No. 1

Date '15. 4. 23

微積分演習 第2回

三角関数の微分

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$\tan x$ の微分は $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ であるから

公式 $\boxed{\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}}$ を使って求められる

<u>公式の証明</u>(我々の立場で)

$$\frac{f(x+d)}{g(x+d)} - \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$= \frac{f(x+d)g(x) - f(x)g(x+d)}{g(x+d)\ g(x)}$$

$$= \frac{(f(x)+f'(x)d)g(x) - f(x)(g(x)+g'(x)d)}{(g(x)+g'(x)d)\ g(x)}$$

$$= \frac{(f'(x)g(x) - f(x)g'(x))\ d}{(g(x)+g'(x)d)\ g(x)}$$

分母・分子に $g(x)-g'(x)d$ をかける

$$= \frac{(f'(x)g(x) - f(x)g'(x))\ d\ (g(x)-g'(x)d)}{(g(x)+g'(x)d)\ g(x)\ (g(x)-g'(x)d)}$$

$d^2 = 0$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$= \frac{g(x)(f'(x)g(x) - f(x)g'(x))d}{g(x)^3}$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}d$$

指数関数 底 10 $\longrightarrow$ $e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

どう受け止めていいのか…

$f(x) = 10^x$ とする $f(0) = 1$

我々の微分では $f(d) = 10^d = 1 + ad$ $(d \in D)$

唯1つ
決まる

$(\exists! a \in \mathbb{R})$

$g(x) = e^x$ とする

(何か正の実数 e) $g(x) = e^x$

$= (10^{\log_{10} e})^x$

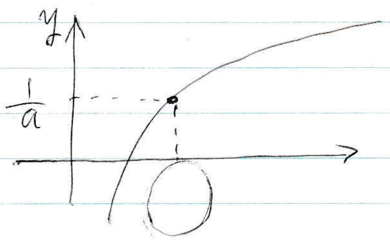
$= 10^{x \log_{10} e}$

$g(d) = e^d$

$= 10^{d \log_{10} e}$

$= 1 + \underbrace{a(\log_{10} e)}_{\text{微分係数}} d$

$y = \log_{10} e$ のグラフ



$\log_{10} e = \frac{1}{a}$ となるように
e を決めましょう
という話

いいことは… $e^{x+d} - e^d = e^x e^d - e^d$

$= e^x \underbrace{(e^d - 1)}_{=d}$

したがって
e^x を微分すると e^x となる

対数関数の微分

$f(x) = \log x$
$g(y) = e^y$

合成関数 $(g \circ f)(x) = x$

$$g'(f(x))\, f'(x) = 1$$

$$g(f(x)) = e^{\log_e x} = x$$

よって $(g \circ f)' = 1$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

数Ⅱでは多項式を微分した

$\left.\begin{matrix} \sin x \\ \cos x \\ e^x \end{matrix}\right)$ は無限次の多項式

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

と書ける。

$$a_0 = f(0)$$
$$a_1 = f'(0)$$
$$a_2 = \frac{f''(0)}{2}$$
$$a_3 = \frac{f'''(0)}{3!}$$
$$\vdots$$
$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$ として求められる

◎ $f(x)=e^x$ のとき

$$f^{(n)}(x)=e^x \text{ なので } f^{(n)}(0)=1$$

よって

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\cdots$$

◎ $f(x)=\sin x$ のとき

$$f'(x)=\cos x,\ f''(x)=-\sin x,\ f'''(x)=-\cos x,\ f^{(4)}(x)=\sin x$$

なので

$$f'(0)=1,\ f''(0)=0,\ f'''(0)=-1,\ f^{(4)}(0)=0$$

よって

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\cdots$$

奇数次だけ残る
(奇関数)

◎ $f(x)=\cos x$ のとき

$$f'(x)=-\sin x,\ f''(x)=-\cos x,\ f'''(x)=\sin x,\ f^{(4)}(x)=\cos x$$

なので

$$f'(0)=0,\ f''(0)=-1,\ f'''(0)=0,\ f^{(4)}(0)=1$$

よって

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\cdots$$

偶数次だけ残る
(偶関数)

複素数の場合

$e^z=1+z+\frac{z^2}{2}+\cdots\cdots$ と定義。$\sin z, \cos z$ も同様。

(指数法則 $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2}$ は認める)

$$e^{i\theta}=1+i\theta+\frac{(i\theta)^2}{2}+\frac{(i\theta)^3}{3!}+\cdots\cdots$$

$$=\left(1-\frac{\theta^2}{2}+\cdots\cdots\right)+i\left(\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\cdots\cdots\right)$$

$$=\cos\theta+i\sin\theta$$

となる。

指数法則を認めると、

$$e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{(i\theta_1 + i\theta_2)}$$

$$= e^{i\theta_1} e^{i\theta_2}$$

$$= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)$$

$$\| \quad \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)$$

実部 虚部を比べると加法定理の式となる

複素数の世界で
指数法則と加法定理はつながっている

指数法則が成り立つことは次のように証明する。

- $e^{(z_1+z_2)} = 1 + (z_1+z_2) + \frac{1}{2}(z_1+z_2)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(z_1+z_2)^n + \cdots$
- $e^{z_1}e^{z_2} = \left(1 + z_1 + \frac{z_1^2}{2} + \cdots\right)\left(1 + z_2 + \frac{z_2^2}{2} + \cdots\right)$

この2つが等しいことを確かめる
（各係数が同じになることをいう）

レポート問題