

VII-1. 非平衡統計物理グループ

教授	有光 敏彦
助教	吉田 恭
博士後期課程大学院生	小松崎 慎人, 武智 公平, 大日向 正志, 真山 祐児, 阿部 将大
博士前期課程大学院生	小口 拓郎, 酒井 一樹
研究留学生	Abdulmawla Sabaa Talala A.

(2013年4月時点)

【1】 間欠性を呈する流動系の非平衡統計物理

- (1) 充分発達した乱流のマルチフラクタル確率密度関数理論による解析 (武智 (院生), 有光直子 (横浜国大), 有光) 講演 [3]

Multifractal Probability Density Function Theory (MPDFT) は、『間欠性の本質は、Navier-Stokes 方程式のスケール不変性に起因する速度場の特異性が実空間にマルチフラクタル分布していることの現れである』との仮説に基づいて、裾引き確率密度関数 (PDF) を解析する理論表式を提供する。これにより、PDF の有する情報を高精度で抽出することが可能となった。MPDFT では、PDF の裾野部分には、coherent な乱流運動 (Reynolds 数無限大の極限で得られる特異点が呈する運動) のみが寄与すると仮定 (近似) し、一方、中心部分には、N-S 方程式の散逸項の存在に基づく in-coherent なゆらぎ運動の寄与と coherent な運動が合わさって寄与するという観点での解析が行われる。現時点で世界一のサイズ 4096^3 大規模乱流直接数値シミュレーション (DNS) データを有する名古屋大学の金田・石原グループから DNS スナップショット速度場生データの提供を受け、それよりエネルギー散逸率 PDF とエネルギー輸送率 PDF を抽出した。それらの PDF を MPDFT で得られた理論的 PDF により解析し、PDF の裾部分と中心部分の有する情報の抽出を行い、それらの部分の解析を進めた。その結果、渦の混んでいる領域の PDF には、「乱流のコヒーレントな運動 (乱流系全体から抽出した PDF の裾野部分)」に関する情報が含まれ、渦の空いている領域の PDF には、「乱流に特有なインコヒーレントな運動 (乱流系全体から抽出した PDF の中心部分)」に関する情報が含まれることがわかった。つまり、「間欠性に由来する PDF 裾野部分」と「NS 方程式のスケール変換不変性を破る項 (散逸項) に由来する PDF 中心部分」に分けて解析するという MPDFT の仮説の妥当性が、検証された。

一方で、金田・石原らの大規模一様等方性乱流 DNS によって得られた格子点数 4096^3 の乱流場を 512 個の格子点数 512^3 の小領域に分割して、それぞれの小領域内で直径 r (相関長より充分小さい) の球で局所平均したエネルギー散逸場 ϵ_r の PDF の調査を進めた。大スケールのエネルギー散逸率の強い領域の疎密は ϵ_r の小領域内平均 $\bar{\epsilon}_r$ と関係する。各小領域で規格化された局所平均エネルギー散逸率 $\epsilon_r/\bar{\epsilon}_r$ の統計を 2 次モーメント、高次モーメント、PDF の裾引きなどの指標で調べたが、 $\bar{\epsilon}_r$ の値 (つまり大スケールの疎密) との相関は弱いことが明らかとなった。前述の MPDFT による解析との詳細な関連は今後の課題である。

- (2) δ^∞ 不安定周期軌道のベキ的不安定性と Ljapunov 指数 (小松崎 (院生), 本池巧 (駿河台大), 有光)

MPDFT の「乱流とは全ての δ スケール・Cantor 集合と同等な階層構造を持つ渦構造の重ね合わせと見做すことができる」という仮説の検証を目的に、1 次元離散力学系における δ^K ($K \gg 1$) 周期軌道の階層構造と不安定性の関係の解析を行っている。 δ^K 超安定周期軌道 (δ^K -PSSO) は、系がカオス状態となる制御パラメータ領域内の δ 周期の窓の中に存在する。 δ 周期の窓に内包される δ^K 周期の窓の無限の入れ子構造を反映し、 δ^K -PSSO は δ スケール・Cantor 集合と同じマルチフラクタル構造を持ち、累積軌道拡大率が

冪的に増大するという特徴を持つ。この軌道の中の間欠性が顕著な領域に関して、累積軌道拡大率の冪的不安定性の冪指数 $1/(1-q)$ が $1/(1-q) = (1/\alpha_- - 1/\alpha_+) \ln \delta / \ln(2-1/\delta)$ というスケーリング関係式に従うことが明らかとなっている。ただし、 α_+ ($\alpha_- < \alpha_+$) は δ^K -PSSO のマルチフラクタルスペクトル $f(\alpha)$ の零点である。

