最小閉拡張と一致することを示す．$u \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$ とする．$f = (\alpha - A)u$ とおくと，$u = G_\alpha f$ であった．$\{f_j\} \subset C^\infty(\overline{D})$ を選んで，$f_j \longrightarrow f$ in $C(\overline{D})$ とできるので，$u_j = G_\alpha f_j$ とおくと，2° の結果から，$u_j \in C^2(\overline{D})$，$Lu_j = 0$．作用素 $G_\alpha : C(\overline{D}) \longrightarrow C(\overline{D})$ は有界だったから，$u_j \longrightarrow u$

in $C(\bar{D})$, よって, $Au_j = \alpha u_j - f_j \longrightarrow \alpha u - f = Au$ in $C(\bar{D})$. 以上をまとめて,

$$\{(u, Au) ;\ u \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})\}$$
$$= \{(u, Au) ;\ u \in C^2(\bar{D}),\ Lu = 0\} \text{ の } C(\bar{D}) \oplus C(\bar{D}) \text{ における閉包}$$

が示された.

§4 定理1の証明　1° 次の境界値問題の一意可解性について, "Sobolev空間" の枠内で考えよう.

$$(+) \begin{cases} (\alpha - A)u = f & \text{in } D, \\ Lu = \varphi & \text{on } \partial D. \end{cases}$$

ここで, $\alpha \geqq 0$. そのために, Agmon - Nirenberg に示唆されて, 単位円 S^1 を補助的に導入して, (+) に付随して次の境界値問題を考える.

$$(\tilde{+}) \begin{cases} \left(A + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\tilde{u} = \tilde{f} & \text{in } D \times S^1 \quad (y \in S^1), \\ L\tilde{u} = \tilde{\varphi} & \text{on } \partial D \times S^1. \end{cases}$$

すなわち, パラメーター α を, 単位円 S^1 上の2階の微分作用素に置き換えた. このとき, 粗くいって, 次のことを示すことができる ([8]):

『問題 (+) が, 十分大の $\alpha > 0$ に対して, 一意可解的であるための必要十分条件は, 問題 $(\tilde{+})$ の Index が有限であることである』

さらに，このとき，任意の $\alpha \geqq 0$ に対して，問題 $(+)$ の Index がゼロであることも従う．

2° 境界条件 L が Transversal で，仮定 (A) が成り立っていれば，[2] の結果を使って，問題 $(\widetilde{+})$ の Index が有限であることが示せる．従って，1° の結果から，問題 $(+)$ の Index はゼロである．さらに，このとき，$\alpha \geqq 0$ に対して，

$$(\alpha - A)u = 0 \text{ in } D,\ Lu \in C^\infty(\partial D) \Longrightarrow u \in C^\infty(\overline{D})$$

も示せるので，条件 $(\mathrm{II})'$ がみたされていることがわかる．

一方，境界条件 L が Transversal ならば，任意の $\alpha > 0$ に対して，次の最大値の原理を得る：

$$u \in C^2(\overline{D}),\ (A - \alpha)u \geqq 0 \text{ in } D,\ Lu \geqq 0 \text{ on } \partial D \Rightarrow u \leqq 0 \text{ on } \overline{D}.$$

これから，$\alpha > 0$ に対する問題 $(+)$ の一意性が従う．

以上をまとめると，境界条件 L が Transversal で，仮定 (A) が成り立っていれば，任意の $f \in C^\infty(\overline{D})$ と $\varphi \in C^\infty(\partial D)$ に対して，問題 $(+)$ が一意的な解 $u \in C^\infty(\overline{D})$ をもつことが従い，条件 (I) が $\lambda = 0$ でみたされていることがわかる．§1 の系から，定理 1 を得る．

§4 定理 2，定理 3 の証明　定理 1 の場合と同様にして，それぞれ [2] と [5] の結果を使って，境界条件 L が Transversal であって，仮定 (B) あるいは仮定 (C) が成り立っていれば，条件 $(\mathrm{II})'$ がみたされていることがわかる．さらに，

仮定(B)あるいは仮定(C)が成りたっていれば，任意の $f \in C^\infty(\overline{D})$ と $\varphi \in C^\infty(\partial D)$ に対して，$\delta \equiv 0$ とした境界値問題

$$\begin{cases} (\alpha - A)u = f & \text{in } D, \\ -\sum_{i=1}^{N-1} \beta^i \frac{\partial u}{\partial x_i} + (\lambda - \delta)u - \mu \frac{\partial u}{\partial n} = \varphi & \text{on } \partial D \end{cases}$$

が，定数 $\lambda > 0$ に対して，一意的な解 $u \in C^\infty(\overline{D})$ をもつことが従い，"perturbation" によって，一般の $\delta \geq 0$ に対しても，同じことがいえる．すなわち，条件(I)が $\lambda > 0$ に対してみたされていることが得られる．

REFERENCES

[1] J.-M. Bony, P. Courrège et P. Priouret, Semi-groupes de Feller sur une variété à bord compacte et problèmes aux limites intégro-différentiels du second ordre donnant lieu au principe du maximum, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 18 (1968), 369-521.

[2] L. Hörmander, A class of hypoelliptic pseudo-differential operators with double characteristics, Math. Ann., 217 (1975), 165-188.

[3] 池田信行，上野正，田中洋，佐藤健一，多次元拡散過程の境界問題(上)，(下)，確率論セミナー，Vol. 5 (1960); Vol. 6 (1961).

[4] 国田寛，多次元拡散過程の境界問題，函数解析的方法に

よる解析学の諸問題の研究，報告集，1969年3月，東京.

[5] A. Melin and J. Sjöstrand, Fourier integral operators with complex phase functions and parametrix for an interior boundary value problem, Comm. in P. D. E., 1 (1976), 313-400.

[6] K. Sato and T. Ueno, Multi-dimensional diffusion and the Markov process on the boundary, J. Math. Kyoto Univ., 4 (1965), 529-605.

[7] K. Taira, Sur l'existence de processus de diffusion, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 29 (1979). To appear.

[8] K. Taira, Un théorème d'existence et d'unicité des solutions pour des problèmes aux limites généraux. To appear.

以上