# 微積分演習 第4回

## 微分方程式

ニュートン (17C)
力学で微積分が必要になった
中世 天と地は別に考えていた
天：コペルニクス ケプラー 3法則
地：ガリレオ (思考)実験 慣性の法則
アリストテレス
統一したのがニュートン (万有引力の法則)

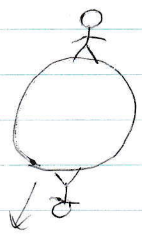
第1法則 慣性の法則
第2 $x(t)$ 空間の中の点

$\dfrac{dx}{dt}$ 速度

$\dfrac{d^2x}{dt^2}$ 加速度

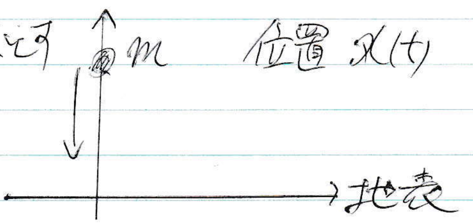
$$\boxed{m \cdot \frac{d^2x}{dt} = F}$$

コペルニクス「太陽が中心にある」
トスカネリ「地球が球体」→ コロンブスが航海へ
アメリゴ・ベスプッチ
古代ギリシア
アリスアルコス



落ちない？

落とす




位置 $x(t)$

$$m\ddot{x} = -mg$$

距離 m
時間 sec なら $g = 9.8\ m/sec^2$

$\ddot{x} = -g$
$x = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots$ とおくと

$\dot{x} = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + \cdots$
$\ddot{x} = 2a_2 + 3\cdot 2a_3 t + 4\cdot 3 a_4 t^2 + 5\cdot 4 a_5 t^3 + \cdots$

$2a_2 = -g$
$a_2 = -\frac{1}{2}g$ , $a_3 = 0, a_4 = 0, \cdots$

よって
$x = a_0 + a_1 t - \frac{1}{2}gt^2$

実際には空気がある。
$\ddot{x} = -g - \underbrace{k}_{\text{定数}}\dot{x}$ ずっと加速するのではない

$=0$ となるとき $\frac{-g}{k} = \dot{x}$

まず空気抵抗だけの場合
$\ddot{x} = -k\dot{x}$ を解く

$x = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots$ とする
$\dot{x} = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \cdots + n a_n t^{n-1} + \cdots$
$\ddot{x} = 2a_2 + 3\cdot 2 a_3 t + 4\cdot 3 a_4 t^2 + \cdots + (n-1)n a_n t^{n-2} + \cdots$

$-ka_1 = 2a_2$
$-2ka_2 = 3\cdot 2a_3$
$-3ka_3 = 4\cdot 3a_4$

$$x = a_0 + a_1 t - \frac{k}{2}a_1 t^2 + \frac{k^2}{3!}a_1 t^3 - \frac{k^3}{4!}a_1 t^4 + \cdots$$

$$= a_0 + a_1\left(t - \frac{k}{2} + \frac{k^2}{3!} - \frac{k^3}{4!} + \cdots\right)$$

$$= a_0 + \frac{a_1}{k}\left(kt - \frac{k^2t^2}{2} + \frac{k^3t^3}{3!} - \frac{k^4t^4}{4!} + \cdots\right)$$

$$= a_0 + \frac{a_1}{k} - \frac{a_1}{k}\left(1 - kt + \frac{k^2t^2}{2} - \frac{k^3t^3}{3!} + \cdots\right)$$

$$= a_0 + \frac{a_1}{k} - \frac{a_1}{k}e^{-kt}$$

宿題　$\ddot{x} = -g - k\dot{x}$　を解け

---

話題をかえて・・・・

人口　100万 → 101万

200万 → 202万

$x(t)$　$\boxed{x' = ax}$　aは比例定数

$$x = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \cdots$$
$$\dot{x} = b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2 + \cdots$$

$$ax = ab_0 + ab_1 t + ab_2 t^2 + ab_3 t^3 + \cdots$$

$$b_1 = ab_0$$
$$2b_2 = ab_1$$
$$3b_3 = ab_2$$

放射性物質　これに従う

$$x = b_0 + ab_0 t + \frac{a^2}{2}b_0 t^2 + \cdots$$

$$= b_0\left(1 + at + \frac{(at)^2}{2} + \frac{(at)^3}{3!} + \cdots\right) = b_0 e^{at}$$