2014筑波大学附属駒場論集54集

創造的な教材・指導法及びカリキュラムの開発

－中高６カ年から大学へ－

（５年計画の３年次）

筑波大学附属駒場中・高等学校　数学科
須藤　雄生・更科　元子・鈴木　　清
須田　　学・町田多加志・三井田裕樹

創造的な教材・指導法及びカリキュラムの開発

ー中高６カ年から大学へー

（５年計画の３年次）

筑波大学附属駒場中・高等学校　数学科
須藤　雄生・更科　元子・鈴木　　清
須田　　学・町田多加志・三井田裕樹

要約

教材開発は，基本姿勢として生徒と教員の相互作用で築き上げるものと考えられる。毎時の授業のなかで，教員が提示した中心課題に対し，生徒が自らの発想や，解決にいたる道筋，さらなる発展課題などを見つけ，発表する。教員は，生徒の発想を拾い上げ，生徒同士の議論を整理し，さらに課題を洗練させる。このような創造的な教材とそれに対する生徒と教員の相互作用は，本校の数学教育において長年中心的な役割を果たしている。

2002 年度からスーパーサイエンスハイスクール(SSH)に指定されている本校で，数学科は上記の考えに立ちながら，大学や実社会にも繋がる中高の教材・指導法及びカリキュラムを開発すべく研究を行っている。開発した教材は約 70 に及び，教員研修会の開催をはじめ各種 SSH 事業の実施を通し，さらなる研究の充実を図っている。

キーワード：サイエンスコミュニケーション，中高大院連携

1. 今はじめに

2013（平成 25）年度入学生から全面実施された新学習指導要領は，数学・理科においては，2012 年度から先行実施されており，この 3 月（2015 年）に最初の卒業生を出す。このような情勢の中，数学教育への関心は日増しに高まりを見せている。それは，本校における数学科教員研修会の，全国からの参加状況をみても実感するところである。

本校数学科では，かねてより，筑波大学をはじめ，他大学の数学関係者の協力も得ながら，大学や社会での学びにつながる数学教材の開発および指導法の研究を行っている。特に，スーパーサイエンスハイスクール（以下「SSH」と略する）の指定を受けて以来，中長期的な見通しをもち，これらの研究を推進してきた。

2002 年度から指定を受けた 1 期目の研究『先駆的な科学者・技術者を育成するための中高一貫カリキュラム研究と教材開発』では，大学での学びにつながる数学に注目し，特に「統計」(集団の特徴を掴む考え方や手法）および「微分方程式」(微小な変化から関数の特徴を捉える考え方）に関する教材開発と授業実践を行った。その後，2007 年度より指定を受けた 2 期目の研究『国際社会で活躍する科学者・技術者を育成する中高一貫カリキュラム研究と教材開発』では，これら以外の分野を含めて，生徒も教員も興味を持って取り組めるような魅力的で有効な教材を開発し，中高一貫カリキュラムの一層の充実を目指した。

2012 年度からの 3 期目は，『幅広い教養と強い探究心をもつ国際性豊かな最先端 研究者を育成する高大連携プログラムの研究と実施』をテーマに取り組んでいる。本年度はその 3 年目にあたる。

これまでの研究の結果，本校数学科では 69 の教材を開発し，カリキュラムに配置するとともに，定期的に教員研修会などで発表している。平成 24（2011）年度末には，SSH 指定 10 年の区切りとして，開発した教材をまとめて，約 350 頁にわたる冊子「開発教材集」を作成した。

一方で，生徒の数学への興味関心を高めるための「特別講座」，サイエンスコミュニケーション能力の育成を目指した筑波大学インターンシップと連動した総合学

<Project research>
Creative Teaching Materials, Method and the Development of the Curriculum
- From six years of a junior and senior high school to the university -

習「ゼミナール」「テーマ研究」，数学科学研究部を中心とした生徒の数学的活動の支援なども，継続的に実施している。本稿では，それらの概要を報告する。

2. 今年度（2014 年度）の研究

2.1. 教材・カリキュラムの開発

本校における教材開発の基本姿勢は,「生徒と教員の相互作用で築き上げる」ものであると言える。教員は，これまでに蓄積された経験，数学教育の実践における先行研究などに，自らの感性も交えて，毎時の授業のなかで，生徒が考えるに値する素材を中心課題として提示する。生徒はそれに反応し，自らの発想や，解決にいたる道筋, さらなる発展課題などを見つけていく。その過程では，自らの考えを発表したり，それに対する他の生徒の反応をもとに，足りない部分を補ったりといった活動も行われる。教員は，そこで得られた生徒の発想や，生徒同士で高まった議論を整理し，授業のなかで生徒の思考水準を高めていくとともに，さらに課題を洗練させていく。またときには，週に 1 度行われる本校数学科の教科会においてその事例が報告，共有され，教員同士でも相互に教材を深めていく。この繰り返しが本校数学科における教育実践の中心であり，また開発された教材はその成果であると位置づけられよう。

本校数学科では，専任教員がそれぞれ同じ生徒をできるだけ継続して担当し，中高 6 年間さらに大学での学びをも見通した授業を行うように努めている。そこでの共通した目標である『いろいろな現象や事柄に潜む仕組みや法則を数学的に解析し, その本質を捕まえ，そしてそれらを表現できるようになる』ことも，本校における数学科の教育実践を端的に表している。例えば，入学してすぐの中学 1 年生には，とにかく自分の考えを発表させることに主眼をおいた指導を行い，ときには生徒間で議論をさせたり，発展課題をレポートにまとめたりといった活動を授業の中に取り入れている。これらの活動が，とかく中学受験を経験した子どもたちにありがちな「問題を解き，正解に到達したら勝ち，終わり」という価値観からの脱却を促し，「考える過程とそれを表現することこそが数学の学習の中心である」という意識の涵養につながっていく。また，一方で教員は，その過程で生み出される「生徒自身によって表現された数学」を吸い上げて授業に還元しながら，生徒とともに教材をみがき，整理して形に残すことが務めになってくるということである。

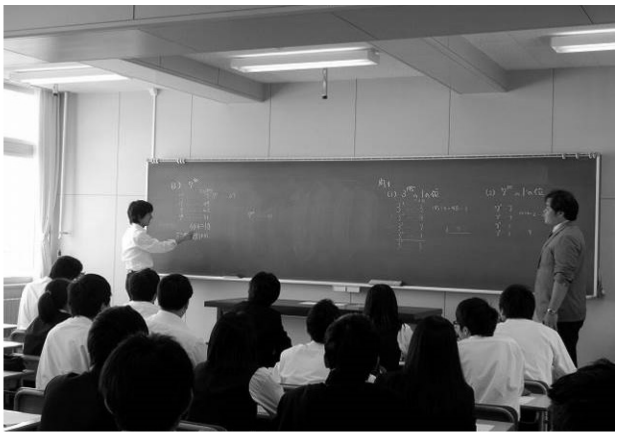
これまでに開発した教材は，後ページに記載した一覧表の通りであるが，なかでも今年度新たに研究し，まとめた教材は，以下の 4 つである。教材につけられた記号についても，後ページに説明があるので，参照されたい。

a1-3	剰余類の演算とウィルソンの定理
A1-3	高校における整数問題
d3-4	場合の数～樹形図から漸化式へ～
A1-4	開平法と連分数による平方根の近似値

2.2. 教員研修会の実施

開発した教材・カリキュラムを数学科教員研修会で公開し，全国に広めるとともに，本校における今後の研究の指針を得ることとしている。今年度は 8 月に交流会支援により北海道（釧路）で，12 月に本校で実施した。これらについて報告する。

・SSH 数学教員釧路研修会
　日時　2014 年 8 月 28 日（木）
　　　　午前 9 時～午後 5 時
　会場　北海道釧路湖陵高等学校
　研究授業　　釧路湖陵高校および本校（筑駒）
　発表校　　北海道釧路湖陵高等学校
　　　　　　北海道札幌啓成高等学校
　　　　　　および本校（筑駒）



熊本研修会（2011 年度），香川研修会（2012 年度），岡山研修会（2013 年度）に続き，今回で研究授業を含む教員研修会は 4 回目となった。

釧路湖陵高校生徒の協力も得て，本校数学科の開発した教材を，本校の教員が湖陵高校の生徒に授業するという形で本校研究授業を行った。また，本年は本校の教員が授業するだけでなく，釧路湖陵高校の先生が本校の教材を基に指導案を作り，授業を行うという初めての試みも実施された。教員の報告・意見交換にと

どまらず，具体的な教材に対する生徒の活動を，本校教員と釧路湖陵高校の先生の授業で比較して見ることで，先生方だけでなく参加生徒からも貴重な意見をいただくことができた。あわせてその場において，新しい開発教材も発表した。

さらに，北海道の数学教育の様子や，各校の校内における取り組みに関する情報交換ができ，大変有意義な会であった。このように地方に行って，他県の多くの先生方と現地で交流できることは, SSH の取り組みならではのことである。会場をお願いした釧路湖陵高校，ご協力いただいた札幌啓成高校の先生方に深く感謝したい。

・SSH 数学科教員研修会

日時　2014 年 12 月 7 日（日）
　　　午前 9 時 30 分～午後 5 時
会場　本校（筑波大学附属駒場中・高等学校）
発表校　北海道釧路湖陵高校
　　　　福井県立武生高等学校
　　　　岡山県金光学園中学高等学校
　　　　大阪府立大手前高等学校
　　　　および本校（筑駒）

SSH 各校の数学教育活動の多様な取り組みを研修でき，情報交換しながら SSH 校として協力できるとても有意義な会であり，今年度は 200 名近くの参加があった。SSH 校の取り組みを SSH 以外の全国の学校に普及することが望める機会でもある。

アンケートでは，次のような意見があった。

［参加動機］
・SSH 校のカリキュラムに興味があったため
・開発教材の中から自分で活用できる教材を探すため
・勤務校での SSH における学校設定科目の取り組みのヒントを得るため
・初任者なので，授業力向上の参考にするため

［意見（自由記述)］
・取組のアイデアや教材が参考になり，自校でも工夫して取り入れて行くよう努力したい
・ルーブリックについて，生徒に到達目標を段階的に提示していく大切さを感じた
・課題研究を中心に他校の課題や長所がわかり，大変参考になった
・改めて生徒から学ぶ事は多いと感じた
・各校の取組に圧倒され，刺激を受けた

SSH 校だけでなく, 大学の教員やこれから教員になる人にとっても，情報交換や取り組みについての発表は，大変有意義であったとの評価を多く得ている。本校数学科の開発教材集を自校に持ち帰る人も多く，今後のフィードバックも含めて，更に発展させていきたい研修会である。

2.3. 数学特別講座

SSH 事業の一環で, 大学教員や本校卒業生を講師に招き,「数学特別講座」を実施している。この講座は, 生徒にとって，中学・高校の普段の授業で学ぶ数学が将来どのように発展していくのか，どのように活用されていくのか等を知る機会となっている。この講座を通し，数学への興味・関心を高めるとともに，数学に対する理解を深め，数学を学ぶ意義をより深く感じてもらうことが，主たる目的となる。また教員にとっても，特別講座で扱われた内容を教材として授業に取り込める可能性もあり，貴重な機会となっている。

今年度は次の 2 講座を実施した。なお，回数は SSH 第 1 期指定時からの通算，テーマと内容は生徒への募集案内に記載したものである。

○第 41 回数学特別講座　『幻惑する数学』

日　時：平成 26 年 12 月 9 日（火）13:30～15:00
場　所：オープンスペース
講　師：竹内　耕太 氏
　　（筑波大学大学院数理物質系助教,
　　　本校高 2 ゼミナールアドバイザー)
内　容：(参加募集案内より一部抜粋)

この講座では，数理論理学に関わる話題の中から，無限大と無限小を持つ実数，無矛盾な体積を定義できない図形，計算不可能な小数，証明も反証もできない命題といった一見すると不可思議な数学のお話をしたいと思います。また時間が許すならば，これらが実は「集合とは何か」を精密化する過程で共通して自然に捉えられるような現象であることもお話できればと思います。

○第 42 回数学特別講座　『モンテカルロ・シミュレーション入門　－さいころに学ぶ統計学－』
　日　時：平成 26 年 12 月 13 日（土）10:00～12:00
　場　所：50 周年記念会館
　講　師：中島　上智 氏
　　　　　（日本銀行・本校 48 期卒業生）
　内　容：（参加募集案内より一部抜粋）

　今回は統計学の中でよく使われている「モンテカルロ法」についてお話しします。モンテカルロ法は様々な事象をシミュレーションするための方法として古くから研究されています。最近では，発達したコンピュータ技術を用いて最先端の経済分析や医療データの解析に使われるなど多方面に発展を遂げています。この特別講座では，実際にサイコロや乱数表を使ってモンテカルロ・シミュレーションの実験をしながら，確率や統計の不思議に迫ってみたいと思います。

2.4. 学年を越えた少人数学習の研究と実践

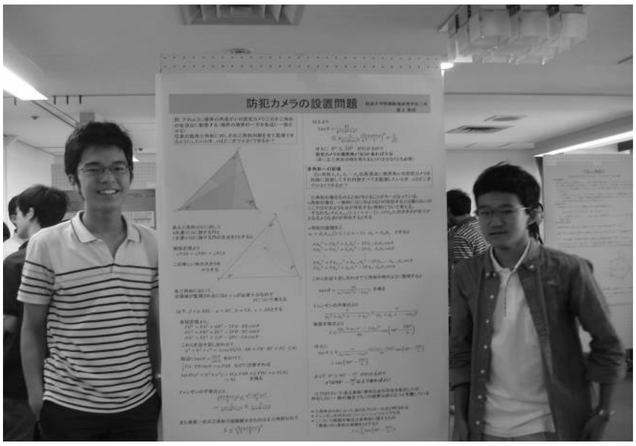
　サイエンスコミュニケーション能力の育成を目指して，高校 2 年生の総合学習「ゼミナール」を，筑波大学大学院生が参加する形で実施している。これは筑波大学大学院数理物質科学研究科(DC)の講座「数学インターンシップ」(1 単位)と連動したものであり，高校 3 年生の課題研究につながる。生徒は研究成果をレポートにまとめるとともに，論文集を作成し，全国で実施される様々な生徒研究発表会などで発表している。

　過去には大学院生のかわりに本校 OB の参加もあった。高校 3 年生の発表，中学 3 年生も参加しての高 2 生徒のプレ発表，大学院生の講義などを行った。参加者のアンケートから，相互に刺激を受けていることが窺え，効果的な取り組みであると考えている。

　2014 年度は，筑波大学の坂井公教授や大学院生のご指導を受けながら，数学好きの生徒が集まって『究極の数学』をテーマに，様々な数学の問題や性質について深く掘り下げるような研究に取り組んでいる。

　明治大学「高校生による MIMS 現象数理学研究発表会」のような生徒発表の場にも積極的に生徒は参加し，発表している。2014 年の第 4 回では，ポスターの審査員特別賞を受賞した。

第６回マス・フェスタ（2014 年８月 23 日）にも参加し，積極的に取り組んだ。これは，大阪府立大手前高校の主催しているイベントで，数学を愛好する高校生が参集して日頃の研究成果を披露しあう場である。本校ではここ数年，希望者が参加している。



2.5. 生徒の数学的活動の支援

・数学オリンピック参加支援

特別講座同様，生徒の数学への興味関心を高めるために日本数学オリンピック(JMO)・日本ジュニア数学オリンピック(JJMO)への参加を募っており，今年度も多数の参加が集まった。特にこの中から，国際数学オリンピック(IMO)には，日本が初参加した第 32 回大会から 2014 年夏の第 55 回大会までに，のべ 35 名の生徒が日本代表として参加した。また，中学生以下対象の国際数学競技会(IMC)では，2011 年の第１回大会より数えて，のべ５名の中学生が，日本代表として活躍している。

〔数学オリンピックの本校からの予選参加者数および本校からの日本代表選抜者の IMO，IMC における成績（過去３年)〕

2011 年度 JJMO205 名 JMO94 名
→ IMO 銀メダル１，IMC 銀メダル２
2012 年度 JJMO133 名 JMO89 名
→ IMO 銀メダル２，IMC 金１・銀１(国別総合１位)
2013 年度 JJMO146 名 JMO76 名
→ IMO 金１・銀１，IMC 金メダル１

・部活動「数学科学研究会（MATHIC)」の活動支援

本校数学科では，数学に興味関心を持った生徒が集まり研究活動を行い，数学を楽しむ部活動「数学科学研究会」の支援を行っている。今年度も文化祭での発表に多数の来場者を得るとともに，研究レポート集“Café Bollweck”を発行した。

3. 開発教材一覧および開発教材の実際

★印　今年度開発中のもので本稿に記載。
「A. 代数(Algebra)」,「An. 解析(Analysis)」,「G. 幾何(Geometry)」,「P. 確率(Probability)」,
「S. 統計(Statistics)」,「D. 微分方程式(Differential Equation)」,「O. その他(Others)」

各項目を整理する際，中学を小文字，高校を大文字にして，校種を区別した。また，教材開発の際に想定している，もしくは，実際に授業をおこなった学年を数字で示した。学年を特定していない教材や複数学年での取り扱いを想定している教材は，数字の代わりに「f」を用いた。

