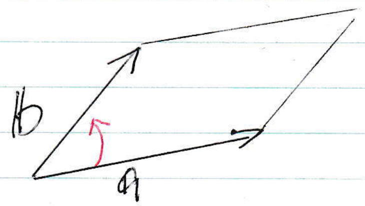
微積分演習第8回

高階の微分
（多重線形代数が必要）

2×2行列の行列式
$a, b \in \mathbb{R}^2$　$|a\ b|$ …… aとbの張る平行四辺形の符号のついた面積



aからbへ
反時計回りのとき　＋
時計回りのとき　－

性質として、次がある。
$\alpha \in \mathbb{R}$

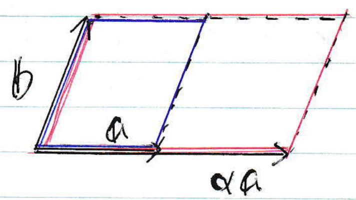
$$|\alpha a\ b| = \alpha |a\ b|$$

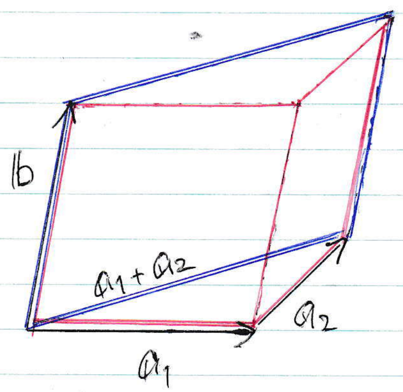
$$|a_1 + a_2\ b| = |a_1\ b| + |a_2\ b|$$

$$|a\ b_1 + b_2| = |a\ b_1| + |a\ b_2|$$

二重線形

図をかくと、





$$|a\ b| = -|b\ a|$$

特に $a = b$ ならば　$|a\ a| = -|a\ a|$

$$2|a\ a| = 0$$

$$|a\ a| = 0$$

標準基底 $\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2$ に対して

$$|\mathbb{e}_1\ \mathbb{e}_1| = 0, \quad |\mathbb{e}_2\ \mathbb{e}_2| = 0$$
$$|\mathbb{e}_1\ \mathbb{e}_2| = 1, \quad |\mathbb{e}_2\ \mathbb{e}_1| = -1$$ である.

$$\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1\mathbb{e}_1 + a_2\mathbb{e}_2$$
$$\mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = b_1\mathbb{e}_1 + b_2\mathbb{e}_2$$ だから.

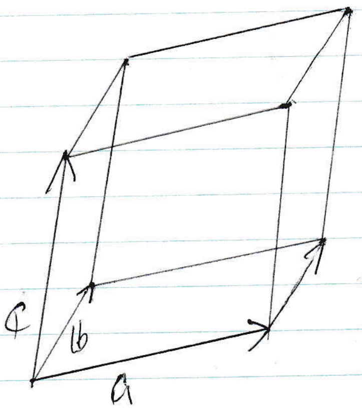
$$\begin{aligned} |\mathbb{a}\ \mathbb{b}| &= |a_1\mathbb{e}_1 + a_2\mathbb{e}_2 \quad b_1\mathbb{e}_1 + b_2\mathbb{e}_2| \\ &= a_1b_1\underbrace{|\mathbb{e}_1\ \mathbb{e}_1|}_{0} + a_1b_2\underbrace{|\mathbb{e}_1\ \mathbb{e}_2|}_{1} \\ &\quad + a_2b_1\underbrace{|\mathbb{e}_2\ \mathbb{e}_1|}_{-1} + a_2b_2\underbrace{|\mathbb{e}_2\ \mathbb{e}_2|}_{0} \\ &= a_1b_2 - a_2b_1 \end{aligned}$$

二重線形性

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$ 2次の行列の行列式

今度は 3×3 行列の行列式

$\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c} \in \mathbb{R}^3$ $\quad |\mathbb{a}\ \mathbb{b}\ \mathbb{c}|$ …… $\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}$ で張られる平行六面体の符号のついた体積.



