数学特別講義Ⅰ

平良和昭

調和積分論入門

代数、幾何、解析の交差点

講義の目的

●現代数学の構図について、解析学の立場から概観すること。

●数学は、本来、ひとつであることを実感すること。

図形の数学的研究

● **代数的位相幾何学**

　幾何学的図形の位相的構造を、代数学の手法を用いて研究する（オイラー、ポアンカレ）

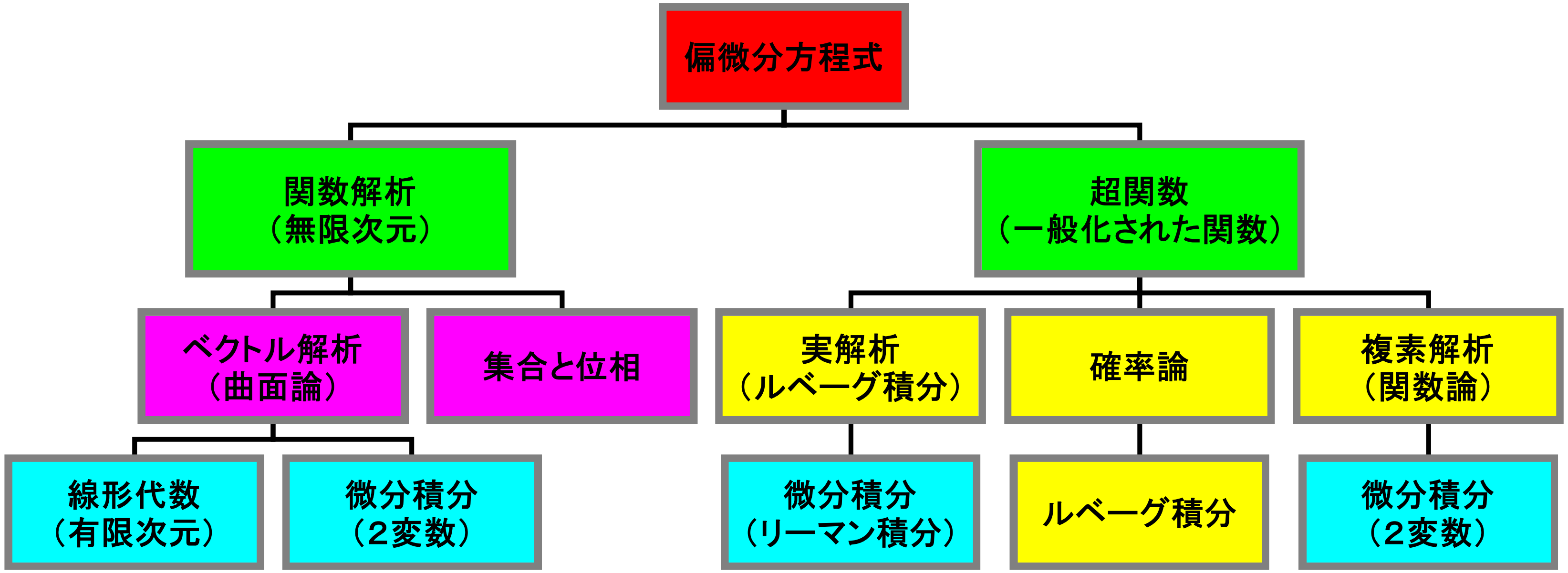
● **微分位相幾何学**

　多様体（幾何学的図形）の微分構造を、微分形式を利用して研究する（カルタン、ド・ラーム）

● **調和積分論**

　多様体（幾何学的図形）の微分構造を、ラプラス作用素を利用して研究する（ホッジ、小平邦彦）

数学的構図（１）


偏微分方程式
関数解析
（無限次元）
超関数
（一般化された関数）
ベクトル解析
（曲面論）
集合と位相
実解析
（ルベーグ積分）
確率論
複素解析
（関数論）
線形代数
（有限次元）
微分積分
（２変数）
微分積分
（リーマン積分）
ルベーグ積分
微分積分
（２変数）

調和積分論とは

数学的構図（2）

- 調和積分論（ホッジ・小平理論）
  - 代数的位相幾何（ホモロジー群）
  - 微分幾何（ド・ラーム理論）
  - 関数解析（リース・シャウダー理論）
  - 偏微分方程式（ポテンシャル論）