〔例〕　<u>an2.</u>　**合成関数とグラフ**

An.は解析であり，先頭が小文字なので中学生対象，すなわち中学２年の「解析」の教材を表す。

以下，表に続いて，★で示した教材について具体的に報告する。

開発教材一覧（筑波大学附属駒場中・高等学校数学科）2014 年度

a1.	整数	2008	G1.	四面体の幾何	2008
a1-2.	有理数	2007	G1-2.	デカルトの円定理	2009
a1-3.	剰余類の演算とウィルソンの定理	2014 ★	G1-3.	正多角形と等積な正方形の作図法	2013
a3.	暗号理論と整数論	2006	G2.	正１７角形の作図	2008
A1.	数と方程式	2008	G2-2.	ベクトルの内積と方べきの定理	2011
A1-2.	平方根の連分数展開について	2012	s1.	統計の基本	2006
A1-3.	高校における整数問題	2014 ★	s2.	標準偏差・近似直線	2006
A1-4.	開平法と連分数による平方根の近似値	2014 ★	s3.	正規分布と標準化	2006
A2.	離散な数列と連続な関数	2009	s3-2.	シミュレーションによる授業	2006
A2-2.	ΣＫ＾４と区分求積法	2011	S1.	回帰直線，相関係数	2007
A3.	置換と正多面体群	2007	S1-2.	数理統計学入門	2009
A3-2.	１次変換の線形性	2008	S2.	残差分析によるデータ系列の関係	2007
an1.	2 元 1 次方程式とその応用	2007	S3.	主成分分析入門	2007
an2.	合成関数とグラフ	2009	S3-2.	正規分布の平均の推定	2008
an3.	絶対値を含む関数のグラフ	2009	d1.	自然数の和，平方数の和，立方数の和	2007
an3-2.	絶対値とガウス記号を含む関数のソフトウエアによるグラフ描画	2010	d1-2.	『数える』	2010
An1.	2 次関数	2007	d2.	グラフや図形の移動・変形	2006
An1-2	2 次関数（2）	2009	d3.	２次関数の接線	2006
An1-3	和や積のグラフ	2010	d3-2.	面積・体積	2006
An1-4.	図で証明する三角関数の性質	2013	d3-3.	最大・最小	2006
An2.	円周率の近似	2007	d3-4.	放物線で囲まれる面積	2013
An2-2.	三角関数表を作る	2006	d3-5.	場合の数 ～樹形図から漸化式へ～	2014 ★
An2-3.	加法定理から導き出される多項式	2006	D1.	包絡線	2006
An2-4.	三角関数の和と積の周期	2011	D2.	グラフ描画の方法 －テクノロジーへの挑戦－	2007
g1.	四角形の合同条件	2008	D3.	包絡線(その２)	2006
g1-2.	作図の教材	2009	D3-2.	微分方程式	2006
g1-3.	四角形の性質（包含関係）	2010	D3-3.	微分方程式の応用	2006
g1-4.	正多面体の面や辺の作る角	2012	D3-4.	関数のグラフの描画法	2008
g1-5.	三平方の定理	2013	D3-5.	曲線と面積	2008
g2.	チェバ・メネラウスの定理	2007	Of.	4 元数を高校数学へ	2007
g3.	立方体の切断	2007	O2.	有限世界の数学	2007
g3-2.	反転法	2007	p2.	身近な確率・連続変量の確率	2011
g3-3.	立方体の切断（2）	2009	Pf1.	組合せの確率モデル	2007
g3-4.	ヘロンの公式の幾何的証明と応用	2013	Pf2.	EBI と確率・統計	2007

a1-3. 剰余類の演算とウィルソンの定理

関連分野 ：代数分野
高等数学 ：整数論／群論，体論
対象学年 ：中学１年生／高校１年生
関連単元 ：正負の数，整数の性質
教 材 名 ：剰余類の演算とウィルソンの定理

《はじめに》

数についての学習は，小学校から高校まで一貫して「数の拡張」の過程として見なすことができる。特に中学，高校においては，まず中学１年で正の数から負の数もふくめた整数，有理数へと数を拡張する際，演算が閉じていること，すなわち「負の数を数とみとめても，これまでの計算に何ら不具合が生じないこと」について，具体例を通して意識を向けさせなければならない。一方で，負の数を数とみとめたことにより，これまで別のものとして扱われていた加法と減法が同じ演算として統合できることなど，負の数のよさについて実感させることも大切である。本稿では，これらの見方を養う教材として，剰余類を題材に筆者が中学１年生を対象に実践した教材について報告する。なお，扱い方によっては，高校１年数学Ａの「整数の性質」において扱うことも可能であると考える。

1. 剰余類と加法

例 題

計算記号$+_7$／$-_7$で「2 つの整数をたしたもの／ひいたものを 7 でわった余り」を求める計算を表すことにする。例えば，$1 +_7 3 = 4$，$4 +_7 5 = 2$である。

(1) $100 +_7 1000$を計算しなさい。

(2) $3 +_7 x = 0$を満たす，0 以上 6 以下の整数xを求めなさい。

(3) (1)で求めた整数xについて，$10 +_7 3$の結果と$10 -_7 x$の結果を比べなさい。

まず，「正負の数」の学習内容における応用問題として，このような形で導入問題を提示した。場合によっては合同式を先に導入することも考えられたが，中学 1 年対象ということも考慮して，合同式については追って導入することにした。

この例題では，まず(1)で$100 +_7 1000$という計算を，まず和の 1100 を求めてから 7 で割って求めたという生徒と，先に 100 と 1000 のそれぞれを 7 で割っておき，$100 +_7 1000 = 2 +_7 6$と式変形した生徒を対比させて扱い，両者が正しい答えを得ることを確認した。なかには，すでに合同式を扱う感覚を持ち合わせている生徒もいたようで，「100 を 7 で割った余りが 2 であるから，その 10 倍である 1000 は 20 として扱えばよい」という発言もあった。

(2)(3)はセットで扱った。(2)が 4 であることは，生徒は直観的に分かっていたようだが，ここで筆者が扱いたかったのは，今回導入した「$+_7$／$-_7$」という記号において，3 と 4 がちょうど加法に関する逆元となっており，$x +_7 3 = x -_7 4$という式が任意の整数xについて成り立つということである。これについては，生徒はさほど抵抗なく受け入れたようであった。

2. 剰余類と乗法

問 題

計算記号$\times_7$で「2 つの整数をかけたものを 7 でわった余り」を求める計算を表すことにする。

(1) $6 \times_7 4$を計算しなさい。

(2) $50 \times_7 99$を計算しなさい。

(3) $5 \times_7 x = 1$を満たす，0 以上 6 以下の整数xを求めなさい。

(4) (3)の結果をもとに，計算記号$\div_7$について考え，$6 \div_7 5$を例にとって説明しなさい。

続いて，同じことが乗法でも可能であることを示す問いを設定した。(1)(2)は加法のときと同様である。(2)では$50 \times_7 99 = 1 \times_7 1$としてよい（先に 7 で割った余りを求めてよい）ことを再度確認した。(3)でも$x = 3$は試行錯誤で求めることができた生徒が多いようであったが，(4)では前の問題とのつながりが分からない生徒も多かったようである。

ここでの筆者の意図は，5 と 3 が乗法における逆元（生徒にとって既知の言葉を使えば，積が 1 になる，すなわち「逆数」）であることから，「$6 \div_7 5 = 6 \times_7 3$とするとつじつまが合うのではないか」と生徒に気づかせることであった。しかし，生徒は別のアプローチで考えていたものが多かった。多くのクラスで出た発言は，「6」を同じ剰余類の，割り算のできる別の数に置き換えるというものである。すなわち「7 で割って余りが 6 となる数」として 20 を考え，

$$6 \div_7 5 = 20 \div_7 5 = 4$$

である，とするものである。ここで生徒と確認したの

は，「20 に限らず，7 で割って余りが 6 となる 5 の倍数であれば必ず答えは 4 になるか」ということであるが，一般の場合で示すには文字式の扱いが必要であるため，これについては文字式の学習が終わったあと，改めて扱うことにし，ここでは具体例をあげるにとどめることを生徒に前置きした上で，生徒にいろいろ置き換えさせてみた。

$20 \div 5 = 4$　　より　$6 \div_7 5 = 20 \div_7 5 = 4$
$55 \div 5 = 11$　　より　$6 \div_7 5 = 55 \div_7 5 = 4$
$48 \div 12 = 4$　　より　$6 \div_7 5 = 48 \div_7 12 = 4$

なかでも，ある生徒の出した次のような発想は，他の多くの生徒の関心を集めることになった。

$6 \div (-2) = -3$ より　$6 \div_7 5 = 6 \div_7 (-2) = 4$

これは，7 で割った余りが 5 と等しい数として -2 を持ってきたものである。答えは -3 となるが，「-3 を 7 で割った余りを 4 と考える」という剰余類の考えは，生徒にとって意外にも自然だったようである。これをきっかけに剰余を負の数に拡張してもよいという考えが，自然発生的に生徒間で共有されたように感じた。そこで，筆者の方から，「7 で割って 4 余る」ということがらと，「7 で割ったら 3 足りない」ということがらは同一視してもよいということだね，と念押しし，正負の数における既知の事項と結び付けることにした。その上で，これを式で表すときに合同式という道具があるよ，という形で合同式の定義を示し，今回の場合は $4 \equiv -3 \pmod{7}$ と書いてよい，と導入した。

3. ウィルソンの定理

問 題

1 から 18 までの自然数をすべてかけた数(数学の記号でこれを $18!$ と表す)を 19 で割った余りを求めなさい。

前項のような内容を通して，この問題の解法について説明させる活動を展開した。ある生徒が，

$1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times10\times11\times12\times13\times14\times15\times16\times17\times18$

のうち「19 で割った余りが 1 となる積のペアを考えていけばよい」と発言したので，学級全体で追体験した。

$2 \times 10 = 20 \equiv 1 \pmod{19}$
$3 \times 13 = 39 \equiv 1 \pmod{19}$
$4 \times 5 = 20 \equiv 1 \pmod{19}$
$6 \times 16 = 96 \equiv 1 \pmod{19}$
$7 \times 11 = 77 \equiv 1 \pmod{19}$
$8 \times 12 = 96 \equiv 1 \pmod{19}$

この辺りまで出たところで，だぶることなくペアができるのではないかと直観した生徒が増えてきたが，一方で数が大きくなってきて，探すのに苦労しはじめている生徒もいた。ところが，9 の相手を探そうというとき，ある生徒が次のような考えを発表した。

$9 \equiv -10 \pmod{19}$　だから，
$(-10) \times (-2) = 20 \equiv 1 \pmod{19}$ より，
$9 \times 17 \equiv 1 \pmod{19}$　である。

この発想は，生徒に負の数の有用性を強く印象付けたようである。9 と 17 がペアになったことにより，残った数は 1，14，15，18 となったのであるが，ここでも同様に，

$14 \equiv -5 \pmod{19}$，$15 \equiv -4 \pmod{19}$ より，
$14 \times 15 \equiv (-4) \times (-5) = 20 \equiv 1 \pmod{19}$

という考えを使い，14 と 15 の積を 19 で割った余りが 1 であることが導けた。

以上より，もとの問題の答えは，残った数である 1 と 18 の積で 18 であることが分かった。

なお，この問題を一般化したものが，ウィルソン(John Wilson，1741-1793) の定理と呼ばれる，次のような定理である。

ウィルソンの定理

素数 p に対し，$(p-1)!$ を p で割った余りは，$p-1$ である。

今回の実践では証明まで踏み込むことはしなかったが，負の数も利用すると，個々の具体的な場面であれば，乗算の表をつくることで，この定理が成り立つことは実感できるものと思われる。今回の 19 の例であれば，次のような 1 から 9 までの乗算の表を作ってみるとよい。

$\times_{19}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	−9	−7	−5	−3	−1
3	3	6	9	−7	−4	−1	2	5	8
4	4	8	−7	−3	1	5	9	−6	−2
5	5	−9	−4	1	6	−8	−3	2	7
6	6	−7	−1	5	−8	−2	4	−9	−3
7	7	−5	2	9	−3	4	−8	−1	6
8	8	−3	5	−6	2	−9	−1	7	−4
9	9	−1	8	−2	7	−3	6	−4	5

ある整数を19で割った余りは0から18のどれかであり，10から18までをそれぞれ負の数に置き換えて表すことにより，絶対値が9以下の整数でそれぞれの剰余類の代表元が表せる。よって例えば，

$7\times 8 \equiv -1 \pmod{19}$ であることから，

$7\times 11 \equiv 1 \pmod{19}$，$12\times 8 \equiv 1 \pmod{19}$

であることなどが分かる。そして，表のどの横列，どの縦列も，絶対値の等しい数が同じ列に並ぶことがない。このことが，ウィルソンの定理の証明のカギになることがらである。

なお，ここでは問題の解法として「合同式の積の性質」を暗黙裡に使用している。すなわち，

合同式の積の性質

$a \equiv b \pmod{m}$ かつ $c \equiv d \pmod{m}$ ならば，$ac \equiv bd \pmod{m}$

という性質については，直観的に正しいとみとめて進めている部分がある。このことも改めて，この後の学習で証明が必要である，と前置きして扱った。

4. 中国剰余定理と百五減算

文字式を扱ったあと，合同式の定義や，上記のような合同式の性質を文字式で証明する活動を経て，次のような「百五減算」を題材として扱った。(百五減算については，教材A1-3にも別のアプローチがある。)

例 題

2桁の整数xがある。xを3で割ると1余り，xを5で割ると4余り，xを7で割ると6余る。xを求めなさい。

この例題においては，いろいろあてはめることで多くの生徒が正解を導いた。また，「5で割ると4余る」と「7で割ると6余る」をそれぞれ「5で割ると-1余る」「7で割ると-1余る」に置き換えることで，34と69に答えをしぼりこんだ生徒もおり，既習事項を有効に活用できている様子であった。

問 題

一般にxを3で割った余りa，5で割った余りb，7で割った余りcが与えられたとき，その数を105で割った余りは，$70a+21b+15c$を105で割った余りに等しい(百五減算)。これはなぜか，理由を文字式で説明しなさい。

「百五減算」は吉田光由の『塵劫記』にも掲載されていた方法である。はじめこの式を見せたとき，カンの良い生徒からは「$21b$と$15c$は分かるが，なぜ$35a$ではなく$70a$なのか」という反応もあった。たしかに，21が3×7，15が3×5であることはすぐに分かるが，だとしたらもう一つは 5×7 ではないかと考えることは自然である。それらの疑問についても，証明を考えながらあわせて解決していくことにした。

まず，与えられた問題を合同式に置き換えてみる。

合同式による問題の置き換え

$x \equiv a \pmod{3}$，

$x \equiv b \pmod{5}$，

$x \equiv c \pmod{7}$ であるならば，

$x \equiv 70a+21b+15c \pmod{105}$

であることを示す。

これが証明したいことがらである。次に，与えられた仮定の式を，合同式の定義に基づいて文字式で表す。

$x \equiv a \pmod{3}$より，$x = 3k+a$ (kは整数)…①

$x \equiv b \pmod{5}$より，$x = 5m+b$ (mは整数)…②

$x \equiv c \pmod{7}$より，$x = 7n+c$ (nは整数)…③

ここで，①の70倍，②の21倍，③の15倍をそれぞれ加えると，次の式を得る。

$106x = 210k+70a+105m+21b+105n+15c$

$106x = 105(2k+m+n)+70a+21b+15c$

両辺から$105x$を減じると，

$x = 105(2k+m+n-x)+70a+21b+15c$

$2k+m+n-x$は整数であるから，したがって，

$x \equiv 70a+21b+15c \pmod{105}$ ■

この証明を見ると，①をもし35倍した場合，

$71x = 105k+35a+105m+21b+105n+15c$

となってしまい，xの係数が合わなくなってしまうため，証明が成り立たないことが分かる。

また，逆から確認すれば，

$35a+21b+15c \equiv 2a \pmod{3}$であるが，

$70a+21b+15c \equiv a \pmod{3}$

となっていることも，合同式の性質より分かる。

時間の関係もあって，授業はここまでで打ち切ったのだが，この事柄どうしの関係も，次のように考えれば容易に分かる。70，21，15という数はそれぞれ，

$70 \equiv 1 \pmod{3}$, $70 \equiv 0 \pmod{5}$, $70 \equiv 0 \pmod{7}$

$21 \equiv 0 \pmod{3}$, $21 \equiv 1 \pmod{5}$, $21 \equiv 0 \pmod{7}$

$15 \equiv 0 \pmod{3}$, $15 \equiv 0 \pmod{5}$, $15 \equiv 1 \pmod{7}$

を満たす数である。このような3数の組は，0以上105未満の整数では一意に決まる（中国剰余定理）が，もしこの3数が分からなかったとしても，

$p \equiv 1 \pmod{3}$，$p \equiv 0 \pmod{5}$，$p \equiv 0 \pmod{7}$

$q \equiv 0 \pmod{3}$，$q \equiv 1 \pmod{5}$，$q \equiv 0 \pmod{7}$

$r \equiv 0 \pmod{3}$，$r \equiv 0 \pmod{5}$，$r \equiv 1 \pmod{7}$

を満たす3数p，q，rは，縦に3式を加えることで，

$p+q+r \equiv 1 \pmod{3}$，$p+q+r \equiv 1 \pmod{5}$，

$p+q+r \equiv 1 \pmod{7}$

を満たす。これが証明の中に，106という数が出てきたということの正体である。

このほかに授業では，余りを考える3，5，7を他の数に変えることでどうなるか，ということも扱った。（中国剰余定理には「3数が互いに素である」という条件があるが，これについては深入りせず感覚的な理解にとどめた。）例えば，3，5，7のかわりに2，5，13という3数にすると，その数を130で割った余りが一意に決まる。105のときと同様に考えると，次の結果を得る。

ある数を130で割った余り

$x \equiv a \pmod{2}$，

$x \equiv b \pmod{5}$，

$x \equiv c \pmod{13}$　であるならば，

$x \equiv 65a + 26b + 40c \pmod{130}$

である。

きまりを見抜いていた生徒は，65，26，40という数を難なく発見することができていた。

5. 累乗の下2桁

百五減算の例では3数3，5，7を用いていたが，中国剰余定理は2数の場合でも当然成り立つ。ここでは，それを利用した題材を示す。

問 題

0以上のある整数xについて，

(1)　xを何乗しても下2桁がずっと変わらないとき，考えられるxの下2桁をすべて求めなさい。

(2)　x^3とxの下2桁が一致するとき，考えられるxの下2桁をすべて求めなさい。

この問題を解決する上で有効なことがらは，ある数について「4で割った余り」と「25で割った余り」が分かれば，その数を100で割った余り，すなわち下2桁が一意に決定するということである。したがって，2乗しても下2桁が変わらない数xは，

・$x \equiv 0 \pmod{4}$　または　$x \equiv 1 \pmod{4}$

・$x \equiv 0 \pmod{25}$　または　$x \equiv 1 \pmod{25}$

の2つを必ず満たさなければならない。2乗しても余りが変わらないのは0，1だけだからである（厳密には合同方程式$x^2 \equiv x$を解けば得られる）。したがって，(1)の条件にあう数は4つあり，下の表のようになる。

xを4で割った余り	0	1	0	1
xを25で割った余り	0	0	1	1
x（$0 \leqq x \leqq 99$）	0	25	76	1

次に(2)で3乗を考えるが，3乗の場合は前の2つに$x \equiv -1 \pmod{4}$，$x \equiv -1 \pmod{25}$の場合を加えて考えることになる（同様に，厳密には合同方程式$x^3 \equiv x$を解けば得られる）。(1)の答えは当然(2)も満たすことになるのだが，そのほかに(2)だけを満たすものとして，次の5つが加わる。

xを4で割った余り	0	1	-1	-1	-1
xを25で割った余り	-1	-1	-1	0	1
x（$0 \leqq x \leqq 99$）	24	49	99	75	51

これらは中国剰余定理を背景に用いることで，一意性も含めて比較的単純な形で解が得られるのであるが，中学生や高校生の課題学習としては，むしろそこに至る経緯や試行錯誤も含めて大切に扱いたい題材といえる。筆者の中学1年生対象の授業では，中国剰余定理との関係にはあえて踏み込まずに，この課題に取り組ませてみた。結果，意欲ある生徒から，多くのレポート提出があり，この課題自体が生徒の興味・関心を集める題材であることがうかがえた。この課題の他にも，「ある数を何乗すると，下2桁が元の数に戻ってくるか」を考える，といった発展性もある教材である。