$\mathbb{a}$ から $\mathbb{b}$ へまわって, 右ねじが進む方向が $\mathbb{c}$ の場合 $+$
逆の場合 $-$

あるいは $\mathbb{a}$ 親指, $\mathbb{b}$ 人差指 $\mathbb{c}$ 中指と対応させて
右手系 $+$
左手系 $-$

次が成り立つ

$$|\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}| = |\mathbf{a}_1\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}| + |\mathbf{a}_2\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}|$$

$\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ についても同様

$$|\alpha\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}| = \alpha|\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}|$$

三重線形

$\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ についても同様

$$|\mathbf{a}\ \mathbf{a}\ \mathbf{c}| = 0$$ （体積は 0）

$$|\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}| = -|\mathbf{b}\ \mathbf{a}\ \mathbf{c}|$$

どこか2つを入れかえると －（交代性）

標準基底 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ に対して

$$|\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3| = 1$$
$$|\mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3\ \mathbf{e}_1| = 1$$
$$|\mathbf{e}_3\ \mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2| = 1$$

$|\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_3|$ のように
どこか2つが同じなら 0

$$|\mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_3| = -1$$
$$|\mathbf{e}_3\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_1| = -1$$
$$|\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_3\ \mathbf{e}_2| = -1$$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3$$ だから

$$|\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}| = |a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3\ \ b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3\ \ c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3|$$

$$\begin{aligned} &= a_1b_2c_3\underbrace{|\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3|}_{1} + a_1b_3c_2\underbrace{|\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_3\ \mathbf{e}_2|}_{-1} \\ &\quad + a_2b_1c_3|\mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_3| + a_2b_3c_1|\mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3\ \mathbf{e}_1| \\ &\quad + a_3b_1c_2|\mathbf{e}_3\ \mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2| + a_3b_2c_1|\mathbf{e}_3\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_1| \end{aligned}$$

三重線形性

No. 4

Date

$$= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_1c_2$$

$3\times3\times3=27$ 個 項が出るが
e_1, e_2, e_3 の順列の形の項しか
残らない,

行列式の覚え方

2×2

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \quad - \quad +$$

3×3

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad + \quad -$$

Sarrus の方法
サラス

練習

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 0+6-18-0-8-(-12)$$
$$= -8$$

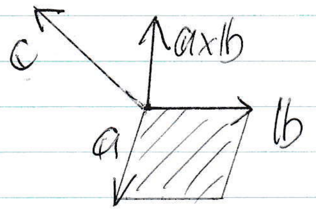
宿題

I (1) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 15 & 23 & 9 \\ 9 & 18 & 12 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 11 & 8 & 16 \\ -17 & 3 & -9 \end{vmatrix}$

II A, B 3×3 行列
$|AB| = |A|\,|B|$ を証明せよ

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ として計算する

空間のベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$
外積（ベクトル積）$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$



$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}\times\mathbf{b}$ が右手系となるように．
垂直，大きさ＝面積

平行六面体の体積は．
底面積×高さ

$$|\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}| = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}$$

$$(\alpha\mathbf{a})\times\mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$$

$$\boxed{(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2)\times\mathbf{b} = \mathbf{a}_1\times\mathbf{b} + \mathbf{a}_2\times\mathbf{b}}$$

証明
もし成り立ったら

$$((\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2)\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = (\mathbf{a}_1\times\mathbf{b}+\mathbf{a}_2\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$$

任意

$$|\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}| = |\mathbf{a}_1\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}| + |\mathbf{a}_2\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}|$$

$$= (\mathbf{a}_1\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} + (\mathbf{a}_2\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$$

つまり，左辺 $\mathbf{x}$，右辺 $\mathbf{y}$ とすると．

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{y}\cdot\mathbf{c} \quad (\mathbf{c}\text{は任意})$$
$$(\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot\mathbf{c} = 0$$

$\mathbf{c} = \mathbf{x}-\mathbf{y}$ とすると

$$(\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = 0$$
$$|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2 = 0$$
$$\mathbf{x} = \mathbf{y}$$