δ^K -PSSO は、 δ 毎に異なるパラメータ領域で単独で存在し、軌道毎に α_{\pm} が異なる。これは、MPDFT の仮説とは異なる状況である。MPDFT の仮説を検証するには、すべての周期軌道が共存する充分発達したカオス状態に於いて、 δ^K 周期軌道を解析する必要がある。

ロジスティック写像の δ^K ($\delta = 2, 3, 4$) 不安定周期軌道の Ljapunov 指数 $\lambda(\mu, \delta)$ の不安定化直後から充分発達した領域までの結果を、最小二乗法によりフィッティングした結果より、Ljapunov 指数の μ および δ 依存性が

$$\lambda(\mu, \delta) = \ln(1 + \bar{\mu}^{1/\delta}) \quad (1)$$

となるという予想が得られた。ただし、 $\bar{\mu} = (\mu - \bar{\mu}_K^{(\delta)}) / (\mu_{FD} - \bar{\mu}_K^{(\delta)})$ で $\bar{\mu}_K^{(\delta)}$ および μ_{FD} は、それぞれ δ^K 周期軌道が不安定化する μ の値および充分発達したカオス領域の μ の値である。充分発達したカオス状態 ($\mu = \mu_{FD}$) では、ロジスティック写像はテント写像の位相共役で表すことが可能である。 $\mu \sim \mu_{FD}$ に於けるロジスティック写像のテント写像との位相共役からのずれを $(\bar{\mu} - 1)$ の 1 次のオーダーで求めた結果、Ljapunov 指数の μ , δ 依存性が解析的に

$$\lambda(\mu, \delta) = \ln[2(1 + A(\bar{\mu} - 1)/\delta)] \quad (2)$$

となることを導き出した。 A は、 μ および δ にはよらない定数である。(2) 式より、数値計算から予想される Ljapunov 指数 $\lambda(\mu, \delta)$ の μ , δ 依存性を表す (1) 式は、充分発達したカオス状態の近傍で、 $(\bar{\mu} - 1)$ の 1 次のオーダーで解析的に正しいことが示された。

本年度は、(2) 式より得られる δ^K -PSSO の階層構造の解析を行った。その結果、 δ^K -PSSO の階層構造が、不安定化直前は指数型のスケーリング特性であったものが、充分発達したカオス領域では二重指数型へと変化する様子が明らかとなった。このような階層構造の変化から、不安定化直前のスケーリング関係式の μ 依存性を明らかにすることが目下の課題である。

(3) 量子流体乱流の統計法則 (吉田, 有光) 論文 [1], 講演 [1, 2]

液体ヘリウムの超流動状態や Bose-Einstein 凝縮体の流動などの量子流体の運動は、適切な近似のもと Gross-Pitaevskii (GP) 方程式により支配される。量子流体は、循環が量子化された渦糸が存在するなど、Navier-Stokes 方程式に従う古典流体とは異なる性質を有する。昨年度までの我々の研究を含め、GP 方程式に従う量子流体乱流の数値シミュレーションが複数の研究者によって行われているが、そのエネルギースペクトルの性質について見解の一致が見られる段階にはまだ至っていない。

本研究では、GP 方程式に完結近似の解析手法を適用した。完結近似の手法、特に Lagrange 変数に基づくその方法は、古典流体において実験とも整合する Kolmogorov のエネルギースペクトルを導くことが知られていたが、量子流体乱流にはこれまでは適用されていなかった。式を閉じる代表変数として GP 方程式の基本的場の量である秩序変数 ψ の 2 点相関関数および応答関数で式を選び、その完結近似方程式を導いた。

完結近似方程式は、GP 方程式中で線形項が支配的で非線形項が十分小さい場合には、その範囲で有効な弱波動乱流理論の式と一致することが示された。完結近似方程式の特徴は、弱波動乱流理論の適用範囲外の強乱流状態つまり非線形項が支配的である場合にも適用可能だということである。GP 方程式では運動エネルギーと相互作用エネルギーを合わせた全エネルギーおよび粒子数が保存量である。強乱流状態でその双方それぞれがカスケードする場合のエネルギースペクトルのべき則を求めた。特にエネルギーカスケードの場合エネルギースペクトルは k^{-2} 則、ただし k は波数、であり、このべき則は先行研究の数値シミュレーションの結果とも整合している。また完結近似の理論解析では、統計的定常性を維持するために k^{-2}