参考文献

高木貞治（1971）『初等整数論講義 第2版』共立出版

（2014 須藤）

A1－3. 高校における整数問題

関連分野：整数論、代数学
対象学年：高校１年生
関連単元：整数の性質
教 材 名：整数

≪高校における整数の教材≫

数学Ａに「整数の性質」がおかれ，基本的なことがらを高校で確認することになった。中学１年生では、正負の数や文字式の導入と並行して整数を扱うが、そこではあまり深入りはできない。今年初めて高校生と整数の課題に取り組み、意外に苦手な生徒が多いのに驚いた。中１でも取り上げられる問題を難しく感じる生徒もいた。整数という、小学校以来のなじみある一見基本的な素材でありながら、扱い方によっていろいろな側面があり、あっと「目からうろこが落ちる」ような発見もしばしばあった。また、解法が多数ある課題や、試行錯誤で何かを探すようなものもある。生徒にとっても教師にとっても魅力のある分野である。授業中に盛り上がる場面も多かった。今学期（2014 年度第１学期）授業で取り上げてみた中から、印象に残った教材を報告したい。

A1－3．0　　整数とは

私たちは、ひとつ、ふたつと個数を数えることで数に出会い、自然数のいろいろな性質を直感的に知っている。しかし、それらの性質が相互にどのように関連し、どんな本質を隠し持っているのかは、意外に知らない。いや、知らないことを意識していない。そこを掘り起し、系統的に扱って納得し整理していくのが高校の段階の整数教材の課題である。ここでは、整数の性質を学びながら、関数・集合・代数的構造などにもつながる興味深い題材を扱い、同時に論理的思考力を育むことを目指す。

A1－3．1　　基本的なことがら

(1) 除法の可能性と一意性

任意の整数A，B（$B>0$）に対し、

$$A=Q\times B+R\,,\ 0\leqq R<B$$

を満たす整数Q，Rがただ一組存在する。

これはAをBで割って商Qと余りRを求められるということだ。この計算自体は小学校でおなじみだが、ここでの割り算は代数的除法ともいえる分数$\dfrac{A}{B}$ではなく、整数論的な除法である。

(2) イデアル

整数の集合で、その中の任意の２数の差を含むようなものをイデアルと呼ぶが、それに属する任意の元の和と差に関して閉じている。ａの倍数全体 aZ はイデアルであり、その逆も言える。つまり、ある整数の集合Ｊがイデアルならば、J＝aZ（a≧0）と書ける。

２整数a，bに対し、a，bの最大公約数をｄ、最小公倍数ｃをとすれば、$aZ+bZ$および$aZ\cap bZ$はイデアルになり、$aZ+bZ=dZ$，$aZ\cap bZ=cZ$である。このことは誰でも直感的に知っているが、ここで

「2 整数a，bが互いに素」ということと、「1 次不定方程式$ax+by=1$（a，bは整数）に整数解がある」ということが同値であるということを確認したい。

(3) 素因数分解の一意性

正の整数Ａは、素数p_1，p_2，…，p_nの積に分解される。これは因数の順序を区別しなければ、一意的である。

１が素数かどうか、扱うたびに生徒に質問されるが、1 を素数にしてしまうと素因数分解の一意性が成り立たない。正の整数は、１と素数とそれ以外（合成数）の３種類に分類されるのである。

(4) 素数の個数

素数が無数にあることは、直感的にも明らかだが、証明も簡単で美しい。

もし最大の素数ｐがあったとして、ｐ以下のすべての素数の積に１を足した数aを考える。

$a=2\times3\times5\times7\times\cdots\times p+1$　は 2 からｐまでいかなる素数で割っても１余り割り切れない。

A1－3．2　互除法

2 整数a，bの最大公約数を d とすると、

$aZ+bZ=dZ$ であるが、実際に最大公約数を求めるには、乗法的な素因数分解と、減法的なユークリッドの互除法がある。

互除法では、

「2 整数a，bの最大公約数は、一方に他方の整数倍を加えても引いても変わらない」という単純な性質を利用する。

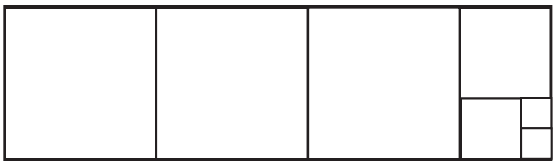
2 整数a，b（$a>b$）に対し、aをbで割って商q_1と余りr_1を得たとする。次に$b>r_1$なので、bをr_1で割って商q_2と余りr_2を得たとする。これを繰り返す。

$d=(a,\ b)$ と表すと、

$(a,\ b)=(b,\ r_1)=(r_1,\ r_2)=\cdots$　　となり、

この余りの列は有限個で終わる。最後の余りが最大公約数になる。

この理論は、タイルの敷き詰め図で説明するとわかりやすい。横a、縦bの長方形を埋め尽くす 1 辺が整数である正方形で最大のものが、まさに最大公約数の問題になる。



問 1
913 と 581 の最大公約数を求めよ。

余りで次々に割っていくと次のようになるので最大公約数は 83。

$$
\begin{array}{r|r|r|r|r}
 & 3 & 1 & 1 & 1 \\
83 & 249 & 332 & 581 & 913 \\
 & 249 & 249 & 332 & 581 \\
\hline
 & 0 & 83 & 249 & 332
\end{array}
$$

問 2　最大公約数を求めよ。

$$
\begin{cases}
x^4+x^3-3x^2+4x+2 \\
x^4+3x^3+2x^2+3x+1
\end{cases}
$$

互除法は、整式の約数倍数問題でも使える。整式の約数倍数では、次数の高低が問題になり、式のスカラー倍は考慮しない。よって、割るときには、商の式の係数が整数になるように適当に定数倍しても構わない。係数だけ取り出して書くと

$$
\begin{array}{rrrrr|rrrrr}
 & & & & & 1 & & & & \\
\hline
1 & 1 & -3 & 4 & 2 & 1 & 3 & 2 & 3 & 1 \\
 & & & & & 1 & 1 & -3 & 4 & 2 \\
\hline
 & & & & & & 2 & 5 & -1 & -1
\end{array}
$$

の次は、割られる式を 4 倍し、

$$
\begin{array}{rrrr|rrrrr}
 & & & & 2 & -3 & & & \\
\hline
2 & 5 & -1 & -1 & 4 & 4 & -12 & 16 & 8 \\
 & & & & 4 & 10 & -2 & -2 & \\
\hline
 & & & & & -6 & -10 & 18 & 8 \\
 & & & & & -6 & -15 & 3 & 3 \\
\hline
 & & & & & & 5 & 15 & 5
\end{array}
$$

でよい。

次は割る式を 5 で割ってから、

$$
\begin{array}{rrr|rrrr}
 & & & 2 & -1 & & \\
\hline
1 & 3 & 1 & 2 & 5 & -1 & -1 \\
 & & & 2 & 6 & 2 & \\
\hline
 & & & & -1 & -3 & -1 \\
 & & & & -1 & -3 & -1 \\
\hline
 & & & & & 0 &
\end{array}
$$

となり割り切れる。

最大公約数は　x^2+3x+1　である。このような例では、因数定理による因数分解が困難で、互除法を利用して因数分解ができる。2 次式の積に分解されれば、この式を0にするxを求める高次方程式を解くのも容易である。

問 3　$\dfrac{31}{4}$　を連分数に直せ。

ここで連分数にも触れたい。連分数の開発教材については、『教材 A1-2．平方根の連分数展開（2012 須藤）』がある。

$$
\frac{31}{4}=7+\frac{3}{4}=7+\cfrac{1}{\cfrac{4}{3}}=7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}
$$

A1－3．3　不定方程式

a, b, c を整数として、$ax+by=c$ という方程式の整数解を考える。この方程式が整数解を持つためには、cが a, b の最大公約数 d で割り切れることが必要十分である。例として、偶数ばかりの足し引きで奇数が作れるか、などという問題がわかりやすい。

方程式の両辺を a, b の最大公約数 d で割れば、

$px+qy=1$　（p, q は互いに素な整数）…①

という方程式になる。

今１つの解を（x_0, y_0）とすると、

$px_0+qy_0=1$…②

式①と②の差をとると、

$p(x-x_0)+q(y-y_0)=0$…③

p, q は互いに素な整数なので、$(x-x_0)$ は q で割り切れ、$(y-y_0)$ は p で割り切れる。一般解は

$\begin{cases} x=x_0+qt \\ y=y_0-pt \end{cases}$　（t は整数）　と書ける。したがって、1つの特殊解（x_0, y_0）を求めれば解決する。

この式は座標平面上では直線を表しており、整数解は格子点にあたることも注意したい。

問４
63ｘ＋47ｙ＝1の整数解を１つ求めよ。

解）互除法を利用すると

$$\begin{array}{r|r|r|r|r}
 & 1 & 1 & 2 & 1 \\
1 & 15 & 16 & 47 & 63 \\
 & 15 & 15 & 32 & 47 \\ \hline
 & 0 & 1 & 15 & 16
\end{array}$$

である。

つまり、$\begin{cases} 63=47\times1+16 \\ 47=16\times2+15 \\ 16=15\times1+1 \end{cases}$　であるが、これを逆にたどれば、

$$\begin{aligned} 1&=16-15\times1=16-(47-16\times2)\times1 \\ &=16\times3-47=(63-47\times1)\times3-47 \\ &=63\times3-47\times4 \end{aligned}$$

となる。ユークリッドの互除法は、単に最大公約数が求められるとか、不定方程式の整数解が求められるということだけでなく、まさに実際のアルゴリズムそのものといえる。しかし、この解法はお世辞にも便利とはいえない。実際に不定方程式の整数解を求めるのに一番合うのは、あてはめで見つける以外は、合同式を利用するものであろう。

A1－3．4　合同式

整数を割った余りで分類する合同式の理論は、ガウスが確立した。

２つの整数 a, b の差 $a-b$ が正の整数ｎで割り切れるとき、$a\equiv b$ (mod n) と表し、「a, b はｎを法として合同である」という。要するに、ｎで割った余りが同じということだ。

こんな単純な式が、大きな威力を発揮するのは、まさに爽快だ。何でも使う記号を代数でも使用し、周期現象は平行移動なのだということがよくわかる。

合同式の性質として次のものがある。整数に対し、

1）反射律　$a\equiv a$
2）対称律　$a\equiv b$　ならば　$b\equiv a$
3）推移律　$a\equiv b$, $b\equiv c$　ならば　$a\equiv c$

などは自明である。

4）$a\equiv b$, $c\equiv d$　ならば　$a\pm c\equiv b\pm d$
$a\times c\equiv b\times d$

つまり、合同式は辺々加減乗してもよいのである。証明は簡単だが、これは大変重要な性質だ。割ることさえしなければ、等式とほぼ同じ要領で変形できる。

5）$a\equiv b$　ならば　$a\pm c\equiv b\pm c$
$ac\equiv bc$, $a^c\equiv b^c$

合同式の両辺に同じ整数を足してよいので、等式と同じ「移項」が可能である。

6）$a\equiv b$ (mod n)　ならば　$ca\equiv cb$ (mod cn)
これは幾何的には相似拡大にあたる。

7）$ca\equiv cb$ (mod n) で、ｃとｎが互いに素なら
$a\equiv b$

例　$36 \equiv 6$　(mod 10)　は正しい。

3 と 10 は互いに素であるから両辺を 3 で割って

$12 \equiv 2$　(mod 10)　は正しい。

2 と 10 は互いに素でないから両辺を 2 で割って

$18 \equiv 3$　(mod 10)　は正しくない。

ただし、法ごと割って

$18 \equiv 3$　(mod 5)　とすることはできる。

合同式を利用して再度問 4 を解いてみよう。

問 4　63ｘ＋47ｙ＝1 の整数解を１つ求めよ。

法を 47 とし、両辺とも 47 で割った余りを考えると

①　$63x \equiv 1$　である。　②　$47x \equiv 0$　は自明。

辺々引く①－②から　③　$16x \equiv 1$ なので、これを辺々 3 倍すると　④　$48x \equiv 3$

④－②から　$x \equiv 3$　(mod 47)

$x = 3$ を問題の式に代入すると $y = -4$　である。

こうして特殊解が実に簡単に求まる。

問 5　ある数 x を 31 倍すると、13 で割った余りが 2 になる。ある数を 13 で割った余りはいくらか。

問 4 と同じように解ける。

法を 13 とし、両辺とも 13 で割った余りを考えると

①　$31x \equiv 2$　である。　②　$13x \equiv 0$ は自明。

①－②×2 から　③　$5x \equiv 2$

①－③×6 から　③　$x \equiv -10 = 3$

2 整数から 1 をつくる手順は、本質的には互除法と同じかもしれないが、記号≡のおかげで実に楽に計算ができる。

問 6　13 で割ると 3 あまり、
　　7 で割ると 5 あまる最小の自然数 x を求めよ。

13 と 7 は互いに素だから、最小公倍数の 91 までに条件を満たす数はただひとつ存在する。

条件を合同式に表すと

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{13} \\ x \equiv 5 \pmod{7} \end{cases}$$
である。

ここで法ごと定数倍して法を揃えると

$$\begin{cases} 7x \equiv 21 \pmod{91} \\ 13x \equiv 65 \pmod{91} \end{cases}$$

１式目を２倍して２式目を引くと、

$x \equiv 21 \times 2 - 65 = -23 = 68$　(mod91)

3 つの整数で割った余りから未知数を求めるのが、いわゆる百五減算である。

問 7
3 で割ると 2、5 で割ると 1、7 で割ると 2　あまる最小の自然数 x を求めよ。

問 6 の解法と同じように、法を 105 に揃えて求めてもすぐ解けるが、和算の考え方を示す。

15 の倍数、15, 30, 45, …の中で、
　7 で割って 2 余る最小の自然数は 30。

21 の倍数、21, 42, 63, …の中で、
　5 で割って 1 余る最小の自然数は 21。

35 の倍数、35, 70, 105, …の中で、
　3 で割って 2 余る最小の自然数は 35。

これらの３数を加えて 86 は条件を満たす。

この方法は実に巧みであり、生徒に紹介したところ、「なるほど」という声が上がった。

A1－3．5　フェルマーの小定理

問 8
5 で割り切れない自然数ｎの 4 乗を 5 で割れば 1 余る。

法を 5 とする。

$n \equiv \pm 1$ のとき、　$n^4 \equiv 1$

$n \equiv \pm 2$ のとき、　$n^4 \equiv 16 \equiv 1$

一般化したものが、フェルマーの小定理である。

問 9　ｐが素数で, ａがｐと互いに素である整数の時

$a^{p-1} \equiv 1$　(mod　p)

いろいろな証明があるが、二項定理と数学的帰納法を利用した証明を示す。

整数 x,　y に対し、

$$(x+y)^p = x^p + {}_pC_1 x^{p-1} y + {}_pC_2 x^{p-2} y^2 + \cdots + y^p$$

ｐが素数ならば､1＜ｒ＜ｐであるｒにはｐの約数がないので、

$${}_pC_r = \frac{p!}{(p-r)! \times r!}$$
(1＜ｒ＜ｐ)　はｐの倍数。

したがって、法をｐとすれば、

$(x+y)^p \equiv x^p + y^p$　(mod　p)　である。

ここで $x = y = 1$　を代入すれば、　$2^p \equiv 2$

自然数 k　について、$k^p \equiv k$　と仮定すると、

$(k+1)^p \equiv k^p + 1 \equiv k+1$　となり、$k+1$　でも成り立つ。

よって、　$a^p \equiv a$　(mod　p)

a と p が互いに素なら両辺を a で割っても成り立つ。

$a^{p-1} \equiv 1$　(mod　p)

問 10
2^{365} を 19 で割った余り r を求めよ。

19 は素数なので、$2^{18} \equiv 1$（mod19）より $2^{360} \equiv 1$

$2^{365} \equiv 2^{360} \times 2^5 \equiv 32 \equiv 13$（mod19）

今回はここでフェルマーの小定理の応用として
RSA 暗号の理論を扱った。
（開発教材 a3.暗号理論と整数論(2006 更科)）

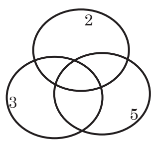
A1－3．6　約数の性質、オイラー関数

問 11
①720 の正の約数の個数と、それらの和を求めよ。
②720 以下の自然数で、720 と互いに素なものは何個あるか。
③0 より大きく 1 より小さい分数で、分母が 720 である既約分数の和を求めよ。

① 素因数分解をする。$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$　より
約数の構成として、2 は 5 通り、3 は 3 通り、5 は 2 通り考えられるので、約数の個数は 5×3×2＝30 個。
これらの和は

$(1+2+4+8+16)(1+3+9)(1+5) = 2418$ と書ける。

② 集合の理論で求めれば、
360＋240＋144－(120＋72＋48)＋24＝528
750－528＝192



オイラー関数を使えば、

$\varphi(720) = 720 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = 192$

③ 720 と互いに素である自然数 k があれば、720－k も 720 とは互いに素である。よって、

$$\frac{1}{720} + \frac{7}{720} + \frac{11}{720} + \cdots + \frac{709}{720} + \frac{713}{720} + \frac{719}{720}$$
$$= \frac{720}{720} \times 96 = 96$$

問 12
ある自然数ｎは正の約数の和が 234 で、正の約数の逆数の和が 2.6 である。ｎを求めよ。

ｎの正の約数を小さい順に

$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_k$ とすると

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k = 234$,

$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_k} = 2.6$

ところで、$a_1 a_k = n,\quad a_2 a_{k-1} = n,\quad \cdots$　だから、

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k} = \frac{a_k}{n} + \frac{a_{k-1}}{n} + \cdots + \frac{a_1}{n}$$

$2.6 = \frac{234}{n}$　より　$n = \frac{234}{2.6} = 90$

問 13　（オイラー関数）
1 からｎまでの自然数のうち、ｎと互いに素なものの個数を $\varphi(n)$ と書く。ｋ、ｍ、ｎは自然数。

① 素数ｐに対し、$\varphi(p) = p-1,\quad \varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$

② m, ｎが互いに素なら $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$

③ $p,\ q,\ r,\ \cdots,\ a,\ b,\ c,\ \cdots$ に対し

$n = p^a q^b r^c \cdots$ と素因数分解されたら、

$$\varphi(n) = \varphi(p^a)\varphi(q^b)\varphi(r^c)\cdots$$
$$= (p^a - p^{a-1})(q^b - q^{b-1})(r^c - r^{c-1})\cdots$$
$$= n \times \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right)\left(1 - \frac{1}{r}\right)\cdots$$

