No. 1

Date '15・5・14

微積分演習第5回

宿題の答え合わせ

$$\ddot{x} = -k\dot{x} - g \quad を解く$$

$$x = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots\cdots \quad とおく$$

$$\dot{x} = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \cdots\cdots$$

$$\ddot{x} = 2a_2 + 3\cdot 2a_3 t + 4\cdot 3a_4 t^2 + \cdots\cdots$$

また、

$$-g - k\dot{x} = -g - ka_1 - 2ka_2 t - 3ka_3 t^2 - \cdots\cdots$$

よって

$$\begin{cases} 2a_2 = -g - ka_1 \\ 3\cdot 2a_3 = -2ka_2 \\ 4\cdot 3a_4 = -3ka_3 \\ \quad\vdots \end{cases}$$

$$a_2 = -\frac{g+ka_1}{2}$$

$$a_3 = -\frac{2k}{3\cdot 2}a_2 = \frac{k(g+ka_1)}{3!}$$

$$a_4 = -\frac{3k}{4\cdot 3}a_3 = -\frac{k^2(g+ka_1)}{4!}$$

$$\vdots$$

$$a_n = -\frac{g+ka_1}{k^2}\cdot\frac{(-k)^n}{n!}$$

$$A = -\frac{g+ka_1}{k^2} \quad とおく.$$

$$x = a_0 + a_1 t + A\frac{(-k)^2}{2}t^2 + A\frac{(-k)^3}{3!}t^3 + \cdots\cdots$$

$$= a_0 + a_1 t - A - A(-k)t + A + A(-k)t + A\frac{(-k)^2}{2}t^2 + A\frac{(-k)^3}{3!}t^3 + \cdots\cdots$$

$$= a_0 - A + (a_1 + Ak)t + Ae^{-kt}$$

偏微分

多変数の微積分

$f(x, y)$ 2変数 (x_0, y_0)で微分

・x方向の微分（y: 固定）

$x \longmapsto f(x, y_0)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ と書く

・y方向の微分（x: 固定）

$y \longmapsto f(x_0, y)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ と書く

例 $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + 3x$$

例 $f(x, y) = \sin(x^2 + y^3)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\cos(x^2 + y^3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2\cos(x^2 + y^3)$$

例 $f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(x+y) - (x-y)}{(x+y)^2} = \frac{2y}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-(x+y) - (x-y)}{(x+y)^2} = -\frac{2x}{(x+y)^2}$$

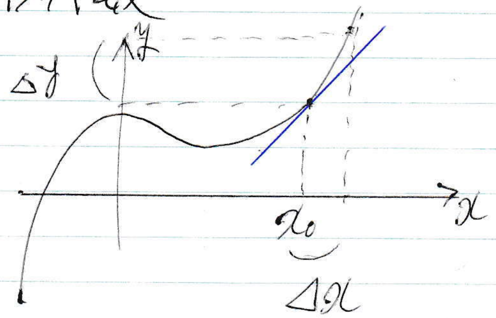
No. 3

Date . .

宿題 I 偏微分を求めよ

(1) $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$ (2) $f(x, y) = \sin xy^2$

線形代数



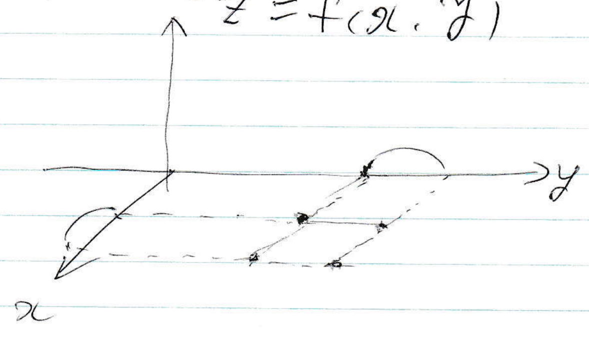
$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ 複雑な関数

$\Delta x \longmapsto \Delta y$

接線のほうでは $\Delta y = f'(x_0)\Delta x$ 比例

曲がっているのはイヤ $\longrightarrow$ まっすぐなものでおきかえる

2変数 $z = f(x, y)$



$(\Delta x, \Delta y) \longmapsto \Delta z$

複雑

平面では

$\Delta z = a\Delta x + b\Delta y$

$\Delta y = 0$ とすれば $a = \dfrac{\partial f}{\partial x}$

$b = \dfrac{\partial f}{\partial y}$

3変数

$u = f(x, y, z)$

グラフは描けない。代数的に考える

$$\Delta u = a\Delta x + b\Delta y + c\Delta z$$

$$a = \frac{\partial f}{\partial x},\ b = \frac{\partial f}{\partial y},\ c = \frac{\partial f}{\partial z}$$

線形関数

・ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(x, y, \alpha \in \mathbb{R})$ のとき

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) \\ f(\alpha x) = \alpha f(x) \end{cases}$$

が成り立つとき線形という

・ $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\left(\begin{matrix} x, y \in \mathbb{R}^n \\ \alpha \in \mathbb{R} \end{matrix}\right)$ のとき

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) \\ f(\alpha x) = \alpha f(x) \end{cases}$$

が成り立つとき線形という

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \cdots,\ e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ とする

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$ なので

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1 e_1 + \cdots\cdots + x_n e_n) \\ &= f(x_1 e_1) + \cdots + f(x_n e_n) \\ &= x_1 f(e_1) + \cdots + x_n f(e_n) \end{aligned}$$

No. 5

Date

ここで $f(e_1) = a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$

$f(e_2) = a_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}$

$\vdots$

$f(e_n) = a_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ とおく.

$[a_1, a_2, \cdots, a_n]$ 並べて $m \times n$ の行列という

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $f(x)$ を求めるには

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の線形関数 $m \times n$ 行列で表せる

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 〃 比例定数

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 〃 $(a\ b)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = ax_1 + bx_2$

$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 〃 $(a\ b\ c)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = ax_1 + bx_2 + cx_3$