No. 1
Date '15 6 18

微積分演習 第10回

極値

1変数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f'(x) = 0$ ← 必要条件
となる点を求める。

増減表 ← 十分条件

x	$\cdots$		$\cdots$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$		$\searrow$

あまり使わないが、十分条件として
2次導関数を使う方法もある。

$f''(x) < 0$ 極大
$f''(x) > 0$ 極小

多変数 主に2変数 $f(x, y)$ のときを考える。

一般に $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $x \in \mathbb{R}^n$
f が x で 極値
$\Updownarrow$
$\forall a \in \mathbb{R}^n$,
$\boxed{g_a : t \in \mathbb{R} \to f(x + at) \in \mathbb{R}}$ が
$t = 0$ で 極大値 / 極小値

・必要条件

微分。 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x)\, a_1 + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x)\, a_2$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x) = \frac{\partial f}{\partial y}(x) = 0}$$

接平面が flat

必要条件

・十分条件

$g_a''(0) > 0 \quad (\forall a \in \mathbb{R}^n)$ 極小

$g_a''(0) < 0 \quad (\forall a \in \mathbb{R}^n)$ 極大

一般に
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の微分

$a \in \mathbb{R}^n.\quad f(x+a d) = f(x) + \bigcirc d \quad (\forall d)$

$\bigcirc \in \mathbb{R}^m$

$f'(x)(a)$

$f'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

線形 $\begin{cases} f'(x)(a_1+a_2) = f'(x)(a_1) + f'(x)(a_2) \\ f'(x)(\alpha a) = \alpha f'(x)(a) \end{cases}$

定理

$\boxed{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ がはじめから線形の場合. } \quad f'(x) = f}$

$f(x+ad) - f(x) = \bigcirc d$

$\cancel{f(x)} + f(a)d - \cancel{f(x)}$

よって $f'(x) = f$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ とする

$g_a : t \in \mathbb{R} \longmapsto f(x+at) \in \mathbb{R}$

$g_a'(t) = f'(x+at)(a)$

$g_a'(0) = f'(x)(a)$

No. 3

Date

$f' : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n ; \mathbb{R})$

$\boxed{\varphi \longmapsto \varphi(a)}$ 線形　　a：固定

$x \longmapsto f'(x)(a)$

合成　$x \longmapsto f'(x) \longmapsto f'(x)(a)$

$g_a''(t) = f''(x+at)(a)(a)$
$g_a''(0) = f''(x)(a)(a)$

2重線形

$f''(x)(a, b)$　　　$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

$$f''(x)(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) a_1 b_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x) a_1 b_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x) a_2 b_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x) a_2 b_2$$

(実は、) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ が成り立つ

平面のベクトルについて
内積 $a \cdot b$ 二重線形
$b \cdot a = a \cdot b$ 対称性
$a \neq 0$ なら $a \cdot a > 0$ 正値性

これらの性質があった。

対称、二重線形のとき、正値性はどういう場合に成り立つだろうか？

前に考えた

$$\alpha_{11}x^2 + 2\alpha_{12}xy + \alpha_{22}y^2 > 0$$

$y^2 \neq 0$ である。

$$\alpha_{11}\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2\alpha_{12}\left(\frac{x}{y}\right) + \alpha_{22} > 0$$

$$\boxed{\begin{gathered}\alpha_{11} > 0 \\ \alpha_{12}^2 - \alpha_{11}\alpha_{22} < 0\end{gathered}}$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix}}_{D} > 0$$ と書いてもよい

$$\alpha_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\alpha_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$\alpha_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

まとめると、

$f(x, y)$ が点 (a, b) で極値をもつとは…

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$$ であり、

$D(a, b) > 0$ である

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0 & \cdots\cdots \text{極小} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0 & \cdots\cdots \text{極大}\end{cases}$$

No. 5

Date . .

宿題 $f(x, y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2)$

極値を求めよ