① は定義より簡単に導ける。
② 1 からｍｎまでに、
ｍで割ってｘ余り、ｎで割ってｙ余る整数はただ１つであり、整数の組（ｘ, ｙ）に対し、ｍｎと互いに素な数の１つが１対１対応する。
③ 　①と②から導かれる。この式は、確率の説明を加えると理解しやすい。

問 14
正の整数ｎの正の約数のオイラー関数の和はｎであることを示せ。

ｎが素因数分解されて $p^a q^b r^c \ldots$ と書けるとき、ｎの正の約数を x_1， x_2， x_3， $\cdots$， x_k とする。

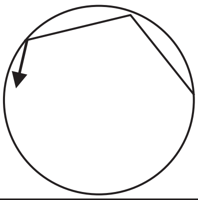
$$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_k$$
$$=\left(1+p+p^2+\cdots+p^a\right)\left(1+q+q^2+\cdots+q^b\right)\left(1+r+r^2+\cdots+r^c\right)\cdots$$

である。

また、$\varphi(n)=\varphi(p^a)\varphi(q^b)\varphi(r^c)\cdots$ 　より

$$\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\varphi(x_3)+\cdots+\varphi(x_k)$$
$$=\left(1+\varphi(p)+\varphi(p^2)+\cdots+\varphi(p^a)\right)\times$$
$$\left(1+\varphi(q)+\varphi(q^2)+\cdots+\varphi(q^b)\right)\times$$
$$\left(1+\varphi(r)+\varphi(r^2)+\cdots+\varphi(r^c)\right)\times\cdots$$
$$=\left(1+(p-1)+(p^2-p)+\cdots+(p^a-p^{a-1})\right)\times$$
$$\left(1+(q-1)+(q^2-q)+\cdots+(q^a-q^{a-1})\right)\times$$
$$\left(1+(r-1)+(r^2-r)+\cdots+(r^a-r^{a-1})\right)\times\cdots$$
$$=p^a q^b r^c\cdots=n$$

問 15
素数を２つかけあわせた自然数ｎがある。
正ｎ角形の１点から出発して、長さの等しい対角線または辺を連続して左回りに引いていく。何周かして元の点に戻るまでにすべての頂点を通過して図形を書く。
このような模様が６通りあるとき、ｎを求めよ。



左回りに a 個めの頂点を取っていくとする。
a と n が互いに素なら、

$a\times 0$,　a,　$2a$,　$3a$,　$\cdots$,　$(n-1)a$　をｎで割った余りは全て異なるので、すべての頂点を通過する。
a 個めの頂点を取っていく図形と、$n-a$ 個めの頂点を取っていく図形は同じだから、

全ての頂点を通過する図形の個数は $\dfrac{\varphi(n)}{2}$ である。

$\dfrac{\varphi(n)}{2}=6$　より $\varphi(n)=12$

自然数ｎは素数を２つかけあわせたものなので、その２素数をｐ,ｑ（ｐ＞ｑ）とすると、

$$\varphi(n)=\varphi(pq)=(p-1)(q-1)=12$$

p−1	12	6	4
q−1	1	2	3

２素数になる組合せは　$(p,\ q)=(13,\ 2),\ (7,\ 3)$

よって　ｎ＝26,　21　の２通りが考えられる。

フェルマーの小定理を素数ｐの場合だけでなく合成数に拡張したのが、次のオイラーの定理である。

問 16
n,　a　は互いに素である自然数とする。

$$a^{\varphi(n)}\equiv 1 \pmod{n}$$

ｎ以下の自然数でｎと互いに素な数を

t_1,　t_2,　$\cdots$,　$t_{\varphi(n)}$　とおく。①

これらはｎで割ると余りはすべて異なる。
この全てにｎと互いに素な自然数 a をかけると

at_1,　at_2,　$\cdots$,　$at_{\varphi(n)}$　となる。②

これらもｎで割った余りは全て異なる。
②は、法をｎとして考えると、①のどれかと合同で、かつ重複しない。
　ここで①、②それぞれの数の積を考えると、

$$t_1\times t_2\times\cdots\times t_{\varphi(n)}\equiv a^{\varphi(n)}\times t_1\times t_2\times\cdots\times t_{\varphi(n)}$$
$$\pmod{n}$$

t_1,　t_2,　$\cdots$,　$t_{\varphi(n)}$ はｎと互いに素なので、

$t_1\times t_2\times\cdots\times t_{\varphi(n)}$ はｎと互いに素であり、

これで上の合同式の両辺を割ることができる。

$$a^{\varphi(n)}\equiv 1 \pmod{n}$$

問 17　　3^{2014} の下 3 桁を求めよ。

$\varphi(1000)=1000\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}=400$ より

$3^{400}\equiv 1$ (mod1000)　かつ、$3^{10}=59049$ から

$3^{2014}=3^{2000}\times 3^{14}\equiv 3^{14}\equiv 49\times 81\equiv 969$

(mod1000)

問 18
1^{100}, 2^{100}, 3^{100}, …, 99^{100}, 100^{100}　の 100 個の数について、それぞれの下 2 桁は、何通りあるか。それらをすべて求めよ。

これは期末考査の問題として出題した。正答率は低いものであった。

100＝25×4　であるから、法を 25 と 4 に分ける。

①a が 5 の倍数のとき、$a^{100}\equiv 0$ (mod25)

a が 5 で割り切れないとき、

$\varphi(25)=25\times\frac{4}{5}=20$ より　$a^{20}\equiv 1$ (mod25)

$a^{100}\equiv 1$ (mod25)

②a が偶数のとき、$a^{100}\equiv 0$ (mod4)

a が奇数のとき、

$\varphi(4)=4\times\frac{1}{2}=2$ より　$a^{2}\equiv 1$ (mod4)

$a^{100}\equiv 1$ (mod4)

よって、100 個の数は次の 4 通りに分類される。
それぞれ下 2 桁は、以下の通り。

	a が 5 の倍数	a が 5 で割り切れない
a が偶数	0	76
a が奇数	25	1

A1－3．7　記数法

互除法では余りで次々と割っていくが、割り算の商を定数 p で次々に割っていくと、p 進法の表示が得られる。自然数 n は、p で割っていくと、

$$n=a_1+a_2p+a_3p^2+\cdots+a_kp^{k-1}$$

が得られ、これを $a_ka_{k-1}\cdots a_3a_2a_1$ という k 桁の数として表す。

普段は 10 進法に親しんでいるが、2 進法、5 進法など別の記数法を使うことで、数の構造に対する理解が深まると考えられる。

問 19
1,3,9,27,…, 3^n, … g（グラム）のおもりが 1 つずつある。天秤で 200 g を計りたい。どうすればよいか。

$$200=2\times 3^4+3^3+3^2+2$$
$$=(3-1)\times 3^4+3^3+3^2+(3-1)$$
$$=3^5-3^4+3^3+3^2+3-1$$

と書けるから、

天秤の片側に 3^5,　3^3,　3^2,　3 を乗せ、

逆の方に 3^4,　1 をのせる。

釣り合うまであと 200 g 必要になる。

問 20
初めの数 1 に 3 をかけて数字を並べた。1, 3, 9, 27, …これらから異なるいくつかをとってきて足してできる数を小さい順に並べた。1, 3, 4, 9, 10, …
101 番目の数は何か。

1, 3, 9, 27, …を 3 進法に直すと、
1, 10, 100, 1000
この 3 進法の数を適当に取ってきて足し合わせても繰り上がりは起きない。
それらを小さい順に書くと、
1, 10, 11, 100, 101, …　となる。
これは 2 進法の小さい順の数の並びである。
101 は 2 進法だと、1100101（2 進法）なので、
101 番目の数は、1100101（3 進法）である。
これは 10 進法だと、

$$3^6+3^5+3^2+1=982$$

問21
0＜α＜1　を満たす実数αがある。任意の自然数nについて、$2^{n-1}\alpha$　の整数部分をa_n，小数部分をb_nとする。　nが奇数の時 0≦b_n＜0.5,　nが偶数の時 0.5＜b_n＜1である。実数αを求めよ。

αを2進法で表したとき、$\alpha=0.c_1c_2c_3\cdots$とする。

c_kは0か1である。これを2倍すると、小数点が1ずれる。2をn－1回かけたとする。

$2^{n-1}\times\alpha=c_1c_2c_3\cdots.c_nc_{n+1}\cdots$

$c_n=0$　ならb_nは0.5より小さい。よって、

nが奇数の時$c_n=0$，nが偶数のとき$c_n=1$

$\alpha=0.010101\cdots$（2進法）と書ける。

これを10進法に直すと

$\alpha=\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}\cdots=\frac{1}{3}$

最後の極限のところは、無限等比級数などと難しく扱わず、循環小数の分数化と同様に$4\alpha-\alpha$と考えればよい。

問22
自然数nを2進法で表したとき数字1が使われる個数を$f(n)$，n！を素因数分解したときの2の指数を$g(n)$　とする。$f(n)+g(n)=n$　を示せ。

数学的帰納法で鮮やかに示せる。

①$f(1)=1$，$g(1)=0$　より$f(1)+g(1)=1$

②n＝kのとき$f(k)+g(k)=k$と仮定する。

整数k+1が素因数2をx個持っているとすると、
k+1＝□1000…00　（右からちょうどx個が0）
k＝□0111…11　（右からちょうどx個が1）
なので、

$f(k+1)=f(k)-(x-1)$

$g(k+1)=g(k)+x$　　となる。よって

$f(k+1)+g(k+1)=f(k)+g(k)+1=k+1$

①②より全ての自然数nにおいて、$f(n)+g(n)=n$

問23
$4x^3-3x^2-8x+5$　を$x=2$において展開せよ。

多項式でp進法を考えると、テイラー展開となる。
組立除法などが既習であれば、より分かりやすい。

$$4x^3-3x^2-8x+5$$
$$=9+28(x-2)+21(x-2)^2+4(x-2)^3$$

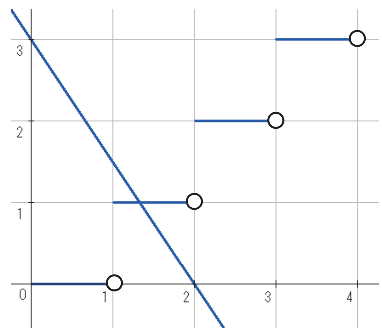
A1―3．8　ガウス記号
実数xを越えない最大の整数を［x］と書く。
［x］≦x＜［x＋1］　である。
切り上げをガウス記号で書くと　x⇒　－［－x］
四捨五入で整数値にするのは、
x⇒［2x］－［x］
と書ける。

問24
$3x+2[x]=6$　を満たす実数xを求めよ。

$[x]=-\frac{3}{2}x+3$と変形し、グラフを利用すると、

1≦x＜2　にただひとつ解があることがわかる。

$-\frac{3}{2}x+3=1$　より　$x=\frac{4}{3}$



問25

$\left[\dfrac{x}{2}\right]+\left[\dfrac{2x}{3}\right]=x$ を満たす自然数 x を求めよ。

6で割った余りで分類するとガウス記号を外せる。

$f(x)=\left[\dfrac{x}{2}\right]+\left[\dfrac{2x}{3}\right]$ とおく。nを整数とする。

$x=6n$ のとき、$f(x)=[3n]+[4n]=7n=6n$

より $n=0$, x＝0　となり不適。

$x=6n+1$ のとき、

$$f(x)=\left[3n+\frac{1}{2}\right]+\left[4n+\frac{2}{3}\right]=7n=6n+1$$

より　$n=1$，x＝7は適する。

$x=6n+2$ のとき、

$$f(x)=[3n+1]+\left[4n+\frac{4}{3}\right]=7n+2=6n+2$$

より　$n=0$，x＝2は適する。

同様に調べると、適するxは，2, 3, 4, 5, 7のみ。

あるいは、はじめに次のように絞り込む。

$x-1<[x]\leqq x$ より　$\dfrac{x}{2}-1<\left[\dfrac{x}{2}\right]\leqq\dfrac{x}{2}$

$\dfrac{2x}{3}-1<\left[\dfrac{2x}{3}\right]\leqq\dfrac{2x}{3}$ である

$\dfrac{7x}{6}-2<\left[\dfrac{x}{2}\right]+\left[\dfrac{2x}{3}\right]=x\leqq\dfrac{7x}{6}$ から、

$x<12$　がわかる。

問26

$\left[\dfrac{n}{[\sqrt{n}]}\right]=4$ を満たす自然数nは何個あるか。

左辺がややこしい式だが、表にすると規則がわかる。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$[\sqrt{n}]$	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3
$\left[\dfrac{n}{[\sqrt{n}]}\right]$	1	2	3	2	3	3	3	4	3	3

条件を満たすnは、8, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19の8個。

問27

数列 $a_m=[\sqrt{m}]$　(m＝1, 2, 3, …) とする。

$k\geqq2$　のとき $a_m<k\leqq a_{m+1}$ となる m に対して、

数列 $b_k=m$，$b_1=0$ とおく。

$\displaystyle\sum_{m=1}^{n^2}a_m+\sum_{k=1}^{n}b_k$ を n で表せ。

これを高3の実力テストに出題したところ、予想して数学的帰納法の証明による解答と、Σの計算をコツコツやった解答と半々であった。結果は大変きれいで、後から立体のパズルのような図をつけたレポートが数人から提出された。

解法1　数学的帰納法によるもの

$\displaystyle\sum_{m=1}^{n^2}a_m+\sum_{k=1}^{n}b_k=n^3$　と予想する。

n＝1のとき、　1+0=1　より成立する。

n＝pのとき $\displaystyle\sum_{m=1}^{p^2}a_m+\sum_{k=1}^{p}b_k=p^3$ と仮定する。

$$\begin{aligned}&\sum_{m=1}^{(p+1)^2}a_m+\sum_{k=1}^{p+1}b_k\\&=p^3+a_{p^2+1}+a_{p^2+2}+\cdots+a_{(p+1)^2}+(p+1)^2-1\\&=p^3+\left[\sqrt{p^2+1}\right]+\left[\sqrt{p^2+2}\right]+\cdots+\left[\sqrt{(p^2+1)^2}\right]+p^2+2p\\&=p^3+p\times2p+(p+1)+p^2+2p\\&=(p+1)^3\end{aligned}$$

n＝p＋1　でも成立しており、
すべての自然数について、

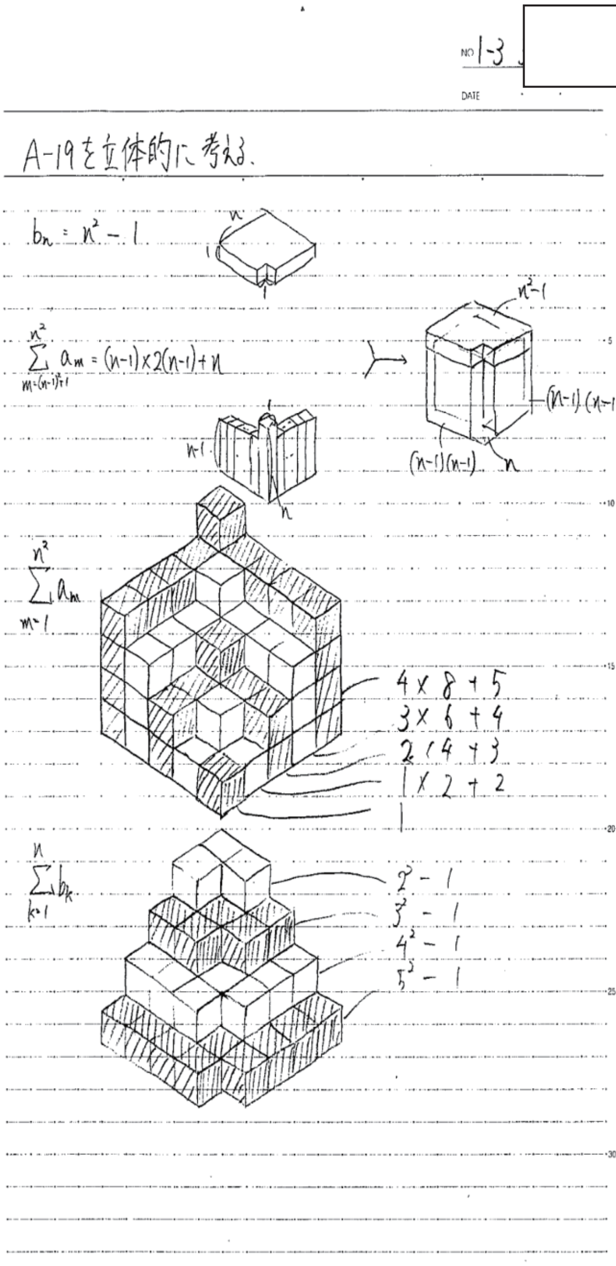
$$\sum_{m=1}^{n^2}a_m+\sum_{k=1}^{n}b_k=n^3$$

解法２　地道な計算によるもの

$$\sum_{m=1}^{n^2} a_m$$
$$=1\times3+2\times5+3\times7+\cdots+(n-1)(2n-1)+n$$
$$=\sum_{i=1}^{n-1} i(2i+1)+n$$
$$=2\times\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+\frac{(n-1)n}{2}+n$$
$$\sum_{k=1}^{n} b_k=\sum_{k=1}^{n}\left(k^2-1\right)$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-n$$

これらを足し、　$\displaystyle\sum_{m=1}^{n^2} a_m+\sum_{k=1}^{n} b_k=n^3$

解法３　立体で考える（生徒のレポートより）



問 28
正の整数　n　、正の実数　x　に対して、

$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx]$$

この式は、n＝2 や 3 の場合にはわかりやすいもので、n 個のうち何個目から　+1　になるのか、ということが問題だ。

$[nx]=m$　とおくと、m≦ｎｘ＜m+1

$m=nk+h$（h＝0，1，2，…，n－1）のとき

$k+\dfrac{h}{n}$ ≦ｘ＜ $k+\dfrac{h+1}{n}$　から

$k+\dfrac{h+a}{n}$ ≦ｘ+ $\dfrac{a}{n}$ ＜ $k+\dfrac{h+a+1}{n}$　である。

$h+a+1$ ≦ｎ　のとき $\left[k+\dfrac{h}{n}\right]=k$

$h+a$ ≧ｎ　のとき $\left[k+\dfrac{h}{n}\right]=k+1$

したがって

$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]$$
$$=k+k+\cdots+(k+1)+(k+1)+\cdots$$
$$=k\times(n-k)+(k+1)\times h$$
$$=nk+h$$
$$=m$$

問 29　　正の無理数 a，b が $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=1$ を満たすとき、
[a の自然数倍]と[b の自然数倍]は重複しない。
しかもこれらで自然数をすべて網羅できる。

これはレイリーの定理という。とても不思議に見えるが、証明は極めて簡潔で美しい。多数レポートも提出され、授業でも盛り上がった問題であった。

例　$a=\sqrt{2}$ のとき、$b=\dfrac{a}{a-1}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=2+\sqrt{2}$
約 1.4 と約 3.4 として、
[a の自然数倍]と[b の自然数倍]を書き並べてみる。

