No. 1

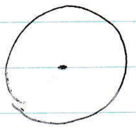
Date '15. 7. 29

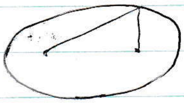
微積分演習 第14回

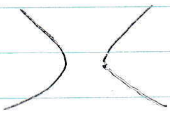
アルキメデス

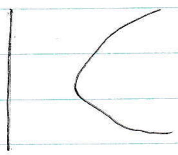
座標 $x^2+y^2=a^2$ のような考えはなかった.

ユークリッド幾何　図形を図形として扱う

円  1点からの距離が等しい点の軌跡

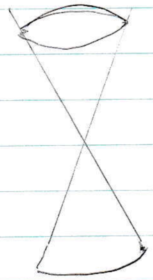
楕円  2点からの距離の和が一定である点の軌跡

双曲線  2点からの距離の差が一定である点の軌跡

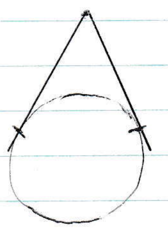
放物線  1点と直線の距離が等しい点の軌跡

円錐を平面で切って現れる図形

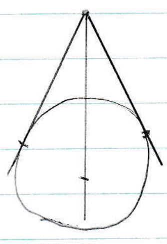
円錐曲線



・使うのは次の考え

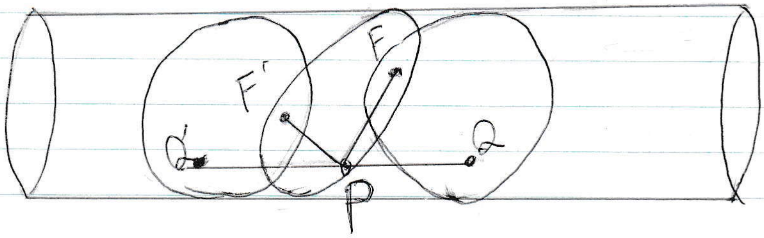


円に接線を引く
長さは同じ



球面に接線を引く
長さは同じ

円柱を平面で切る（楕円になる）



円柱に内接，切断面に接する球を2つ考える
接点 F，F' とする．
切断面の周上に P をとる
P から円柱に平行に直線を引き．球との接点を Q．Q'
とする．

$$PF = PQ$$
$$PF' = PQ'$$

$$PF + PF' = PQ + PQ' = QQ'$$

切断面は楕円である。

☆円錐を切るときも同様の考え方

積分

線積分　　空間 $\mathbb{R}^3$

$\mathbf{f}(x)$　ベクトル場

$\mathbf{f}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

曲線 $[0, a] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

σ

$$\int_a^b \mathbf{f}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt$$

パラメータは重要ではない

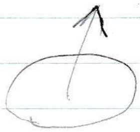
$t \in [0, \frac{a}{2}] \longrightarrow \sigma(2t)$

向きは重要

$$\int_\sigma \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{-\sigma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$$

面積分

流れの場　水の流れ出る量

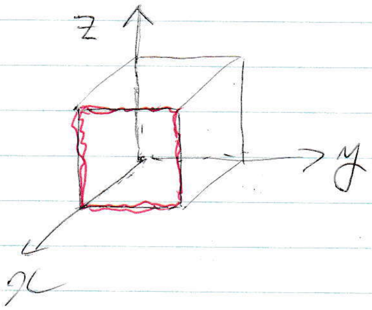


面の向きは重要

$$\int_r \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = -\int_{-r} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$$

閉曲面のとき　外向きにとる.

$\mathbb{r} = (x, y, z)$ 流れの場



立方体　頂点 (0,0,0)　(0,1,1)
(0,1,0)　(1,0,1)
(1,0,0)　(1,1,0)
(0,0,1)　(1,1,1)

どれだけ水が流れ出るか?

・面に垂直な成分が大事
・面に沿う成分は関係ない

赤い面は $1 \times 1 = 1$.

$$[0,1] \times [0,1] \longmapsto (1, s, t)$$

y軸 ⇓ s　　z軸 ⇓ t

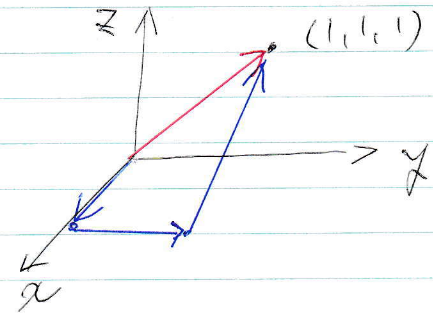
$$\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{e_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \times \underset{e_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = e_1$$

x成分だけになる

$$\mathbb{f} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y \\ xyz \end{pmatrix}$$

$$(0,0,0) \longmapsto (1,1,1)$$



$$\int_0^1 \mathbb{f}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt$$

赤 $\sigma : t \in [0,1] \longmapsto (t,t,t)$

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \mathbb{f}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt \\
&= \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ t^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^1 (t^2 + t + t^3)\, dt \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{13}{12}
\end{aligned}$$

青 $\sigma_1 : t \in [0,1] \longmapsto (t, 0, 0)$

$\sigma_2 : t \in [0,1] \longmapsto (1, t, 0)$

$\sigma_3 : t \in [0,1] \longmapsto (1, 1, t)$

$$\int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 t\, dt = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 t\, dt = \frac{1}{2}$$

足して、$\frac{4}{3}$

道によってちがう結果