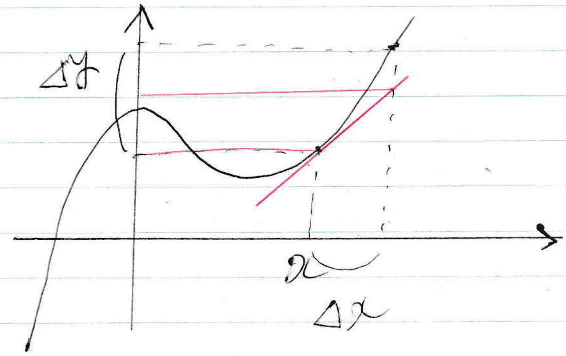
微積分演習 第7回

合成関数の微分

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \in \mathbb{R}$ で微分すると… $f'(x)$ 比例関数が出てくる



$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$

$\Delta x \mapsto \Delta y$ は複雑

接線に移ると

$\Delta y = a \Delta x$ 比例

a: $f'(x)$

- 比例関数 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $\underbrace{\text{比例定数}}$ で決まる
  └ 微分係数

- 比例関数は線形関数

すなわち

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) \\ f(\alpha x) = \alpha f(x) \end{cases} \quad (x, y, \alpha \in \mathbb{R})$$

をみたす

1変数の微分（高校） ⟶ 1変数の線形関数

多変数の微分（大学） ⟶ 多変数の線形関数

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$　(n, m は自然数)

$x \in \mathbb{R}^n$ で微分すると

$f'(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 線形写像が出てくる

すなわち $\begin{cases} f'(x+y) = f'(x) + f'(y) \\ f'(\alpha x) = \alpha f'(x) \end{cases}$ $\begin{pmatrix} x, y \in \mathbb{R}^n \\ \alpha \in \mathbb{R} \end{pmatrix}$

をみたす。

比例関数は比例定数で表されるが、

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の線形写像は $m \times n$ 個の実数で表される

$$\text{行列} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

流れを見ると…

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ のとき、

関数

$$y_1 = y_1(x_1, \cdots, x_n)$$
$$y_2 = y_2(x_1, \cdots, x_n)$$
$$\vdots$$
$$y_m = y_m(x_1, \cdots, x_n)$$

行列は

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

● $m=n=1$ のとき
1×1 の行列 (a) が出てくる
$$(a)+(b)=(a+b)$$
$$\alpha(a)=(\alpha a)$$
$$(b)(a)=(ba)$$

● $n=1,\ m=2$ のとき
$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ 平面上の運動
$t \longmapsto (x, y)$
時刻
$$x=x(t)$$
$$y=y(t)$$
$$t \longmapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}(t)$$
2×1 の行列

● $n=1,\ m=3$ のとき
$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ 空間の運動
$t \longmapsto (x, y, z)$
時刻
$$x=x(t)$$
$$y=y(t)$$
$$z=z(t)$$
$$t \longmapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}(t)$$
3×1 の行列

No. 4

Date . .

合成関数の微分

高校では $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ と習った.

$f'(x)$ は比例関数
$g'(f(x))$ は比例関数
2つの比例関数の合成 ⟶ 再び比例関数

比例定数 $a, b \longrightarrow ab$

今度は $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ とする.

$(g \circ f)'(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ 線形関数が出てくる

$f'(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 線形関数
$g'(f(x)): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ 線形関数

合成 $g'(f(x)) \circ f'(x)$
$B \quad A$ 行列の積

問題 $z = x^2 + 2xy^2 + 3y$

$$\begin{cases} x = t^2 - t + 2 \\ y = 2t + 1 \end{cases}$$

$\dfrac{dz}{dt}$ を求める

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto z$$

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t-1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{dz}{dx} & \frac{dz}{dy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+2y^2 & 4xy+3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dt}}$$

$$= (2x+2y^2)(2t-1) + 2(4xy+3)$$

問題 $z = \sin xy$
$x = t + e^t$
$y = te^{-t}$ $\qquad \frac{dz}{dt}$ を求める.

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+e^t \\ e^{-t} - te^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{dz}{dx} & \frac{dz}{dy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y\cos xy & x\cos xy \end{pmatrix}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dt}$$

$$= y\cos xy(1+e^t) + x\cos xy(e^{-t} - te^{-t})$$

問題 $z = 3x^2 - y^2$
$x = 2\cos t$
$y = \sin t$ $\qquad \frac{dz}{dt}$ を求める

No. 6

Date . .

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{dz}{dx} & \frac{dz}{dy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -2y \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{dz}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dt} \\ &= 6x(-2\sin t) + (-2y)\cos t \\ &= -12x\sin t - 2y\cos t \end{aligned}$$

$u = f(x, y, z)$ のとき

$x = x(t)$
$y = y(t)$
$z = z(t)$

$\frac{du}{dt}$ を求める

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & u \end{array}$$

1×3 行列

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix}$$

3×1 行列

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

練習

$u = e^x(y - z)$

$x = t + 1$
$y = t^2 + 2$
$z = t^3 - 3t$

$\frac{du}{dt}$ を求めよ.