[a の自然数倍]	1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14, …
[b の自然数倍]	3, 6, 10, 13…

これは実に魔訶不思議に見える。

証明

①まず前半の『重複がない』ことを示す。

もし $[ma]=[nb]=k$ なる自然数 m, n, k があるとする。a, b が無理数なので、不等号に等号は付かない。

$k<ma<k+1$ より $\dfrac{m}{k+1}<\dfrac{1}{a}<\dfrac{m}{k}$

$k<nb<k+1$ より $\dfrac{n}{k+1}<\dfrac{1}{b}<\dfrac{n}{k}$ なので

$\dfrac{m+n}{k+1}<1<\dfrac{m+n}{k}$ となり

$k<m+n<k+1$ である。

m, n, k は自然数であるから、隣の自然数 k と $k+1$ の間に別の自然数 $m+n$ が存在してはおかしい。

②後半の『自然数をすべて網羅できる』ことを示す。

もし、ある自然数kが現れなかったとすると、

$ma<k<k+1<(m+1)a$

$nb<k<k+1<(n+1)b$

となる整数 m, n, k があることになる。

$\dfrac{m}{k}<\dfrac{1}{a}<\dfrac{m+1}{k+1}$, $\dfrac{n}{k}<\dfrac{1}{b}<\dfrac{n+1}{k+1}$ より

$\dfrac{m+n}{k}<1<\dfrac{m+n+2}{k+1}$ よって

$k-1<m+n<k$ となる。

m, n, k は自然数であるから、隣の自然数 $k-1$ と k の間に別の自然数 $m+n$ が存在してはおかしい。

A1－3．9　整数解

問 30

$\sqrt{n^2+80}$ が整数のとき、考えられる自然数nをすべて求めよ。

$\sqrt{n^2+80}=m$ （mは整数）とおくと、

$m^2-n^2=(m+n)(m-n)=80$

$m+n=a$, $m-n=b$ とすると、

$\dfrac{a-b}{2}=n$ なので、a, b とも偶数で $a>b$ でないとnが自然数にならない。これを満たす組は

（a, b）＝（40, 2），（20, 4），(10, 8)

n＝19, 8, 1　のみ

問 31

3 つの自然数 a, b, c があり、$a \geqq b \geqq c$ である。

$a+b$ を c で割っても、$b+c$ を a で割っても、$c+a$ を b で割っても 1 余る。a, b, c を求めよ。

$a \geqq b \geqq c>1$ から、

まずは一番大きい a に着目する。

$2a \geqq b+c$ から、　、$b+c$ を a で割った商は 1。

よって $b+c=a+1$, $a=b+c-1$ である。①

$c+a=b+2c-1 \leqq 3b-1$ だから、

$c+a$ を b で割った商は 1 か 2。

②この商が 1 のとき

$c+a=b+1$, $a=b-c+1$

①と連立させれば、$b+c-1=b-c+1$

$c=1$ となり、不適。

③この商が 2 のとき

$c+a=2b+1$, $a=2b-c+1$

①と連立させれば、$b+c-1=2b-c+1$

$b=2c-2$　①に代入すれば $a=3c-3$

よって、

$a+b=5c-5$ これをcで割ると 1 余るので

$5c-6$ はcで割り切れる。

cは6の約数でないといけないので、

c＝2, 3, 6　があり得る。よって

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}$$

A1－3. 10　おわりに

「数学は諸科学の女王であり、数論は数学の女王である」とガウスは述べた。女王と呼んだ理由はさまざまだろうが、小学生でもできそうな問題でありながら、きちんと解こうとすると多くの数学者の手を焼かせるような問題もあり、わがままなイメージがあるのかもしれない。蜜蜂の女王は自分で働かず働き蜂を働かせるが、数学の女王もよく他の分野の世話になる。題材は整数でありながら、解析学や幾何学に働いてもらうこともある。このことは、整数の中にいろいろな構造が内包されているということである。

連続量は微積分や解析学、物理では波動に分野を広げるが、離散量は組み合わせ論、数理論理学や粒子説につながる。そしてあらゆる離散性は、1，2，3，…という自然数に根を置く。

いろいろな数について学習し、数の世界が拡がると、『整数』の世界は狭く感じる。無限にあるとはいえ、とびとびの値をとり、隣の整数が存在するという特徴は、実数や複素数の世界の中では特別な存在だ。

高校以降の段階で広い数の世界の中の整数を眺めてみると、幼馴染との再会のような懐かしい思いと、自然数は意外に「すごい」というような新鮮な驚きがある。

私自身整数の勉強をしたとき、「2 整数a，bが互いに素」ということと、「1 次不定方程式$ax+by=1$（a，bは整数）に整数解がある」「1 が作れる」ということが同値であることを確認し、だから自分と考えの違う友人、文化やベースが異なる存在が大切なんだな、と感じた。自分と互いに素なほど異なる考え方を取り入れれば、すべての整数が作れるほど世界が広がる。

そんなイメージを感じながら、今後も生徒と一緒に整数に関するいろいろな魅力を探っていきたい。

【参考文献】
・代数学辞典　聖文社
・初等整数論入門　（銀林浩）国土社
・代数学復刻版　（星野華水）数研出版
・やわらかな思考を育てる数学問題集 1
岩波現代文庫

（2014　更科）

d3-5. 場合の数～樹形図から漸化式へ～

関連分野：数列、確率
高等数学：解析学、確率論
対象学年：中学３年生～高校２年生
関連単元：場合の数、数列
教 材 名：場合の数～樹形図から漸化式へ～

≪場合の数～樹形図から漸化式へ～≫

場合の数や確率は、生徒の得手不得手がはっきりしている分野の１つである。苦手とする理由は、場合分けなどの漏れなく重複なく数え上げる方法が思いつきにくく、また考え違いをしやすいからであろう。場合の数を求めるとき、間違えなく数え上げるために樹形図を利用することがある。そしてその際に、途中まで書いた樹形図から見出した規則性により課題が解決することもある。これは樹形図から‘再帰性’或いは‘自己相似性’が発見し易いためであろう。そこで、場合の数に関する課題において、目標を数列と捉えて拡張し、樹形図を利用してそこに潜む規則性を発見させる。これにより生徒の視野を広げるとともに、未知の規則を発見する楽しみと達成感を味わわせたい。

なお、未知の数列を探求する時の自然な目標は『n 番目の数は何か？』即ち n 番目の数 $f(n)$ を n の式で表現することであろう。しかし $f(n)$ を、その手前にある $f(n-1),\ f(n-2)$ などのいくつかの数で表すことも、数列を解明するときの大きな目標である。高校で漸化式を扱うが、ともすると『漸化式を解く』ことが中心となり、定型的手法の練習に終始しがちである。**漸化式を導く**ことは重要なことであり、色々な機会にそのような考え方を扱うべきだと考えている。

d3-5.1. 場合の数～樹形図から漸化式へ～

場合の数を学習した後、次の問題を例題として取り上げる。

例題

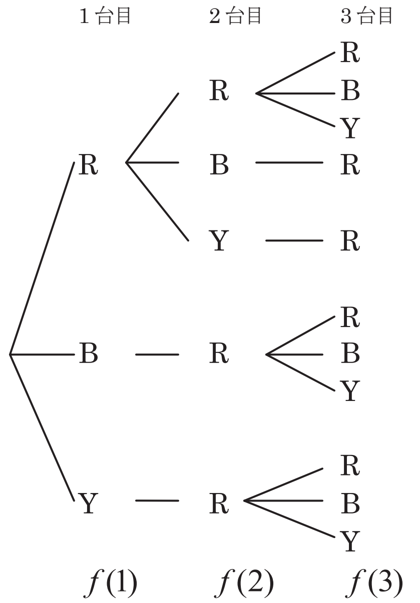
一列に連結している何台かの車両に赤 or 青 or 黄色の塗装を行う。

隣あう２つの車両の少なくとも一方は赤であるような塗り方について考えてみよう。(京大入試より)

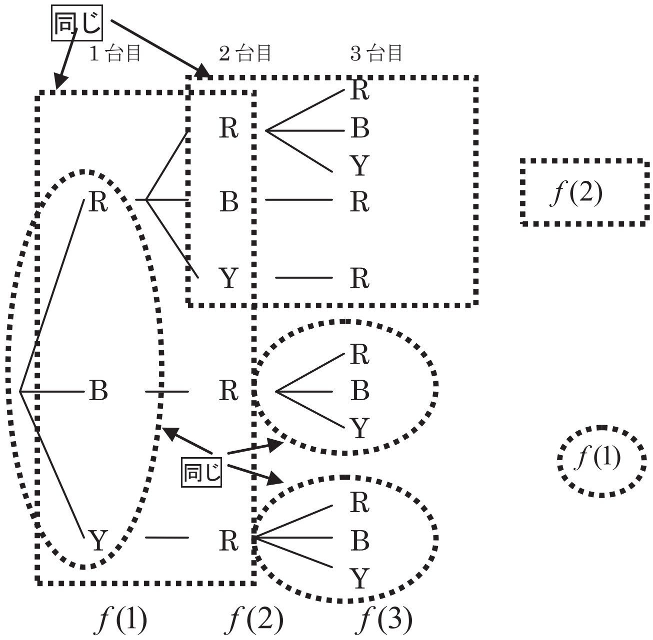
赤をR、青をB、黄をYで表し、また、n 台の車両の塗り方の総数を $f(n)$ と表すことにすると、
１台の塗り方は３通りなので、$f(1)=3$
また、２台の塗り方は、RR,RY,YR,RB,BR　より、
$f(2)=5$
３台のときは、RRR,　RR*, R*R, *RR,　*R*（ただし、*は Bor Y）なので、

$$f(3)=1+3\cdot 2+2\cdot 2=11$$ である。

これらは樹形図で表すと、B,Y の後はRであり、次のように分かり易い。

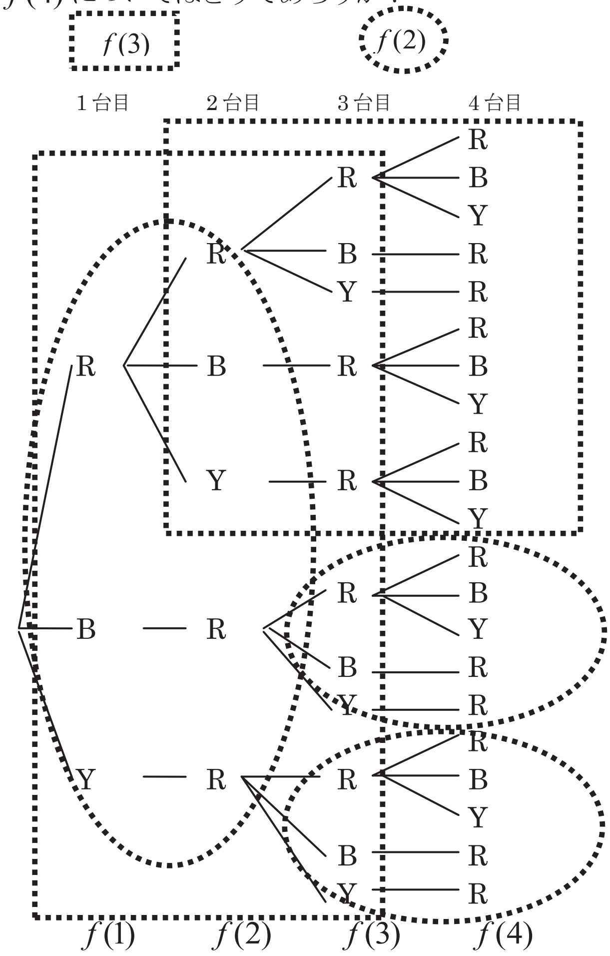


$f(1), f(2), f(3)$ に成り立つ関係式を考えてみよう。

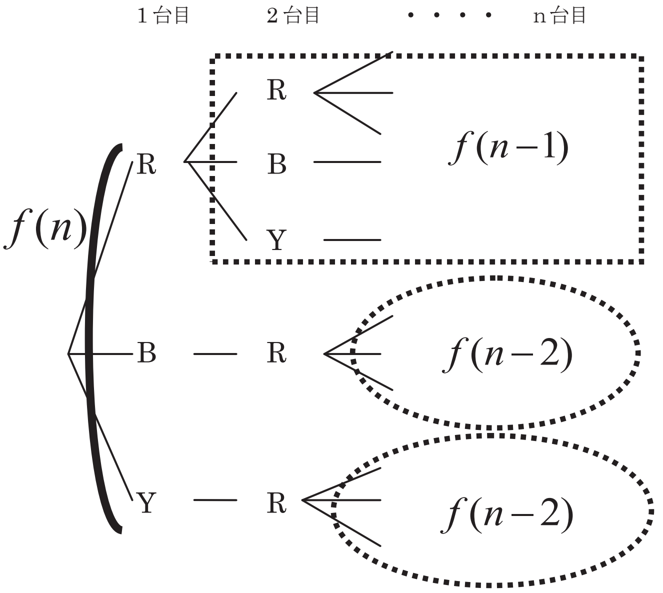


$f(3)=f(2)+2f(1)$ であることが分かる。

$f(4)$ についてはどうであろうか？



やはり $f(4)=f(3)+2f(2)$ 　が成り立つ。
３つに枝分かれした後は $f(\ )$ で表されるので、
n 台（$n\geqq 3$）のときは次のようになる。



$f(n)=f(n-1)+2f(n-2)$ （n≧３）--------①
これを用いて $f(10)$ を求めると、
$f(2)=5$ 、$f(3)=11$ 　であるから、
$f(4)=f(3)+2f(2)=11+10=21$
$f(5)=f(4)+2f(3)=21+22=43$
$f(6)=43+42=85$
$f(7)=85+86=171$
$f(8)=171+170=341$
$f(9)=341+342=683$
$f(10)=683+682=1365$ 　となる。

樹形図を利用して、関係式（漸化式）を導き、場合の数を求めてみよう。

【参考】
上の計算から次の漸化式に気づく生徒もいる。
$f(n)=2f(n-1)+(-1)^{n-1}$ 　（$n\geqq 2$）--------②
①と②が同じ数列を表すことは、具体的に数列を書き出して確認させるが、余裕があれば次の様に示してもよい。
①より

$$f(n)-2f(n-1)=-\left\{f(n-1)-2f(n-2)\right\}$$
$$=(-1)^2\left\{f(n-2)-2f(n-3)\right\}$$
$$=(-1)^3\left\{f(n-3)-2f(n-4)\right\}$$

………

$$=(-1)^{n-2}\left\{f(2)-2f(1)\right\}$$
$$=(-1)^{n-2}(5-6)=(-1)^{n-1}$$

よって、$f(n)=2f(n-1)+(-1)^{n-1}$ 　（$n\geqq 2$）

【場合の数での通常の解法】
例題で車両が 10 台の場合について、R の車両の個数に注目して、場合分けて求める。
R が 10 台のとき、１通り。
R が９台のとき、R の間及び両端の 10 箇所のいずれかに B か Y がはいるので、10×2＝20 通り。
R が８台のとき、R の間及び両端の９箇所のいずれか２箇所に B か Y がはいるので、${}_9C_2\times 2^2$＝144 通り。
以下同様に、
R が７台のとき、${}_8C_3\times 2^3$＝448 通り。
R が６台のとき、${}_7C_4\times 2^4$＝560 通り。

Rが5台のとき、$_6C_5 \times 2^5$＝192通り。

以上で全部なので、合計1365通り。

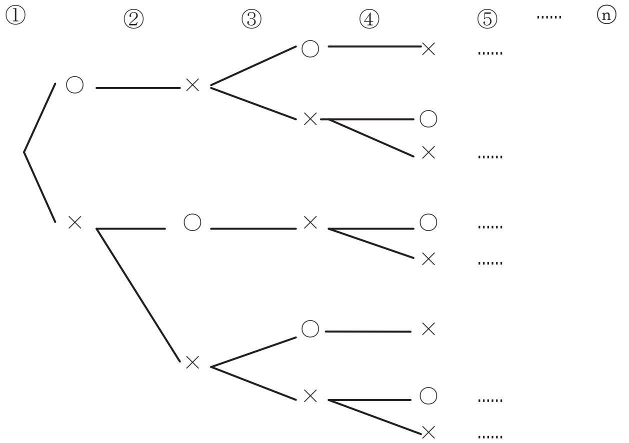
nが別の値の時も同様に求められるが、漸化式を用いるより煩雑である。

問題１

10個の点が一直線上に等間隔に並んでいる。
隣り合う点の幾つかを線（ 例えば ― ）で結んで記号を作るとき，何通りの記号ができるか。
ただし記号は、**連続する3点以上が線で結ばれない**ように作るものとする。

解答例）

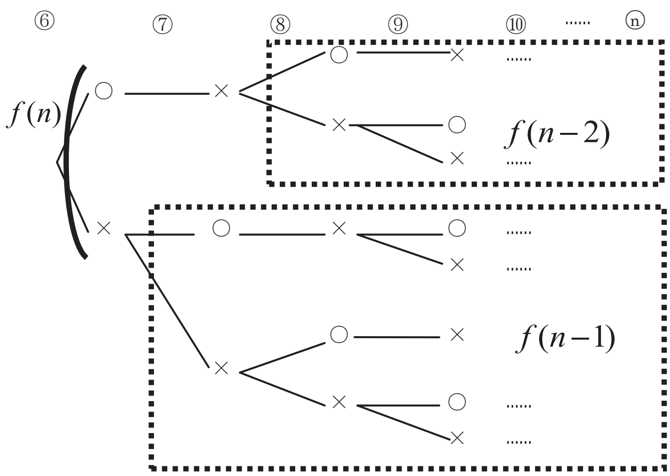
結ぶ、結ばないを○、×で表し、左から順にきめていくことにして樹形図を描くと、○が連続しないので、次のようになる。



n点でできる記号の総数を$f(n)$ と表すと、

$f(2)=2, f(3)=3$

また、２つに枝分かれしたところから後全体は$f(\ )$で表せるので、次のようになる。



$n \geqq 4$のとき、$f(n)=f(n-1)+f(n-2)$

したがって、

$f(4)=f(3)+f(2)=3+2=5$

$f(5)=f(4)+f(3)=5+3=8$

同様に、$f(6)=13, f(7)=21,$

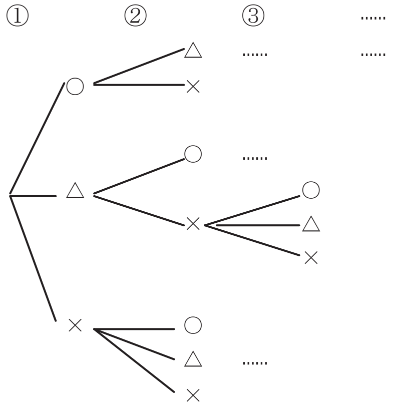
$f(8)=34, f(9)=55, f(10)=89$

問題２

問題１で、隣り合う点を結ぶ線が２種類(例えば ― と ＝ ）ある場合は，何通りの記号ができるか。
ただし記号は、連続する3点以上が同じ種類の線で結ばれないように作るものとする。