則に補正項が必要であることが示唆された。完結近似理論の結果の数値シミュレーションによる定量的な検証などは今後の課題である。

(4) 自己重力流体乱流の統計法則 (吉田)

互いの重力で相互作用する N 質点系は、連続体近似で自己重力流体系となる。宇宙空間の質量密度分布の解析において、あるスケール領域では、自己重力流体系が妥当な近似となる。本研究では、自己重力流体系の統計量について、Lagrange 変数に基く完結近似の適用を行っている。今後、通常の流体の乱流のようなエネルギーカスケードを示す解が存在するか、またその解の振舞いなどを調べる予定である。

(5) 乱流燃焼における燃料密度スペクトルの解析 (小口 (院生), 吉田) 学位論文 [1]

エンジン内部等の燃焼において流体は乱流状態にあり、乱流が燃焼に与える影響を理解することは、乱流を制御して燃焼の効率を上げる工学的応用上も重要である。本研究では、燃焼の過程のうち特に流体運動に係る部分に着目し、流体部分については流体の基礎方程式である Navier-Stokes 方程式を粗視化モデルなどを導入せずそのまま扱い、化学反応についてはなるべく簡略化を行い燃料一成分、逆反応無し的一段階過程の簡略化モデルで、数値シミュレーションを行った。その結果、化学反応の特徴的時間スケールに対する乱流の渦の時間スケールの比が十分小さい高波数領域では、燃料密度スペクトル $F(k)$ が化学反応が無い場合のスペクトルで近似されること、またそこからのずれが上記時間スケール比の摂動解析と整合することが示された。またシミュレーションにより、ずれのスペクトルに表れる普遍定数の見積もりを行った。

【2】 散逸場の量子論、量子情報物理

(1) 連続量量子テレポーテーション (大日向 (院生), 北島佐知子 (お茶大), 有光, 吉田) 論文 [2]

量子テレポーテーションでは、Alice と Bob はそれぞれスクイーズド真空を生成し、これらをハーフ・ビーム・スプリッター (HBS) を通過させることによりエンタングル状態を生成して利用する。Victor が準備した入力状態 (量子情報) の伝送に当たって、Alice がホモダイン測定 (Bell 測定) を実施し、得られた測定値を古典通信手段で Bob に知らせる。それに基づいて、Bob は適切なユニタリー変換を施し、Victor からの量子情報を出力状態として手に入れる。Victor の入力状態と Bob が得た出力状態の正確さは、フィデリティにより評価される。

連続量量子情報の伝送では、エンタングル状態がスクイーズド状態を利用して作られているが、実験室で生成されるスクイーズド真空では、そのスクイーズドの度をあまり大きくできないため (スクイージング・パラメータが有限)、Alice と Bob が共有するエンタングル状態は不完全である。さらに、エンタングル状態に外界の影響 (散逸による緩和率 κ として記述される) が加わった場合についても、フィデリティの振る舞いを詳細に調べた。

<論文>

- [1] Kyo Yoshida and Toshihico Arimitsu: "Inertial range structure of Gross-Pitaevskii turbulence within a spectral closure approximation", Journal Physics A: Mathematical and Theoretical, **46**, 335501 (2013).

- [2] S. Kitajima, T. Arimitsu, M. Obinata and K. Yoshida: “Quantum teleportation for continuous variables via a partially entangled state constructed under the environment”, *Physica A*, **404**, 242—270 (2014).

<講演>

- [1] (招待講演) Kyo Yoshida, ”Strong turbulence in nonlinear Schrödinger equation”, The 6th Pacific RIM Conference on Mathematics 2013, 2013年7月2日, 札幌コンベンションセンター, 札幌.
- [2] Kyo Yoshida and Toshihico Arimitsu, ”Spectra in Gross-Pitaevskii turbulence within a spectral closure approximation”, European Turbulence Conference 14, 2013年9月2日, ENS Lyon, Lyon, France.
- [3] 武智公平, 吉田恭, 有光直子, 「乱流のエネルギー散逸場の領域分割による解析」, 日本物理学会第69年会次大会, 2014年3月28日, 東海大学湘南キャンパス, 平塚.

<社会貢献等>

- [1] 吉田 恭, 「流体力学」, 茗溪学園コア SSH AP サイエンス学習会, 2013年9月29日, 茗溪学園, つくば.

<学位論文 (修士) >

- [1] 筑波大学修士論文: 小口 拓郎 (初貝) 「乱流燃焼における燃料密度スペクトルの解析」(2014年2月).