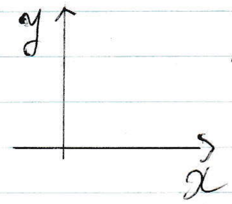
No. 1

Date '15. 7. 22

# 微積分演習 第13回

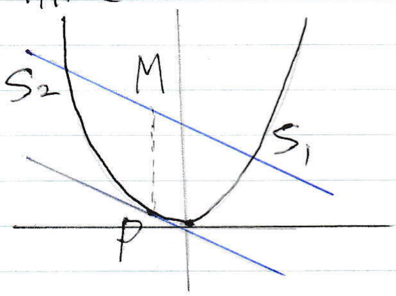


座標　図形を式で表す
　　　→ 幾何を計算で解く

デカルト　近世

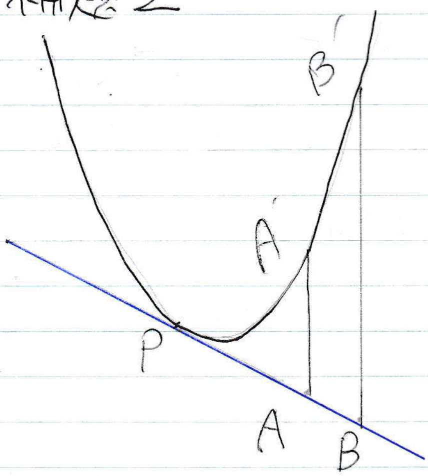
アルキメデスには座標という考えはない
どのようにアルキメデスの定理を発見したのか?

## 補題1




M は
$S_1S_2$ の中点

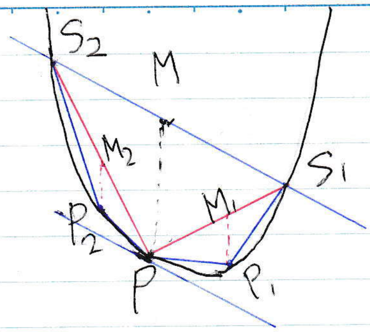
## 補題2




接線上に A, B をとる
放物線の軸に平行に直線を引き、
放物線との交点を A', B' とする。

$$\frac{\overline{PA}^2}{\overline{PB}^2} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}}$$

(証明は宿題)




[定理]

$$\frac{1}{4}\underbrace{\triangle S_1S_2P}_{S} = \triangle PP_1S_1 + \triangle PP_2S_2$$

くり返していくと切片に近づく。

$$S+\frac{1}{4}S+\left(\frac{1}{4}\right)^2S+\left(\frac{1}{4}\right)^3S+\cdots$$

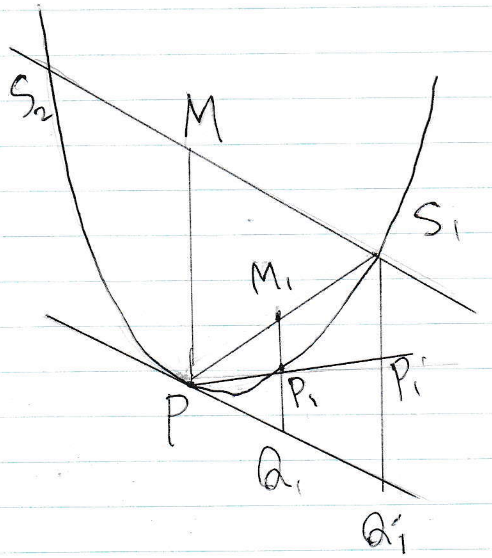
$$= S\left\{1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots\right\}$$

$$= S\,\frac{1}{1-\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{4}{3}S$$

極限、無限級数の考えはなかったので、少し違ったが
だいたいこのように考えた。

[定理の証明]




$PQ_1 : PQ'_1 = 1 : 2$

補題2を用いて

$P_1Q_1 : S_1Q'_1 = 1 : 4$

$M_1Q_1 : S_1Q'_1 = 1 : 2$

$S_1Q'_1 = l$ とする。$M_1P_1 = \frac{1}{4}l$

$S_1Q'_1$ と $P$ の距離 $h$ とする

$$\triangle S_1PP_1 = \triangle M_1P_1P + \triangle M_1P_1S_1 = \frac{1}{8}lh$$

四辺形 $MPQ'_1S_1$ は平行四辺形

$$\triangle MPS_1 = \triangle PQ'_1S_1 = \frac{1}{2}lh$$

よって

$\triangle MPS_1 : \triangle S_1PP_1 = 4 : 1$

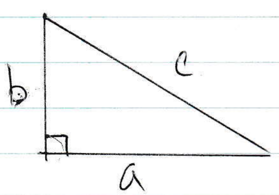
同様に $\triangle MPS_2 : \triangle S_2PP_2 = 4 : 1$

$\frac{1}{4}\triangle S_1S_2P = \triangle PP_1S_1 + \triangle PP_2S_2$

---

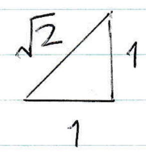
ピタゴラス

前6C　釈迦, 孔子




$a^2+b^2=c^2$　　前2000年 メソポタミアでは経験的知識として理解していた。

ユークリッド幾何の枠組の中で証明したのがピタゴラスである。




ピタゴラス教団

全ての実数は有理数

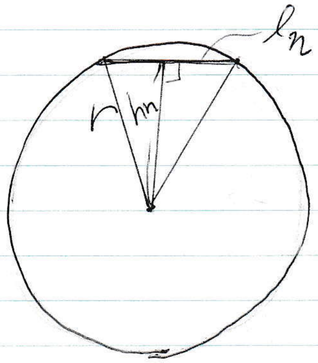
√2は無理数 ← 秘

ユークリッド　原論

円錐曲線論 (全4巻) ― 残っていない

アポロニウス　円錐曲線論 (全8巻)

アルキメデスは円の面積も考えた。




半径 $r$
円周 $l$
$l = 2\pi r$ と $\pi$ を決める

$n$等分する

$$n\cdot\underbrace{\frac{1}{2}h_n l_n}_{\text{三角形}} = \frac{1}{2}h_n(\underbrace{n\cdot l_n}_{\text{周}})$$

$n\to\infty$ とすると円の面積。 $r$ $l$

$$\frac{1}{2}rl = \frac{1}{2}r(2\pi r)$$
$$= \pi r^2$$