調和積分論の数学的内容

- 代数的位相幾何学:単体的複体、特異ホモロジー群、コホモロジー群
- 微分位相幾何学:微分多様体、微分形式、ド・ラームのコホモロジー群、ド・ラームの定理
- 関数解析:ヒルベルト空間論、リース・シャウダーのコンパクト作用素の理論
- 偏微分方程式:ラプラス作用素、楕円型境界値問題(ポテンシャル論)

数学的背景

数学と力学

テーマ	数学	力学
微分方程式	2階常微分方程式	ニュートンの運動方程式（質点、剛体）
無限級数	べき級数（フーリエ級数）	固有関数展開（重ね合わせの原理）
ベクトル解析	曲面上の微積分	連続体力学（流体、弾性体）

対照表

線形代数 （有限次元）	積分（微分）方程式	関数解析 （無限次元）
ベクトル	関数	ベクトル
行列	積分核	線形作用素
連立一次方程式	積分（微分）方程式	線形方程式
単位行列	ディラック超関数	恒等作用素
逆行列	グリーン関数	逆作用素

ベクトルと関数（1）

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$$ （行列）

$$\int_a^b K(t, s)\, x(s)\, ds = y(t)$$

（積分方程式）

ベクトルと関数（2）

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} x_j = x_i$$

（単位行列）

$$\int_a^b \delta(t-s)\, x(s)\, ds = x(t)$$

（ディラック超関数）

常微分方程式の解法（1）

- 微分方程式を積分して、積分方程式に帰着して、不動点定理を使って解く。

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t))$$
$$x(0) = x_0$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))ds$$

常微分方程式の解法（2）

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))ds$$

$$Tx(t) = x_0 + \int_0^t f(t, x(s))ds$$

とおくと、

$$Tx(t) = x(t)$$ （不動点）

ルベーグ積分の役割（比喩）

物理学	理論物理学	実験物理
解析学	関数解析学	実解析（ルベーグ積分）

微積分の基本公式

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt$$

分野	f(x)	dx
微分積分	連続的微分可能	リーマン測度
実解析	絶対連続	ルベーグ測度

超関数導入の利点

代数方程式の解法

- 代数的閉体（複素数体）の構成
- 代数学の基本定理
- 根の性質を調べる

微分方程式の解法

- 完備な関数空間（超関数）の構成
- 超関数解の存在定理
- 超関数解の性質を調べる

類似図

テーマ	*代数方程式*	*微分方程式*
枠組み	実数体	連続関数、リーマン積分
存在定理	複素数体（代数的閉体）	超関数、ルベーグ積分（完備性）
定性的性質	根の性質	解の一意性、微分可能性

鳥瞰図（1）

位相幾何学	微分幾何学	偏微分方程式
単体的複体（多面体）	コンパクト多様体	ラプラス作用素
単体（頂点、辺等）	微分形式	カレント（超関数）
特異ホモロジー群	ド・ラームコホモロジー群	ホッジ・小平直交分解
オイラー標数（位相的指数）	ベッチ数の交代和	解析的指数

アティヤ·シンガー指数定理

位相的指数 ＝ 解析的指数

位相幾何学からのアプローチ

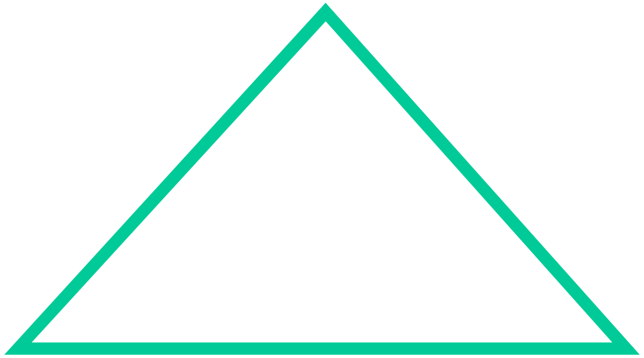
オイラー標数（1）

平面曲線 K に対して

$$\chi(K) = （辺の数）－（頂点の数）$$

（交代和）

オイラー標数の例（1）



$$\chi(K) = （辺の数）－（頂点の数）$$
$$= 3 - 3$$
$$= 0$$

オイラー標数（2）

多面体 K に対して

$$\chi(K) = （面の数）－（辺の数）$$

$$+（頂点の数）$$

（交代和）

オイラー標数の例（２）

曲面（多面体）	ジーナス（穴の数）	オイラー標数
球面（４面体）	０	２ (=4−6+4)
１人乗りの浮き輪（トーラス）	１	０
g人乗りの浮き輪	g	２（１－g）