解答例）

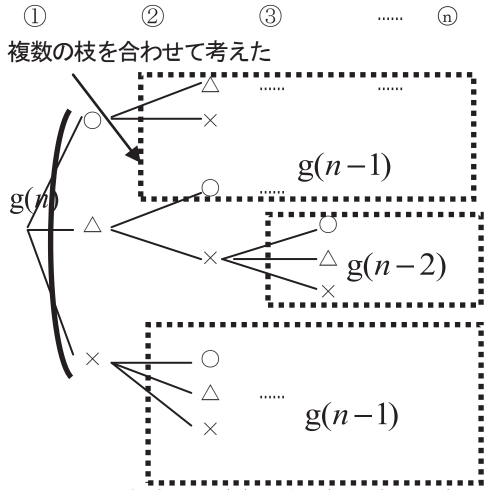
結ぶ時を○、△、結ばない時を×で表し、問題１と同様に樹形図で表すと、次のようになる。



n点でできる記号の総数を$g(n)$ と表すと

$g(2)=3, g(3)=7$

樹形図で3つに枝分かれするところからは$g(\ )$で表せ、また、別の場所の枝を合わせて3つの枝にしても良いので、次のようになる。



$n \geqq 4$のとき、$g(n)=2g(n-1)+g(n-2)$ -----①

したがって、

$g(4)=2g(3)+g(2)=14+3=17,$

$g(5)=34+7=41,$

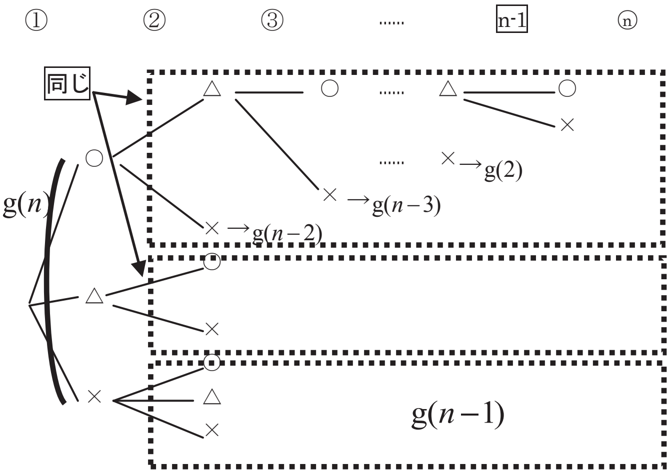
同様に、

$g(6)=99, g(7)=239, g(8)=577, g(9)=1393,$

$g(10)=3363$

別解）

樹形図で、２ つに枝分かれする部分にも繰り返しがあることに注目すると、次のようになる。



上の樹形図より、$n \geqq 4$ のとき、

$$g(n)=g(n-1)+2\{g(n-2)+g(n-3)+\cdots \qquad +2\}$$

----②

これより、

$$g(4)=g(3)+2\{g(2)+2\}=7+2(3+2)=17,$$

$$g(5)=17+2(7+3+2)=41,$$

$$g(6)=41+2(17+7+3+2)=99$$

以下略

【参考】

②より、

$$g(n)=g(n-1)+2\{g(n-2)+g(n-3)+\cdots \qquad +2\}$$

$$g(n-1)=g(n-2)+2\{g(n-3)+\cdots \qquad +2\}$$

辺々引いて、

$$g(n)-g(n-1)=g(n-1)-g(n-2)+2g(n-2)$$

$$\therefore g(n)=2g(n-1)+g(n-2)$$

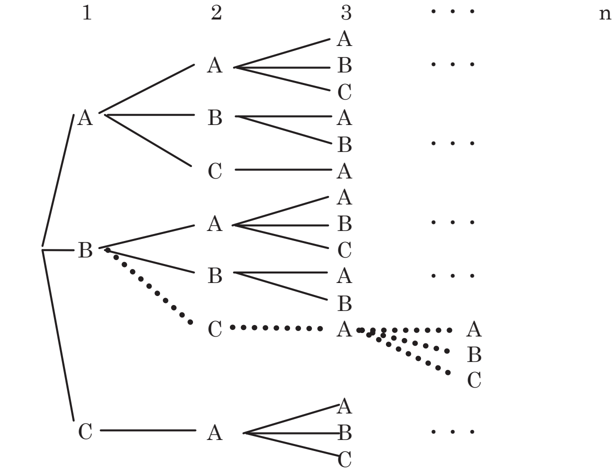
これは①である。

問題３.

３種類の文字A,B,Cを１０個、一列に並べて記号を作る。Aの隣はどの文字でも良いが、Bの隣はAかB、Cの隣はAであるようなものは、何通りできるか。

解答例）

３ つの枝分れを作るために、本来はない B→C を付け加えると、次のような樹形図ができる。付け加えた分は後で引けばよい。



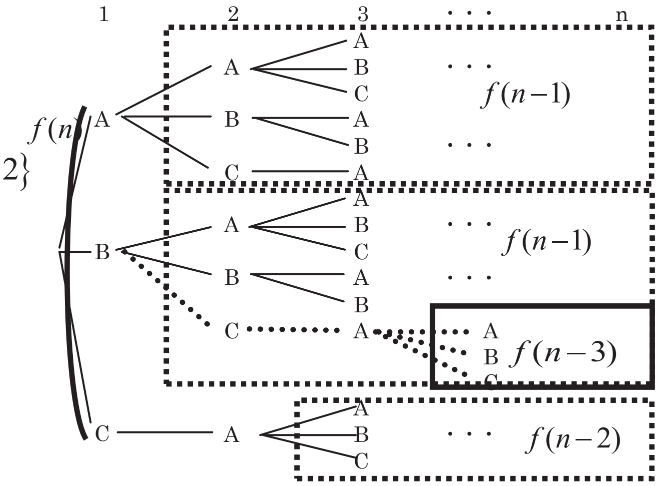
n 個のとき $f(n)$ 通りとすると、

$$f(1)=3, f(2)=6, f(3)=14$$

また、下のように考えて、

$n \geqq 4$ のとき、

$$f(n)=2f(n-1)+f(n-2)-f(n-3) \quad ......①$$



したがって、

$$f(4)=28+6-3=31,\quad f(5)=62+14-6=70$$

同様に、

$$f(6)=157, f(7)=353, f(8)=793, f(9)=1782,$$

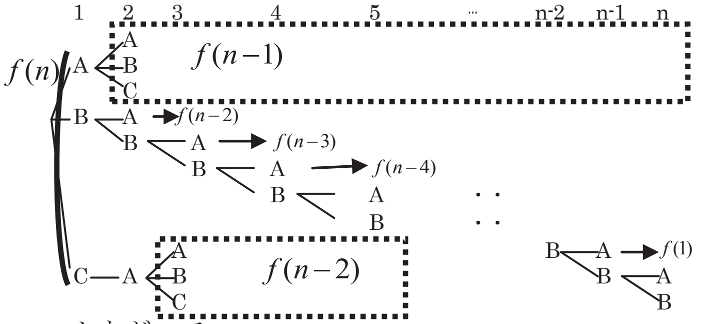
$$f(10)=4004$$

別解）

次の樹形図のように、２ つに枝分かれするところにも繰り返しが起きる。それに注目すると、次の漸化式が成り立つことが分かる。

$n \geqq 4$ のとき、

$$f(n)=f(n-1)+2f(n-2)+f(n-3)+f(n-4)+\cdots \qquad +2 \quad ......②$$



したがって、

$f(4)=f(3)+2f(2)+f(1)+2$

$=14+12+3+2=31,$

$f(5)=31+28+6+3+2=70,$

$f(6)=70+62+14+6+3+2=157$

以下略

【参考】

②より、

$$f(n)=f(n-1)+2f(n-2)+f(n-3)+f(n-4)+\cdots+2$$

$$f(n-1)=f(n-2)+2f(n-3)+f(n-4)+\cdots+2$$

辺々引いて、

$$f(n)-f(n-1)=f(n-1)+f(n-2)-f(n-3)$$

これより①を得る。

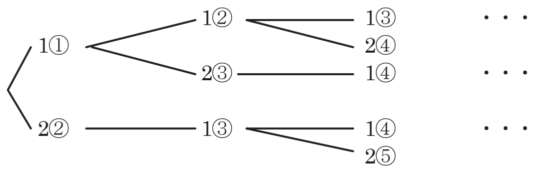
問題４.

１度に１段又は２段昇れるとき、１０段の階段の昇り方は何通りあるか。

ただし、２段昇りは連続できないものとする。

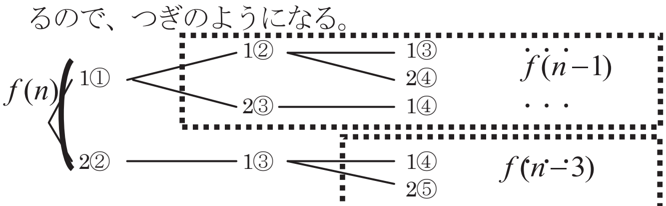
解答例）

樹形図は次のようになる。なお、○内の数はそこまでに昇った階段の総数である。



n 段の昇り方を $f(n)$ 通りとすると、上の①、②、③の個数より、$f(1)=1, f(2)=2, f(3)=3$

また､2 つに枝分かれするところからは $f(\ )$ で表されるので、つぎのようになる。



これより、$n\geqq4$　のとき、

$$f(n)=f(n-1)+f(n-3)$$

したがって、

$f(4)=f(3)+f(1)=3+1=4,$

$f(5)=4+2=6, f(6)=6+3=9,$

以下同様に、

$f(7)=13, f(8)=19, f(9)=28, f(10)=41$

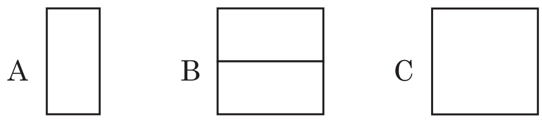
問題５.

一辺２cmの正方形と、２辺の長さが１cm，２cmの長方形を使って、縦２cm，横１０cmの長方形をもれなく敷き詰める方法は何通りあるか。（東大入試より）

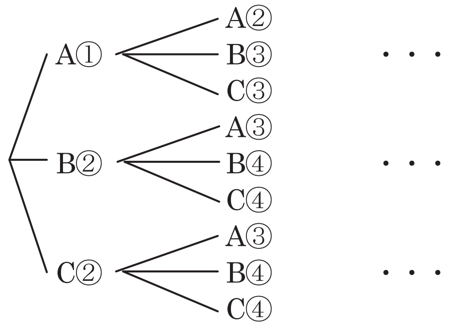
解答例）

左端から順に敷き詰めていくと考えると、

置き方は次のA,B,C のいずれかであり、

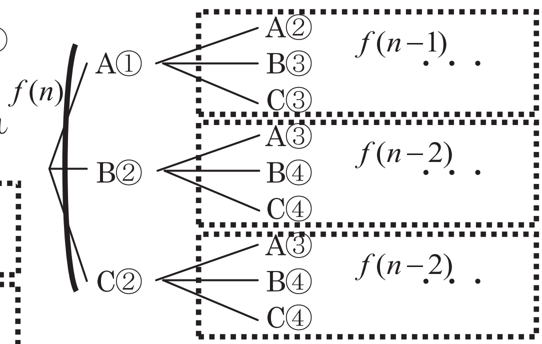


樹形図は次のようなる。なお、○内の数はそこまでに敷き詰め終えた部分の横の長さである。



横 n cmのときに $f(n)$ 通りとすると、樹形図の①、②の個数を考えて、$f(1)=1,\ f(2)=3$

また樹形図は、各箇所全てで３つに枝分かれしているので、次のように $f(\ )$ で表される。



$n \geqq 3$　のとき、$f(n)=f(n-1)+2f(n-2)$

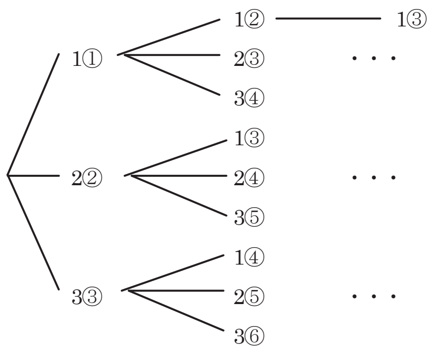
したがって、

$f(3)=f(2)+2f(1)=3+2=5,$
$f(4)=5+6=11, f(5)=11+10=21,$

以下同様に、
$f(6)=43, f(7)=85, f(8)=171, f(9)=341,$
$f(10)=683$

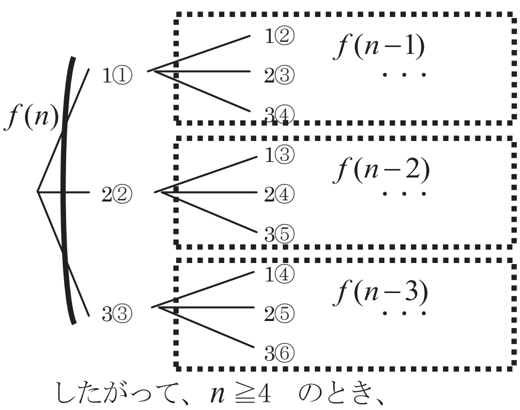
$\boxed{\text{問題 6}}$.
バスケットボールで１度に入る得点には１点、２点、３点がある。例えば、３点の得点の入り方は、
1→1→1、1→2、2→1、3　の４通りある。
10 点の得点の入り方は何通りあるか？

解答例）
樹形図は次のようになる。なお、○内の数は得点の総数である。



n 点の入り方を $f(n)$ 通りとすると、樹形図の①、②、③の個数より、$f(1)=1, f(2)=2, f(3)=4$

また樹形図は、各箇所全てで３つに枝分かれしているので、次のように $f(\ )$ で表される。



したがって、$n \geqq 4$　のとき、

$f(n)=f(n-1)+f(n-2)+f(n-3)$

よって、

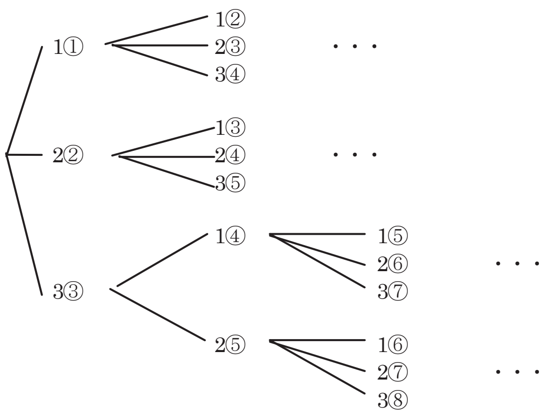
$f(4)=f(3)+f(2)+f(1)=4+2+1=7,$
$f(5)=7+4+2=13,$

以下同様に、
$f(6)=24, f(7)=44, f(8)=81, f(9)=149,$
$f(10)=274$

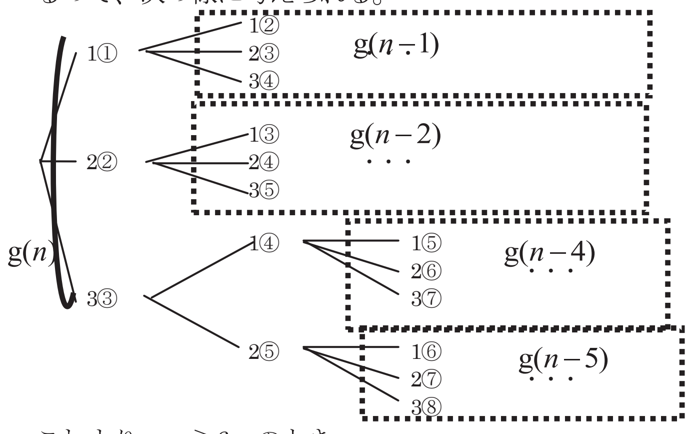
$\boxed{\text{問題 7}}$.
問題６で、**３点が連続しない場合**はどうなるか？

解答例）
n 点の入り方を $g(n)$ 通りとすると、
$n=5$ までは $f(n)$ と同じなので、
$g(1)=1, g(2)=2, g(3)=4, g(4)=7, g(5)=13$

また３－３が無いので、樹形図は次のようになる。



３ つに枝分かれするところから後全体は $g(\ )$ で表せるので、次の様に考えられる。



これより、$n \geqq 6$　のとき、

$$g(n)=g(n-1)+g(n-2)+g(n-4)+g(n-5)$$

したがって、

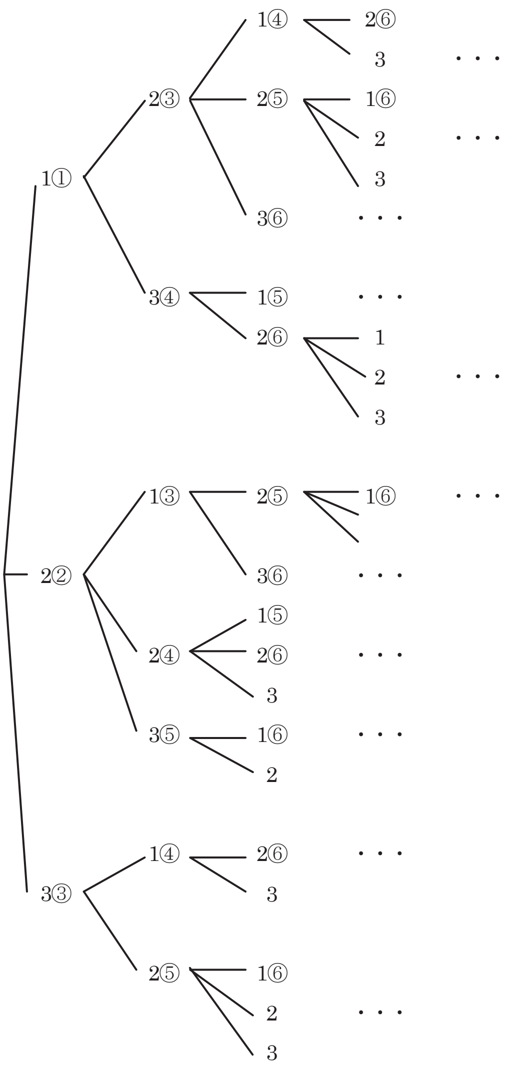
$g(6)=g(5)+g(4)+g(2)+g(1)$
$=13+7+2+1=23,$
$g(7)=23+13+4+2=42$

以下同様に、

$g(8)=76, g(9)=138, g(10)=250$

$\boxed{\text{問題 8}}$.

