微積分演習 第3回

Taylor展開
無限小のレベルでは関数が多項式の形に書ける。
$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\cdots$ の形

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\cdots$$

微分方程式 (1階の)

$f(x) = e^x$ は $(e^x)' = e^x$ なので $\boxed{f' = f}$ をみたす。

これを解いてみる

$f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\cdots$ と書けるとする。
$f' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots\cdots$
係数を比較すると

$$a_1 = a_0$$

$$2a_2 = a_1 \quad , \quad a_2 = a_1/2 = a_0/2$$

$$3a_3 = a_2 \quad , \quad a_3 = a_2/3 = a_0/3!$$

$$4a_4 = a_3 \quad , \quad a_4 = a_3/4 = a_0/4!$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_0/n!$$

よって

$$f = a_0 \underbrace{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)}_{e^x}$$

- $f' = f$ をみたすのは 指数関数の 定数倍

No. 2

Date . .

$f(x) = \sin x$ とする。

$f'(x) = \cos x$

$f''(x) = -\sin x$ なので 微分方程式(2階の) $\boxed{f'' = -f}$ をみたす

これを解いてみる

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots\cdots$ と書けるとする

$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots\cdots$

$f''(x) = 2a_2 + 3\cdot 2a_3 x + 4\cdot 3a_4 x^2 + \cdots\cdots$

係数を比較すると

$$a_0 = -2a_2$$
$$a_1 = -3\cdot 2\, a_3$$
$$a_2 = -4\cdot 3\, a_4$$
$$a_3 = -5\cdot 4\, a_5$$
$$\vdots$$
$$a_n = -(n+2)\cdot(n+1)\, a_{n+2}$$

ということは

偶数は偶数
奇数は奇数
との関係

$$\begin{cases} a_2 = -\dfrac{a_0}{2} \\ a_4 = -\dfrac{a_2}{3\cdot 4} = \dfrac{a_0}{2\cdot 3\cdot 4} = \dfrac{a_0}{4!} \\ a_6 = -\dfrac{a_4}{6\cdot 5} = -\dfrac{a_0}{6!} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_3 = \dfrac{-a_1}{3\cdot 2} = -\dfrac{a_1}{3!} \\ a_5 = -\dfrac{a_3}{5\cdot 4} = \dfrac{a_1}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} = \dfrac{a_1}{5!} \\ a_7 = -\dfrac{a_5}{7\cdot 6} = -\dfrac{a_1}{7!} \end{cases}$$

よって $f(x) = a_0\underbrace{\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots\cdots\right)}_{\cos x} + a_1\underbrace{\left(x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots\cdots\right)}_{\sin x}$

◎ $f'' = -f$ をみたすのは $C_1 \sin x + C_2 \cos x$

今度は $\boxed{f'(x) = -f(x)}$ を解く

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots\cdots$ と書けるとする

$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots$

$$a_0 = -a_1 \qquad a_1 = -a_0$$
$$a_1 = -2a_2 \qquad a_2 = -\frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2}$$
$$a_2 = -3a_3 \qquad a_3 = -\frac{a_2}{3} = -\frac{a_0}{3!}$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$a_n = -n a_{n+1}$$

よって

$$f(x) = a_0\left(1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots\right)$$

$\boxed{f'(x) - 4x f(x) = 0}$ を解く

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots$ と書けるとする

$4x f(x) = 4a_0 x + 4a_1 x^2 + 4a_2 x^3 + 4a_3 x^4 + \cdots$

$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots$

係数を比較して

$a_1 = 0$ (奇数の項は消える)

$$2a_2 = 4a_0, \qquad a_2 = 2a_0$$
$$4a_4 = 4a_2, \qquad a_4 = \frac{4a_2}{4} = \frac{4\cdot 2}{4}a_0$$
$$6a_6 = 4a_4, \qquad a_6 = \frac{4a_4}{6} = \frac{4\cdot 4\cdot 2}{6\cdot 4}a_0$$

一般に

$$a_{2n+1} = 0$$
$$a_{2n} = \frac{4a_{2n-2}}{2n} = \frac{2^n a_0}{n!}$$

Date . .

よって

$$f(x) = a_0 + 2a_0x^2 + \frac{2^2a_0}{2}x^4 + \frac{2^3}{3!}a_0x^6 + \cdots\cdots$$

$$= a_0\left\{1 + (2x^2) + \frac{1}{2}(2x^2)^2 + \frac{1}{3!}(2x^2)^3 + \cdots\cdots\right\}$$

$$= a_0 e^{2x^2}$$

宿題　次の微分方程式を解け

(1) $f''(x) + 9f(x) = 0$

(2) $(1+x)f'(x) - f(x) = 0$