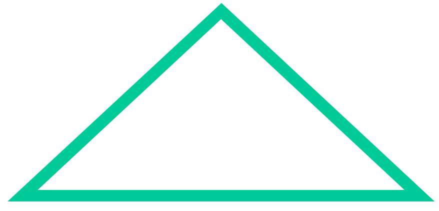
代数的位相幾何学からの
アプローチ

単体と複体

0 単体

1 単体

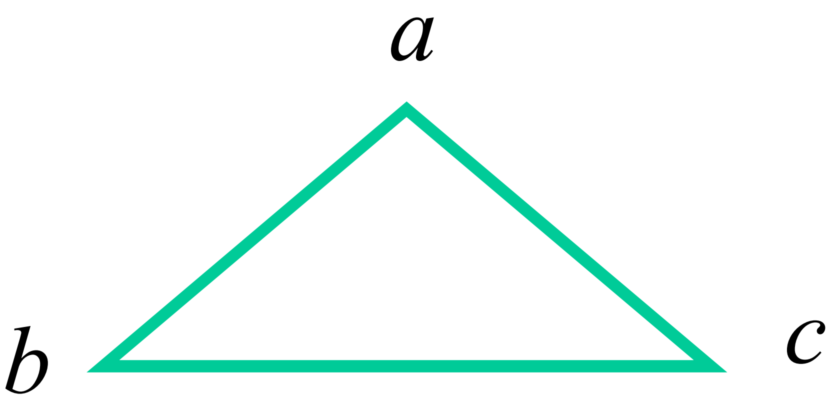
2 単体



境界作用素(1)

$$\partial_1 <a,b> = <b> - <a>$$

境界作用素(2)



$$\partial_2 < a, b, c > = < b, c > - < a, c > + < a, b >$$
$$= < b, c > + < c, a > + < a, b >$$

鎖複体

複体 K に対して

$$C^{k+1}(K) \xrightarrow{\partial_{k+1}} C^{k}(K) \xrightarrow{\partial_{k}} \Omega^{k-1}(K)$$

特異ホモロジー群

複体 K に対して

$$H_k(K,\mathbf{R}) = \frac{\mathrm{Ker}\,\partial_k}{\mathrm{Im}\,\partial_{k+1}}$$

ベッチ数

曲面 K に対して

$$\beta_0 = \dim H_0(K, \mathbf{R})$$

$$\beta_1 = \dim H_1(K, \mathbf{R})$$

$$\beta_2 = \dim H_2(K, \mathbf{R})$$

ベッチ数とオイラー標数

（オイラー・ポアンカレの公式）

曲面 Kに対して

$$\chi(K) = （面の数）-（辺の数）$$

$$+（頂点の数）= \beta_2 - \beta_1 + \beta_0$$

（交代和）

ベッチ数の例

曲面（多面体）	オイラー標数	ベッチ数		
球面（４面体）	２	１	０	１
１人乗りの浮き輪（トーラス）	０	１	２	１
g人乗りの浮き輪	２－２g	１	２g	１

微分幾何学からのアプローチ

ストークスの公式

図形と微分形式を結ぶ式（カルタン）

境界付き多様体 M において

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

勾配（1）

滑らかな関数（０次微分形式）$f(x,y,z)$
に対して

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

勾配（２）

$$\mathrm{grad}\ f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

１次微分形式＝向き（右向き、左向き）を持った微小な線分

ストークスの公式（1）

閉区間 $I = [a,b]$ において

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

$$\int_I df = \int_{\partial I} f$$

回転(1)

1次微分形式 $\omega = f\,dx + g\,dy + h\,dz$ に対して

$$d\omega = \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right) dz\,dx + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\,dy$$

回転（２）

$$\mathrm{rot}\,(f, g, h)$$

$$= \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

２次微分形式＝向き（表、裏）を持った**微小な矩形**

ストークスの公式（2）

曲面 S に対して

$$\int_S \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \right) dzdx$$

$$+ \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dxdy = \int_{\partial S} fdx + gdy + hdz$$

ストークスの公式(2)

曲面 S に対して

$$\int_S d\omega = \int_{\partial S} \omega$$

$$\omega = f dx + g dy + h dz$$

発散(1)

