No. 1
Date '15. 5. 21

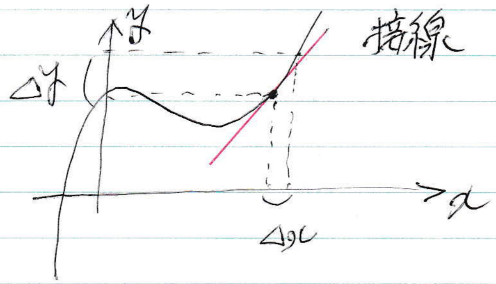
微積分 演習 第6回

微分

曲がっているのはイヤ

⇓

まっすぐなもので置きかえよう



$\Delta x \longmapsto \Delta y$ 複雑な関数

接線のほうでは

$\Delta y = a \Delta x$ 比例関数（小学校）

比例定数

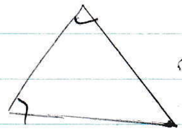
$a = f'(x)$

微分して出てくるのは比例関数
比例定数で特徴づけられる

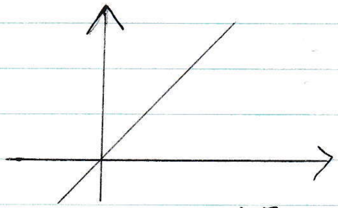
三角形の合同のときは

- 二辺夾角
- 二角夾辺
- 三辺

で特徴づけ



まっすぐなものを扱う代数
線形代数



グラフを描くと
原点を通る直線

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(x, y, \alpha \in \mathbb{R})$ のとき

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) \\ f(\alpha x) = \alpha f(x) \end{cases}$$

が成り立つとき線形関数

Date . .

$$f(x) = f(1x) = x\underbrace{f(1)}_{a}$$ (比例)

比例関数 $\xleftrightarrow{\text{対応}}$ 比例定数

$f(x) = ax \longleftrightarrow a$

比例関数全体
線形空間

$f + g \longleftrightarrow a + b$
$\alpha f \longleftrightarrow \alpha a$

$f \longleftrightarrow a$
$g \longleftrightarrow b$

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad (x, y \in \mathbb{R}^n \quad \alpha \in \mathbb{R})$

線形関数

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) \\ f(\alpha x) = \alpha f(x) \end{cases}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$$ なので

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) \\ &= f(x_1 e_1) + \cdots + f(x_n e_n) \\ &= x_1 f(e_1) + \cdots + x_n f(e_n) \end{aligned}$$

$$f(e_1) = a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

$$f(e_2) = a_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$f(e_n) = a_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$ とおく

$[a_1 \cdots a_n]$ 並べる

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = A$$ $m \times n$ の行列

線形関数 $m \times n$ 行列

$f \longleftrightarrow A$

$g \longleftrightarrow B$

$f + g \longleftrightarrow A + B$ 成分ごとに足し算

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

$n = m = 1$ のとき $[a]$ 1×1 行列

数として見る

$n = m = 2$ のとき

$$\begin{aligned}(f+g)x &= f(x) + g(x) \\ &= Ax + Bx \\ &= (A+B)x\end{aligned}$$

丁寧に書くと

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \longleftrightarrow f$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{21} \end{pmatrix} \longleftrightarrow g$$

$$\begin{aligned} f(x) &= Ax \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$g(x) = Bx$$
$$= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

$$(f+g)(x) \underset{\text{定義}}{=} f(x) + g(x)$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_{11}x_1 + b_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_{21}x_1 + b_{22}x_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (a_{11}+b_{11})x_1 + (a_{12}+b_{12})x_2 \\ (a_{21}+b_{21})x_1 + (a_{22}+b_{22})x_2 \end{pmatrix}$$
$$= (A+B)x$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$
$$= \alpha \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \alpha a_{11}x_1 + \alpha a_{12}x_2 \\ \alpha a_{21}x_1 + \alpha a_{22}x_2 \end{pmatrix}$$
$$= (\alpha A)x$$

$$\alpha f \longleftrightarrow \alpha A$$

線形 $f \longleftrightarrow A$ 2×2
線形 $g \longleftrightarrow B$ とする

合成 $g\circ f$ は 線形関数

$$(g\circ f)(x+y) = g(f(x+y))$$
$$= g(f(x)+f(y))$$
$$= g(f(x)) + g(f(y))$$
$$= (g\circ f)(x) + (g\circ f)(y)$$

$$(g\circ f)(\alpha x) = g(f(\alpha x))$$
$$= g(\alpha f(x))$$
$$= \alpha\, g(f(x))$$
$$= \alpha (g\circ f)(x)$$

$g\circ f \longleftrightarrow$ 行列の積

$$(g\circ f)(x) = g(f(x))$$
$$= g\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} b_{11}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + b_{12}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2) \\ b_{21}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + b_{22}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \underbrace{(b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21})}_{1,1\text{成分}}x_1 + (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22})x_2 \\ (b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21})x_1 + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22})x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

No. 6

Date

(注) 一般に 行列の積 $AB \neq BA$

宿題 計算せよ

$$\begin{pmatrix} 250 & 150 \\ 120 & 90 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

(x_1, x_2) で微分すると

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 線形関数が出てくる

2×2 行列で表される

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

合成関数の微分は

$$(g \circ f)' = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y_1}(f(x)) & \dfrac{\partial g_1}{\partial y_2}(f(x)) \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial y_1}(f(x)) & \dfrac{\partial g_2}{\partial y_2}(f(x)) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix}$$