問題 6 で、**1点と3点が、それぞれ、連続しない場合**はどうなるか？
色々な漸化式が成り立ちます。複数求めてみましょう。
解答例1）
１－１、３－３が無いので、樹形図は次のようになる。



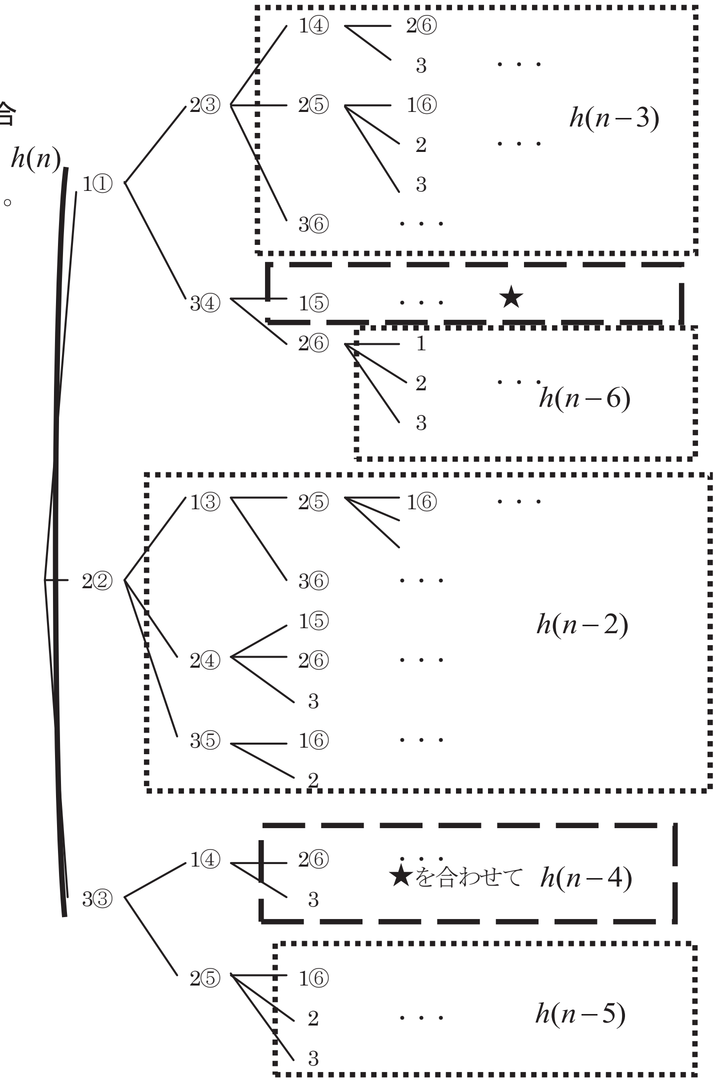
n 点の入り方を $h(n)$ 通りとすると、

$n=6$ までは、樹形図の①,②,・・,⑥の個数より、

$h(1)=1, h(2)=1, h(3)=3,$

$h(4)=4, h(5)=6, h(6)=10$

3 つに枝分かれするところからは $h(\ )$ で表されるので次のように考えられる。なお、★の前はいずれも④なのでまとめられる。



よって、$n \geqq 7$ のとき、

$h(n)=h(n-2)+h(n-3)+h(n-4)+h(n-5)+h(n-6)$

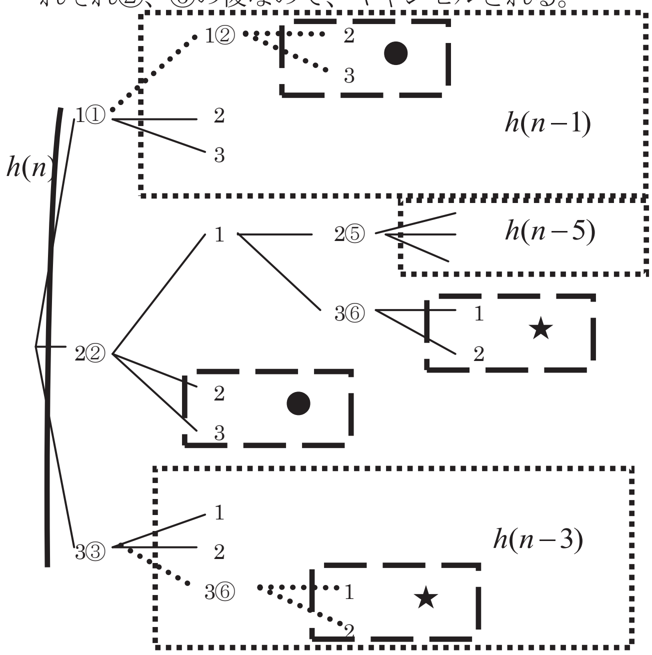
したがって、

$h(7)=h(5)+h(4)+h(3)+h(2)+h(1)$
$=6+4+3+1+1=15$

以下同様に、
$h(8)=24, h(9)=38, h(10)=59$

解答例２）

１－１、３－３を書き加えると、次の様に●、★がそれぞれ②、⑥の後なので、キャンセルされる。



上の図より $n \geqq 6$　のとき、

$$h(n)=h(n-1)+h(n-3)+h(n-5)$$

$n=5$ までの値を求めて、

$$h(1)=1, h(2)=1, h(3)=3, h(4)=4, h(5)=6$$

したがって、

$$h(6)=h(5)+h(3)+h(1)=6+3+1=10$$
$$h(7)=10+4+1=15$$

以下略

解答例３）

１－１を書き加えると、次の様に●、★、■のキャンセルが考えられる。したがって、

$n \geqq 8$　のとき、

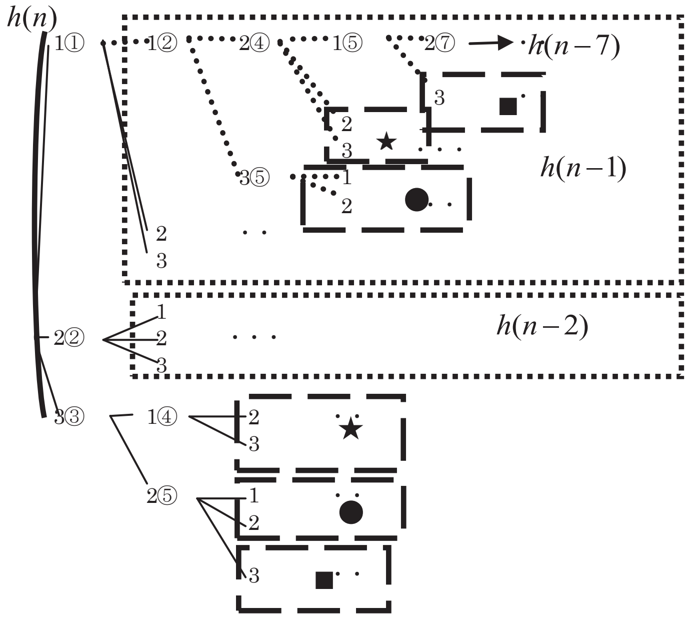
$$h(n)=h(n-1)+h(n-2)-h(n-7)$$

$n=7$ までの値を求めて、

$$h(1)=1, h(2)=1, h(3)=3, h(4)=4, h(5)=6,$$
$$h(6)=10, h(7)=15$$

よって、

$$h(8)=h(7)+h(6)-h(1)=15+10-1=24$$
$$h(9)=24+15-1=38$$
$$h(10)=38+24-3=59$$



★本教材は本校元教諭 駒野誠氏 が本校での授業及び2007年本校教育研究会などで実施した内容を、別途授業実践してまとめたものである。　　　　(2014 鈴木)

A1-4. 開平法と連分数による平方根の近似値

関連分野	：代数分野，解析分野
高等数学	：代数，解析
対象学年	：高校１年生
関連単元	：「数と式」（数学Ⅰ）
教 材 名	：「開平法と連分数による平方根の近似値」

≪誤差を考慮に入れた平方根の近似値≫

数学Ⅰのデータの分析では，標準偏差や相関係数が扱われ，単に平方根の計算ができるだけでなく，その近似値が重要な役割を担うようになった．学習指導要領解説（文部科学省（2009））には，「多くのデータを扱う場合には，コンピュータなどを積極的に活用する」という記述があるが，コンピュータ教室の利用状況の制約から，数学科で頻繁に利用できない学校も多い．そのため，手計算で平方根の近似値を求める手法である開平法は，特にデータの分析において，実用的であると言える．また，それだけでなく，開平法の仕組みや誤差まで考慮すれば二次方程式，二次不等式の応用として，理論的な面白さがある．さらに，数学Aの「整数の性質」ではユークリッドの互除法を扱うので，その応用として，平方根を連分数で表して，その近似値を求め，多面的に平方根の近似値を考察することもできる．また，課題学習でも利用できる教材でもある．

A1-4.1. 授業実践の概要

本校において，2013年度の中学３年生３学級（各男子41名）を対象として，週に２時間実施される数学（代数）の２学期のすべての授業における授業実践を通して，教材開発を行った．主な授業内容と順序は次の通りである．

1) 平方根の定義と基本性質
2) 平方根の整数部分の不等式による表現
3) 平方根の近似値の不等式による求め方
4) 開平法の手順と証明
5) 高木の近似法 cf. 高木（2008）
6) 誤差の評価と精度の上げ方
7) 無理数作り cf. 木村（2012）
8) 連分数の定義と基本性質 cf. 岩堀（1983），高木（1971），フックス・タバチニコフ（2012）
9) ユークリッドの互除法と連分数の関係
10) 無理数の連分数での表現
11) 連分数による平方根の近似値
12) ヘロンの近似式 cf. ファン・デル・ヴェルデン（2006））
13) ニュートン法
14) ヘロンの近似式とニュートン法の関係

5)，6)，7)では必要に応じて，生徒に電卓を利用させた．実際の授業では，＋，－，×，÷，√の機能のある８桁の電卓で，最後の桁は四捨五入せずに切り捨てるタイプであった．例えば，「2÷3」は「0.6666666」と表示されるものである．

以下，授業で扱った内容のうち，主なものを紹介する．

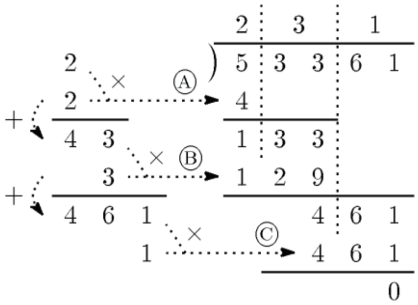
A1-4.2. 開平法

① 幾何的な解釈

開平法の手順（詳細略）と幾何的な意味を確認する．

$10^n \le \sqrt{x} < 10^{n+1} \Leftrightarrow 100^n \le x < 100^{n+1}$ が基本であり，$\sqrt{x}$ の桁数の判断で最初に利用される．

例１ $\sqrt{53361} = 231$



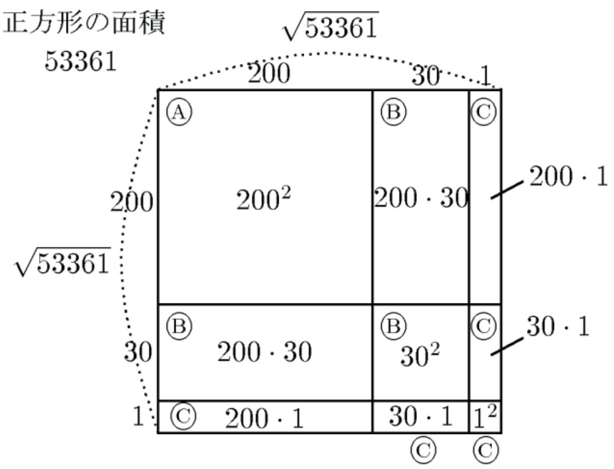


図１ 開平法の図形的解釈（有理数）

１辺が $\sqrt{53361}$ の正方形を考えると，その面積は

53361である．また，図１のようにⒶ，Ⓑ，Ⓒを定めると，これらの面積は

Ⓐ $4\cdot 10000=200^2$

Ⓑ $129\cdot 100=43\cdot 3\cdot 100=(2\times 200+30)\cdot 30$

$=2\times(200\cdot 30)+30^2$

Ⓒ $461=(2\times(200+30)+1)\cdot 1$

$=2\times(200\cdot 1+30\cdot 1)+1^2$ なので，

$53361=$Ⓐ$+$Ⓑ$+$Ⓒ$=(200+30+1)^2=231^2$ より，

$\sqrt{53361}=231$を得る．図１の意味については，生徒も容易に納得できる．

例２　$\sqrt{569}=23.8\cdots$

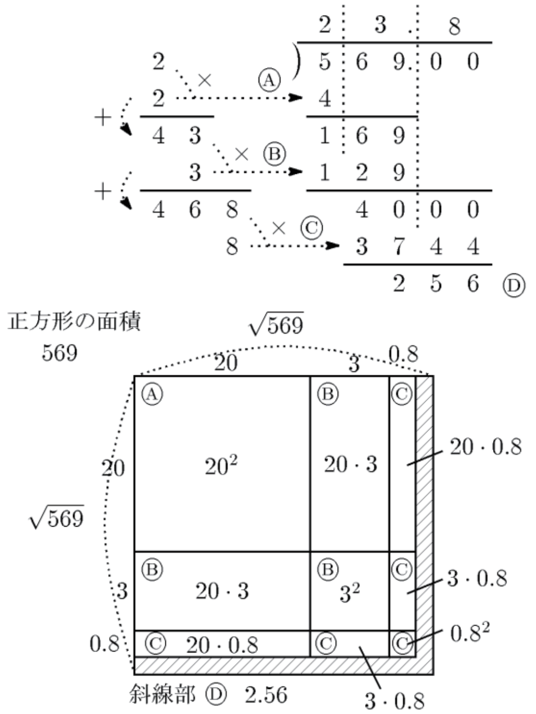


図２　開平法の幾何的解釈（無理数）

$569-($Ⓐ$+$Ⓑ$+$Ⓒ$)=$Ⓓ$\Leftrightarrow 569-23.8^2=2.56\geq 0$

8の最大性より，$569-23.9^2<0$ なので，

$23.8^2\leq 569<23.9^2 \Leftrightarrow 23.8\leq\sqrt{569}<23.9$ から，

$\sqrt{569}=23.8\cdots$　を得る．

さらに，小数第２位以降の位の値を得るには，$468+8=476$，256を25600として，同様の計算を続ければよい．証明も同様にできる．図２の意味については，すぐに理解できない生徒もいるが，図２を見ながら，最初に最高位の位（桁数）を決め，さらに，$10, 1, 10^{-1}, 10^{-2}, \cdots$ の位の値を順に最大になるようにとっていることで理解させられる．

② 代数的な証明

$\sqrt{x}$ $(x>0)$ の開平法について，手順を文字で表し，証明する．証明の記述については，高木（2008）第十一章（四）が詳しい．具体的には，x_i を0以上99以下の整数として，

$$x=x_n100^n+x_{n-1}100^{n-1}+\cdots$$
$$+x_1100^1+x_0100^0+x_{-1}100^{-1}+\cdots$$

と表し，例２で確認したことを，一般的に文字で証明する．詳細は省略するが，図３のような整理された計算を考えると，生徒の理解が深まる．ここで，

$r_n=x_n-{a_n}^2,\ r_{n-1}=100\,r_n+x_{n-1}-(20a_n+a_{n-1})a_{n-1},\ \cdots$

のように定義していることに注意しておく．

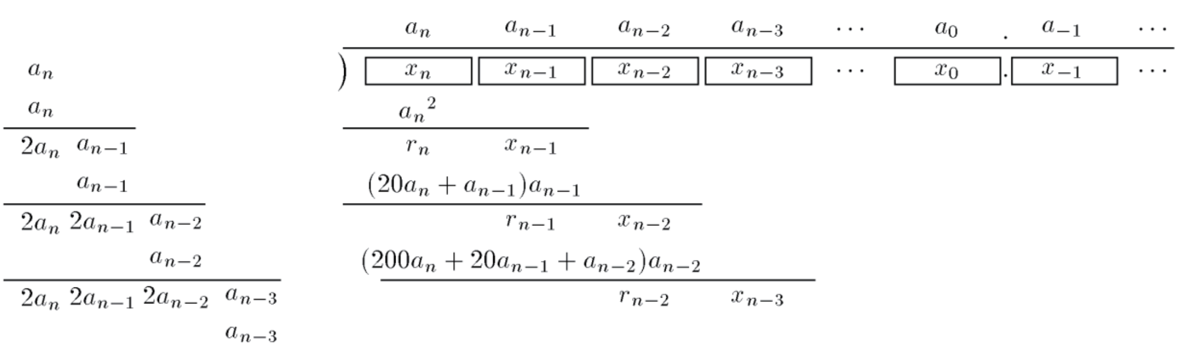


図３　開平法の証明における整理された計算

③ 高木の近似法

高木（2008）第十一章（四）において，開平法に関連する近似法が紹介されている．その内容の概要を述べる．

$a \geq 1$ のとき，a の整数部分を A として，$\sqrt{a}$ の近似値を求める．$a = A + \alpha \ (0 \leq \alpha < 1)$，

$\sqrt{a} = Q + x \ (Q:$ 整数$, 0 \leq x < 1)$ と表すとき，

$(\sqrt{a}$ の整数部分$) = Q = (\sqrt{A}$ の整数部分$)$ が容易に確かめられ，$R = a - Q^2 = 2Qx + x^2$ とおく．

$R = 0 \ (\Leftrightarrow x = 0)$ のとき，$\sqrt{a} = Q$ である．以下，

$R \neq 0 \ (\Leftrightarrow x \neq 0)$，i. e. $0 < x < 1$ とする．$0 < x^2 < x$ より，$R = 2Qx + x^2 > 2Qx$，

$R = 2Qx + x^2 < 2Qx + x = (2Q+1)x$ なので，

$\dfrac{R}{2Q+1} < x < \dfrac{R}{2Q}$ を得る．よって，$\sqrt{a}$ の小数部分 x の近似値が得られる．ここで，近似の精度は，

$$(x\text{の誤差}) < \frac{R}{2Q} - \frac{R}{2Q+1} = \frac{R}{2Q(2Q+1)} < \frac{R}{4Q^2}.$$

<u>例３</u>　$a = 20000$ のとき，高木の近似法を確認する．文字は上記の意味で用いる．

$a = 20000 + 0 \quad (A = 20000, \alpha = 0)$，

$\sqrt{a} = \sqrt{20000} = 141 + x \ (Q = 141, 0 \leq x < 1)$ とする．

$R = a - Q^2 = 20000 - 141^2 = 119 \neq 0 \ (\Leftrightarrow x \neq 0)$

$\dfrac{R}{2Q+1} < x < \dfrac{R}{2Q}$，すなわち，

$0.420\cdots = \dfrac{119}{283} < x < \dfrac{119}{282} = 0.421\cdots$ より $x = 0.42\cdots$

