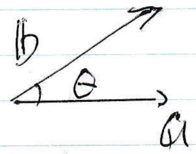
No. 1

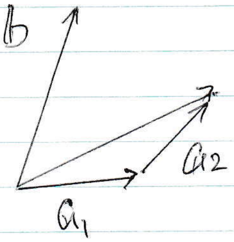
Date '15. 6. 11

微積分演習 第9回

ベクトルの内積
(スカラー積)



幾何学的定義 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$



$$\begin{cases} (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}_2\cdot\mathbf{b} \\ (\alpha\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) \end{cases}$$

二重線形

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_1 = 0 \\ \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2 = 1 \end{aligned}}$$

直交

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$$

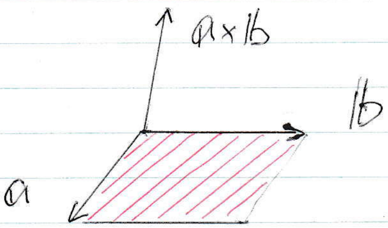
$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2$$ とする.

$$\begin{aligned} \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2)\cdot(b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2) \\ &= a_1b_1\underbrace{\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1}_{1} + a_1b_2\underbrace{\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2}_{0} \\ &\quad + a_2b_1\underbrace{\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_1}_{0} + a_2b_2\underbrace{\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2}_{1} \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 \end{aligned}$$

解析的定義 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$

外積（ベクトル積）

$a, b \in \mathbb{R}^3$



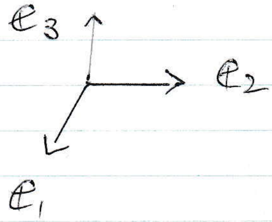
$a \times b$ はベクトル。
大きさは a, b が張る平行四辺形の面積。
向きは $a, b, a \times b$ が右手系になる向き。

これは ~~幾~~何学的定義

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$ のとき……

解析的定義

二重線形性
$a \times b = -b \times a$ が成り立つ
ここで、$a = b$ のとき、
$$a \times a = -a \times a$$
$$2\, a \times a = 0$$
$$a \times a = 0$$ である。



$$e_1 \times e_1 = e_2 \times e_2 = e_3 \times e_3 = 0$$

$$e_1 \times e_2 = e_3 = -e_2 \times e_1$$
$$e_2 \times e_3 = e_1 = -e_3 \times e_2$$
$$e_3 \times e_1 = e_2 = -e_1 \times e_3$$

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$$

$$\mathbb{a} \times \mathbb{b} = (a_1\mathbb{e}_1 + a_2\mathbb{e}_2 + a_3\mathbb{e}_3) \times (b_1\mathbb{e}_1 + b_2\mathbb{e}_2 + b_3\mathbb{e}_3)$$

$$= \cancel{a_1b_1\,\mathbb{e}_1\times\mathbb{e}_1} + a_1b_2\,\mathbb{e}_1\times\mathbb{e}_2 + a_1b_3\,\mathbb{e}_1\times\mathbb{e}_3$$

$$+ a_2b_1\,\mathbb{e}_2\times\mathbb{e}_1 + \cancel{a_2b_2\,\mathbb{e}_2\times\mathbb{e}_2} + a_2b_3\,\mathbb{e}_2\times\mathbb{e}_3$$

$$+ a_3b_1\,\mathbb{e}_3\times\mathbb{e}_1 + a_3b_2\,\mathbb{e}_3\times\mathbb{e}_2 + \cancel{a_3b_3\,\mathbb{e}_3\times\mathbb{e}_3}$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbb{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbb{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbb{e}_3$$

$$= \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

・覚え方

z成分 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ x成分　　$\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$ y成分

練習

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-40 \\ -35-2 \\ 8+21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -34 \\ -37 \\ 29 \end{pmatrix}$$

練習

$\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c} \in \mathbb{R}^3$

$(\mathbb{a}\times\mathbb{b})\times\mathbb{c} = (\mathbb{a}\cdot\mathbb{c})\mathbb{b} - (\mathbb{b}\cdot\mathbb{c})\mathbb{a}$ を証明せよ.

<u>証明</u>

$\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\mathbb{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ とする.

$$
\text{左辺} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} (a_3b_1 - a_1b_3)c_3 - (a_1b_2 - a_2b_1)c_2 \\ (a_1b_2 - a_2b_1)c_1 - (a_2b_3 - a_3b_2)c_3 \\ (a_2b_3 - a_3b_2)c_2 - (a_3b_1 - a_1b_3)c_1 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} a_3b_1c_3 - a_1b_3c_3 - a_1b_2c_2 + a_2b_1c_2 \\ a_1b_2c_1 - a_2b_1c_1 - a_2b_3c_3 + a_3b_2c_3 \\ a_2b_3c_2 - a_3b_2c_2 - a_3b_1c_1 + a_1b_3c_1 \end{pmatrix}
$$

$$
\text{右辺} = (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_1 \\ (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_2 \\ (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)a_1 \\ (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)a_2 \\ (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)a_3 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} a_2b_1c_2 + a_3b_1c_3 - a_1b_2c_2 - a_1b_3c_3 \\ a_1b_2c_1 + a_3b_2c_3 - a_2b_1c_1 - a_2b_3c_3 \\ a_1b_3c_1 + a_2b_3c_2 - a_3b_1c_1 - a_3b_2c_2 \end{pmatrix}
$$

高階の微分
$\longrightarrow$ 多重線形写像
(代数)

2重線形

$f(x, y)$ を

1回微分すると $f'(x, y)$ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 線形写像

もう1回微分すると $f''(x, y)$ $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 2重線形

$a, b \in \mathbb{R}^2$ 内積は2重線形

正値性 $a \cdot a \geq 0$
対称性 $a \cdot b = b \cdot a$

4つの数

二重線形であれば $(p_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$ を使って

$$\varphi(a, b) = \sum_{1 \leq i, j \leq 2} p_{ij} a_i b_j$$

$$= p_{11} a_1 b_1 + p_{12} a_1 b_2 + p_{21} a_2 b_1 + p_{22} a_2 b_2$$

対称であるための条件 $p_{12} = p_{21}$

内積の場合には $p_{11} = p_{22} = 1$
$p_{12} = p_{21} = 0$

今、対称な二重線形写像があったとすると、
正値性が成り立つのはどういうときだろうか？

$$\varphi(a, a) = p_{11} a_1^2 + p_{22} a_2^2 + 2 p_{12} a_1 a_2 \geq 0$$

$a_2 \neq 0$ なら a_2^2 でわって

$$p_{11} \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 + 2 p_{12} \left(\frac{a_1}{a_2}\right) + p_{22} \geq 0$$

x で置き直すと

$$p_{11} x^2 + 2 p_{12} x + p_{22} \geq 0$$

そのためには

$$\boxed{\begin{aligned} & p_{11} \geq 0 \\ & p_{12}^2 - p_{11} p_{22} \leq 0 \end{aligned}}$$

極値を調べるときには $f'(x)$ を計算するが、
$f'(x)=0$ だからといって必ずしも極値でない。

$$\left(\begin{array}{l} \text{例：} f(x)=x^3 \\ \quad\;\; f'(x)=3x^2 \end{array}\right)$$

十分条件
二階の導関数について正値性をみたすかどうかが大事になってくる。