

微積分演習 第11回

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x, y)$ の極値を求めよ。

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x \quad \text{とかく。} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy} \quad \text{とかく。}$$

($f_{xy} = f_{yx}$ である。)

必要条件 $f_x = f_y = 0$

十分条件 $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} > 0$

$$f_{xx} > 0 \quad \text{ならば 極小}$$

$$f_{xx} < 0 \quad \text{ならば 極大}$$

問題

$f(x, y) = (y - x^2)(y - 4x^2)$ の極値を求めよ。

$$\begin{aligned} f_x &= -2x(y - 4x^2) + (y - x^2)(-8x) \\ &= -2xy + 8x^3 - 8xy + 8x^3 \\ &= 16x^3 - 10xy \\ &= 2x(8x^2 - 5y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y &= (y - 4x^2) + (y - x^2) \\ &= 2y - 5x^2 \end{aligned}$$

必要条件から $x = y = 0$ が候補

$$f_{xx} = 48x^2 - 10y$$

$$f_{yy} = 2$$

$$f_{xy} = -10x$$

$$(0, 0) \text{ を代入すると } \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

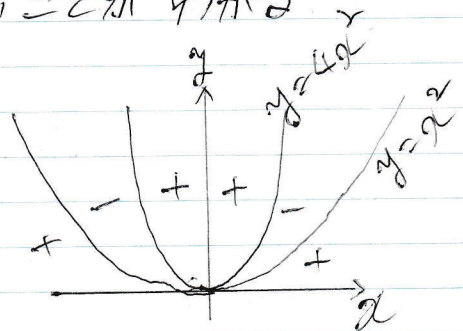
x と y の平面の切り口を考えると

極値で正しいところがわかる

$$y - x^2 = 0$$

$$y - 4x^2 = 0$$

$$Z = (y - x^2)(y - 4x^2)$$



問題

$f(x, y) = x^2y(x^2 + y^2 - 1)$ の極値を求めよ

$$f_x = y(3x^2 + y^2 - 1)$$

$$f_y = x(x^2 + 3y^2 - 1)$$

必要条件から 9 個の候補が出る

$$(0, 0), (1, 0), (-1, 0)$$

$$(0, 1), (0, -1)$$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$f_{xx} = 6xy$$

$$f_{yy} = 6xy$$

$$f_{xy} = 3x^2 + 3y^2 - 1$$

$$\begin{vmatrix} 6xy & 3x^2 + 3y^2 - 1 \\ 3x^2 + 3y^2 - 1 & 6xy \end{vmatrix} > 0$$

十分条件より 点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 2 極小

点 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 2 極大

問題

$f(x, y) = e^{-x^2-y^2}(3x^2+y^2)$ の極値を求めよ

$$\begin{aligned} f_x &= -2x e^{-x^2-y^2}(3x^2+y^2) + e^{-x^2-y^2} 6x \\ &= -2x e^{-x^2-y^2}(3x^2+y^2-3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y &= -2y e^{-x^2-y^2}(3x^2+y^2) + e^{-x^2-y^2} 2y \\ &= -2y e^{-x^2-y^2}(3x^2+y^2-1) \end{aligned}$$

$f_x = f_y = 0$ (必要条件) より,

$$(x, y) = (0, 0), (0, 1), (0, -1), (1, 0), (-1, 0)$$

$$f_{xx} = (12x^4 - 30x^2 + 4x^2y^2 - 2y^2 + 6) e^{-x^2-y^2}$$

$$f_{yy} = (4y^4 - 10y^2 + 12x^2y^2 - 6x^2 + 2) e^{-x^2-y^2}$$

$$f_{xy} = (12x^3y + 4xy^3 - 6xy) e^{-x^2-y^2}$$

十分条件より

点 $(0, 0)$ 2" 極小,

点 $(1, 0), (-1, 0)$ 2" 極大,

宿題 次の関数の極値を求めよ

$$f(x, y) = 2 - 3(x+y) + x^3 + y^3$$

$$f(x, y) = \frac{x+2y+3}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$$