を得る．よって，$\sqrt{a} = \sqrt{20000} = 141 + x = 141.42\cdots$

である．近似の精度は，

$(x\text{の誤差}) < \dfrac{R}{4Q^2} = \dfrac{119}{4 \cdot 141^2} = 0.001496\cdots$ である．

このとき，$\sqrt{20000} = 141.42$ の両辺を 100 で割ることによって，$\sqrt{2} = 1.4142\cdots$ も得られる．

<u>発問</u>　$\sqrt{2}$ のよりよい近似を得るためにはどうすればよいか？

<u>例４</u>　$a = 200000000$ とすれば，$\sqrt{2}$ のより精度の高い近似が得られる．例３の結果より，

$\sqrt{a} = \sqrt{200000000} = 14142\cdots$ なので，整数部分 Q が容易に決定でき，$\sqrt{a} = 14142 + x \ (Q = 14142,$
$0 \leq x < 1)$ である．このとき，

$R = a - Q^2 = 200000000 - 14142^2 = 3836 \neq 0$

より，$\dfrac{R}{2Q+1} < x < \dfrac{R}{2Q} \Leftrightarrow$

$0.135619\cdots = \dfrac{3836}{28285} < x < \dfrac{3836}{28284} = 0.135624\cdots$

なので，$x = 0.1356\cdots$ から，

$\sqrt{a} = \sqrt{200000000} = 14142 + x = 141421356\cdots$

である．近似の精度は，次の通りである．

$(x\text{の誤差}) < \dfrac{R}{4Q^2} = \dfrac{3836}{4 \cdot 14142^2} = 0.00000479\cdots$

このとき，$\sqrt{2} = 1.41421356\cdots$ も得られる．さらに，$a = 2 \cdot 10^{16}$ として同様の作業をすれば，さらに $\sqrt{2}$ の近似の精度が高くなる．

④ 開平法と高木の近似法の比較

<u>開平法</u>

・1 回の計算で 1 桁ずつ精度が高くなる．
・主に使う演算は，「掛け算」，「引き算」である．

高木の近似法

・不等式による最後の評価において，例えば，例３で２桁，例４で３桁だけ精度が高くなっている．　つまり，１回の計算で複数桁向上する．
・主に使う演算は，「平方」，「引き算」，「割り算」である．「平方表」を利用しても，「割り算」の手間は残る．
・どの桁まで正しい値なのかすぐに分からない．

A1-4.3.　連分数

ユークリッドの互除法を利用した有理数の連分数表記を平方根の連分数表記に応用し，その近似値を扱う．連分数に関しては，岩堀（1983），木村（2012），高木（1971），フックス・タバチニコフ (2012) が詳しいが，ここでは詳細は省略する．

① 無理数作り

木村（2012）において，次の問１のような問題が扱われている．最大桁数が８桁の電卓を利用して，実際に授業をした様子を紹介する．

問１　次の「ある桁まで桁の数字の決まっている無限小数」になるような無理数を作れ．ただし，できる限り簡単な形になるよう工夫せよ．また，掛け算や割り算では必要に応じて電卓等を用いてもよい．

（1）$1.23606797\cdots$　　（2）$0.30277563\cdots$
（3）$1.19258240\cdots$　　（4）$4.12310565\cdots$
（5）$1.77245385\cdots$

解　（1）何人かの生徒からすぐに声が上がるが，最初に，$1.23606797+\dfrac{\sqrt{2}}{1000000000}$ も解であることをクラス全体で確認する．以下，より簡単な形の解を求めることを目標にする．$x=1.23606797\cdots$ とおく．電卓を利用しながら計算すると，

$$x \fallingdotseq 1+0.23606797=1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{0.23606797}}$$

$$\fallingdotseq 1+\frac{1}{4.2360681} \fallingdotseq 1+\frac{1}{x+3}$$

より，$x=1+\dfrac{1}{x+3}$ と予想できる．

$$x(x+3)=1(x+x)+1 \Leftrightarrow x^2+2x-4=0$$
$$\Leftrightarrow x=-1\pm\sqrt{5},$$

$x>0$ より，求める無理数は，$x=\sqrt{5}-1$ と予想される．$\sqrt{5}$ を開平法または高木の近似法または電卓で計算して，$\sqrt{5}-1=1.23606797\cdots$ を得る．ただし，電卓の桁数によっては工夫が必要になる．例えば，最大桁数が８桁の電卓の場合，

$-20+\sqrt{500}=2.3606797\cdots$ と計算すればよい．

(1) の別解　　$x=1.23606797\cdots$ とおく．

$$x \fallingdotseq 1+0.23606797=1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{0.23606797}}$$

$$\fallingdotseq 1+\frac{1}{4.2360681}=1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\cfrac{1}{0.2360681}}}$$

$$\fallingdotseq 1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4.2360657}} \fallingdotseq 1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\ddots}}}$$

より，$x=1+\dfrac{1}{3+x}$ と予想し，同様に計算して，

$x=\sqrt{5}-1$ を得る．(2)～(4) も同様に計算して，

(2) $\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}$　　(3) $\dfrac{\sqrt{29}-3}{2}$　　(4) $\sqrt{17}$

(5) $\sqrt{\pi}=\sqrt{3.14159265358\cdots}$ を開平法で計算すれば，求める数が得られる．円周率 π の近似値は，生徒の質問に応じて，提示するようにする．

② 連分数とユークリッドの互除法

正則連分数の定義，ユークリッドの互除法を扱う (詳細略)．以下，具体例のみ紹介する．

問２　(1) 1081と391について，ユークリッドの互除法により，最大公約数を求めよ．

(2) $\dfrac{1081}{391}$ を正則連分数で表せ．

解　(1) $1081 = 391 \cdot 2 + 299$, $391 = 299 \cdot 1 + 92$,

$299 = 92 \cdot 3 + 23$, $92 = 23 \cdot 4$ より，

$$\begin{aligned}\gcd(1081, 391) &= \gcd(391, 299) = \gcd(299, 92)\\ &= \gcd(92, 23) = 23\end{aligned}$$

(2) (1)の結果を利用して，

$$\frac{1081}{391} = \frac{47 \cdot 23}{17 \cdot 23} = \frac{47}{17} = 2 + \frac{13}{17} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{4}{13}}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4}}}$$

(2)の別解

ユークリッドの互除法の計算をそのまま利用して，

$$\frac{1081}{391} = 2 + \frac{299}{391} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{391}{299}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{92}{299}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{299}{92}}}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{299}{92}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{23}{92}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4}}}$$

を得る．計算しているうちに気付く生徒も多いが，ユークリッドの互除法と正則連分数の自然な対応をクラス全体で確認しておく．

③ 連分数による平方根の近似値

問３　$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}$ に対して，$\alpha_1 = 1$,

$\alpha_1 = 1 + \dfrac{1}{2}$，$\alpha_2 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}$，$\alpha_3 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}, \cdots$ と

おいて，α_n を $\sqrt{2}$ の n 次近似分数とよぶ.

(1) $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_6$ の値をそれぞれ分数表記と十進数表記で表せ.

(2) $\sqrt{2}, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots$ の大小関係を調べよ.

解　(1) $\alpha_0 = 1 = \dfrac{1}{1}$，$\alpha_1 = \dfrac{3}{2} = 1.5$，$\alpha_2 = \dfrac{7}{5} = 1.4$,

$\alpha_3 = \dfrac{17}{12} = 1.4166\cdots$，$\alpha_4 = \dfrac{41}{29} = 1.41379\cdots$,

$\alpha_5 = \dfrac{99}{70} = 1.414285\cdots$，$\alpha_6 = \dfrac{239}{169} = 1.41420118\cdots$

(2) $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}}$ より，分数の形から，

$$\alpha_0 < \alpha_2 < \alpha_4 < \alpha_6 < \cdots < \sqrt{2} < \cdots < \alpha_5 < \alpha_3 < \alpha_1 .$$

無限に続く形なので，多少難しい面もあるが，真の値 $\sqrt{2} = 1.41421356\cdots$ と(1)の結果から, 大小を繰り返しながら近付くことが予想できる．数列を学んでいる場合は，フィボナッチ数列も扱い，より近似の精度を高める活動もできる.

A1-4.4.　ヘロンの近似式

ファン・デル・ヴェルデン（2006）によると，ヘロンは，3 辺 7, 8, 9 の三角形の面積 $\sqrt{720}$ に

$$\sqrt{a^2 \pm b} \fallingdotseq a \pm \frac{b}{2a}$$ （以下，ヘロンの近似式とよぶ）

を適用して，近似値を求めた．歴史的な話題を取り入れ, さらに, より正確な近似値を求める方法を考える．また, 誤差を考えて, さらに精度を上げる方法も扱う.

① ヘロンの近似式の意味と利用

ヘロンの近似式の意味を正確に述べておく.

$0 < b \leq a$ のとき，次の近似が成立する：

$$\sqrt{a^2 + b} \fallingdotseq a + \frac{b}{2a} \quad \cdots(*),$$

$$\sqrt{a^2 - b} \fallingdotseq a - \frac{b}{2a} \quad (\text{ただし，} a^2 > b \text{のときに限る}).$$

ここで，どちらの式も(左辺) < (右辺) をみたす.

例５　例えば，次のような近似が得られる.

$$\sqrt{720}=\sqrt{26^2+44}\fallingdotseq 26+\frac{44}{2\cdot 26}=26+\frac{11}{13}$$
$$=26.846153\cdots$$

$$\sqrt{720}=\sqrt{27^2-9}\fallingdotseq 27-\frac{9}{2\cdot 27}=26+\frac{5}{6}$$
$$=26.833333\cdots$$

$$\sqrt{720}=\sqrt{26.8^2+1.76}\fallingdotseq 26.8+\frac{1.76}{2\times 26.8}$$
$$=26.8+\frac{11}{335}=26.832835\cdots$$

開平法または電卓で真の値$\sqrt{720}=26.832815\cdots$を

確認すると，$\sqrt{a^2\pm b}$ でaを真の値に近づけるとbの値が小さくなり，精度が上がっていることが分かる．このような振り返りの活動は，生徒の理解を深める．

例6　近似を繰り返し適用して，精度を上げる．

$$\sqrt{2}=\sqrt{1^2+1}\fallingdotseq 1+\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{3}{2}=1.5$$

$$\sqrt{2}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\fallingdotseq \frac{3}{2}-\frac{1}{4}\Big/\left(2\cdot\frac{3}{2}\right)=\frac{17}{12}=1.4166666\cdots$$

$$\sqrt{2}=\sqrt{\left(\frac{17}{12}\right)^2-\frac{1}{144}}\fallingdotseq \frac{17}{12}-\frac{1}{144}\Big/\left(2\cdot\frac{17}{12}\right)$$
$$=\frac{577}{408}=1.4142156\cdots$$

このとき，初期値$a=1$は他の値でも構わない．

また，ある程度，近似値が分かっているとき，さらに精度を上げてみる．

$$\sqrt{2}=\sqrt{1.41421356^2+0.000000006712126}$$
$$\fallingdotseq 1.41421356+\frac{0.000000006712126}{2\times 1.41421356}$$
$$=1.41421356237309\cdots$$

このとき，237309 は正しい値であり，6桁だけ精度が上がっている．当然，同様の作業を繰り返して，さらに精度を上げることも可能である．

② 近似の誤差

(*)における誤差を$e=a+\dfrac{b}{2a}-\sqrt{a^2+b}\ (>0)$ とおくと，$0<b\leq a$より，次の不等式を得る．これらは，授業で生徒から挙がったものである．

A)　$e^2=\dfrac{b^2}{4a^2}-2\left(a+\dfrac{b}{2a}\right)\sqrt{a^2+b}<\dfrac{b^2}{4a^2}\leq\dfrac{1}{4}$　より，

$e<\dfrac{1}{2}$

B)　$e^2=2\left(a^2+b+\dfrac{b^2}{8a^2}\right)-2\left(a+\dfrac{b}{2a}\right)\sqrt{a^2+b}$

$<2\left(a^2+b+\dfrac{b^2}{8a^2}\right)-2\left(a+\dfrac{b}{2a}\right)a=b\left(1+\dfrac{1}{4a^2}\right)$

より，$e<\sqrt{b\left(1+\dfrac{1}{4a^2}\right)}$

C)　$e^2<2\left(a^2+b+\dfrac{b^2}{8a^2}\right)=2\left(a+\dfrac{b}{2a}\right)^2$　より，

$e<\sqrt{2}\left(a+\dfrac{b}{2a}\right)$

D)　$e=a+\dfrac{b}{2a}-\sqrt{a^2+b}<a+\dfrac{b}{2a}-a=\dfrac{b}{2a}$

aの値を大きく変えず，bの値を小さくするときの近似の精度は次のように評価できる．

A) 悪い　B) よい　C) 悪い　D) よい

精度が悪く，あまり役に立たない近似もあるが，生徒自ら作った式なので，互いに式の価値を調べ，興味を持って取り組んでいた．不等式の式変形の結果は一意にはならないので，そのような意識付けとしても，価値のある取り組みである．

A1-4.5.　ニュートン法

微分を用いずに放物線の接線を求める．ニュートン法による平方根の近似を扱い，ヘロンの近似式との関連を調べる．

① 放物線の接線

放物線の接線については，放物線と1点で交わり，y軸と平行でない直線と定義すると，微分を使わなくても扱える．

放物線$y=x^2-2$上の点$\mathrm{P}(p,\ p^2-2)$における接線

l_p は，図４のように考えれば，

$y = x^2 - 2 - (x-p)^2 = 2px - (p^2+2)$　である．

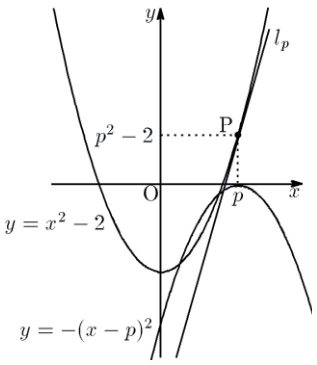


図４　放物線の接線

② ニュートン法

問４　$f(x) = x^2 - 2$ とおいて，放物線 $y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}_n(x_n, f(x_n))$ における接線 l_n が x 軸と交わる点の x 座標を x_{n+1} とする．このようにして，x_1 から順に $x_2, x_3, \cdots$ を作る．ただし，$x_1 \neq 0, \pm\sqrt{2}$ とする．

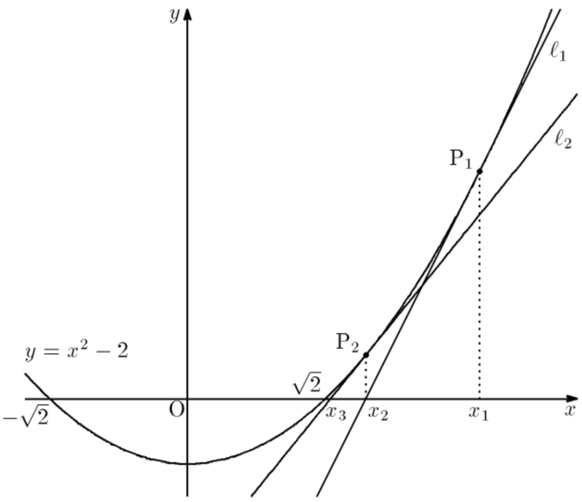


図５　ニュートン法

(1)　x_2 を x_1 の式で表せ．

(2)　x_{n+1} を x_n の式で表せ．

(3)　$x_1 = 2$ のとき，x_2, x_3, x_4 を分数で表せ．x_n は何を表すか．

(4)　この近似法とヘロンの近似式の関連について述べよ．

解　(1)　$l_1 : y = 2x_1 x - ({x_1}^2 + 2)$　より，$y = 0$ のとき，

$x = x_2$ なので，$x_2 = \dfrac{{x_1}^2 + 2}{2x_1} = \dfrac{1}{2}\left(x_1 + \dfrac{1}{x_1}\right)$

(2)　同様に，$x_{n+1} = \dfrac{{x_n}^2 + 2}{2x_n} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{1}{x_n}\right)$

(3)　$x_2 = \dfrac{1}{2}\left(2 + \dfrac{2}{2}\right) = \dfrac{3}{2}$，$x_2 = \dfrac{17}{12}$，$x_3 = \dfrac{577}{408}$

また，図５より，x_n は $\sqrt{2}$ の近似値である．

(4)　初期値 x_1 に対して，

$$\sqrt{2} = \sqrt{{x_1}^2 + (2 - {x_1}^2)} \fallingdotseq x_1 + \frac{2 - {x_1}^2}{2x_1} = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{2}{x_1}\right)$$

より，$x_2 = \dfrac{1}{2}\left(x_1 + \dfrac{2}{x_1}\right)$　とおき，さらに，同様に，

$$\sqrt{2} = \sqrt{{x_2}^2 + (2 - {x_2}^2)} \fallingdotseq \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{2}{x_2}\right) = x_3, \cdots,$$

$$\sqrt{2} = \sqrt{{x_n}^2 + (2 - {x_n}^2)} \fallingdotseq \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) = x_{n+1}$$

により，x_3，x_4，$\cdots$，x_{n+1} を定める．これは，(2)で得たニュートン法の近似と全く同じ式なので，本質的には同じ近似であるとみなせる．

A1-4.6.　まとめ

平方根の近似値について，様々な近似法「開平法」，「高木の近似法」，「連分数による近似」，「ヘロンの近似式」，「ニュートン法」の特徴や関連を比べることにより，特に二次方程式，二次不等式の有用性を実感すると共に，生徒の興味を引き出すことができた．特に，誤差を考慮した平方根の近似値のみに焦点を当て，1

学期のすべての授業で授業実践した試みは，それだけで価値があると言えるだろう．また，課題学習教材として利用することもできる．これらの内容を学んだ生徒が，今後，データの分析の学習などで平方根の近似値をどのように生かしていくかを，パソコン（表計算ソフト，数式処理システム等）の利用，電卓の利用との対比でさらに調査していきたい．

引用・参考文献

[1] 岩堀長慶（1983）「2 次行列の世界」岩波書店.

[2] 木村俊一（2012）「連分数のふしぎ」講談社.

[3] 高木貞治（1971）「初等整数論講義 第 2 版」岩波書店.

[4] 高木貞治（2008）「新式算術講義」筑摩書房.

[5] ファン・デル・ヴェルデン（訳：加藤文元，鈴木亮太郎）（2006）「古代文明の数学」日本評論社.

[6] D.フックス, S.タバチニコフ（訳:蟹江幸博）（2012）「ラマヌジャンの遺した関数」岩波書店.

[7] 文部科学省（2009）「高等学校 学習指導要領解説 理科編 理数編」実教出版.

（2014 須田）