2次微分形式　$\rho = f dy dz + g dz dx + h dx dy$
に対して

$$d\rho = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \right) dx dy dz$$

発散（2）

$$\mathrm{div}\,(f, g, h) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}$$

３次微分形式＝向き（右手系、左手系）を持った微小な直方体

ストークスの公式（３）

領域 D に対して

$$\int_D \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \right) dxdydz$$

$$= \int_{\partial D} fdydz + gdzdx + hdxdy$$

ストークスの公式（3）

領域 D に対して

$$\int_D d\,\omega = \int_{\partial D} \omega$$

$$\omega = f dydz + g dzdx + h dxdy$$

ド・ラーム複体

多様体 M に対して

$$\Omega^{k-1}(M) \xrightarrow{d^{k-1}} \Omega^{k}(M) \xrightarrow{d^{k}} \Omega^{k+1}(M)$$

ド・ラームコホモロジー群

多様体 M に対して

$$H^k(M) = \frac{\mathrm{Ker}\, d^k}{\mathrm{Im}\, d^{k-1}}$$

ド･ラームの定理

多様体 M に対して

$$H^0(M) \cong H_0(M, \mathbf{R})$$

$$H^1(M) \cong H_1(M, \mathbf{R})$$

$$H^2(M) \cong H_2(M, \mathbf{R})$$

調和積分論からのアプローチ

鳥瞰図（2）

確率論	偏微分方程式	微分トポロジー
ブラウン運動	ラプラス作用素	ド・ラーム複体
マルコフ性	球面平均性	調和形式
吸収現象、反射現象	ホッジ・小平直交分解	ド・ラームコホモロジー群
推移確率の跡	解析的指数	オイラー標数

ホッジ・小平の定理

多様体 M に対して

$$H^0(M) \cong \mathbf{H}^0(M)$$

$$H^1(M) \cong \mathbf{H}^1(M)$$

$$H^2(M) \cong \mathbf{H}^2(M)$$

調和関数

関数 $u(x)$ が 調和 であるとは

$$u(x) \in C^2(I)$$

$$u''(x) = 0 \ in \ I$$

調和関数の例(1)

区間 $I=(a, b)$ において

関数 $u(x)$ が 調和 であるための必要十分条件は、

$$u(x) = Ax+B \quad in\ I$$

(直線)

調和関数の性質（1）

- 調和関数 $u(x)$ の値は、x を中心とした任意の**球面平均**に等しい。（球面平均性）

$$u(x)=\frac{1}{2}\left[u(x+r)+u(x-r)\right]$$

調和関数の性質(2)

- 調和関数は、その最大値を**境界の点**でとる。(最大値の原理)
- 調和関数が、内部の点で最大値をとれば、**定数**である。(強最大値の原理)

$$u(x) = Ax + B$$

調和関数の例(2)

円周 S において

関数 $u(x)$ が **調和** であるための必要十分条件は、

$$u(x) = A \quad in\ S$$

(定数)

調和形式の計算例（1）

円周 S において

$$H^0(S) \cong \mathrm{R}$$

$$H^1(S) \cong \mathrm{R}$$

調和形式の計算例（2）

円周 S において

$$\dim \mathsf{H}^1(S) - \dim \mathsf{H}^0(S)$$
$$= 1 - 1$$
$$= 0$$
$$= \chi(S)$$

コンパクト性

実数論	ボルツアノ・ワイエルシュトラスの定理（数列）
微分積分学	アスコリ・アルツェラの定理（連続関数列）
超関数論	レリッヒの定理（超関数列）

ボルツアノ･ワイエルシュトラスの定理

有界な数列は、収束する部分列を含む
（数列の点列コンパクト性）

アスコリ･アルツェラの定理

一様有界かつ同程度連続な連続関数列は、収束する部分列を含む

（連続関数の点列コンパクト性）

楕円型境界値問題の解法

ポテンシャル論	解を、積分方程式に帰着して構成する（フレドホルム積分方程式）	積分核の精密な評価がポイント
変分法	解を、変分問題の極値としてとらえる（オイラー・ラグランジュ方程式）	超関数空間の設定、コンパクト性がポイント

略年史（1）

- ニュートン（1642－1727）イギリス
- フーリエ（1736－1813）フランス
- コーシー（1789－1857）フランス
- アーベル（1802－1829）ノルウェー
- ワイエルシュトラス（1815－1897）ドイツ

略年史（2）

- ラグランジュ（1736－1813）イタリア、フランス
- ラプラス（1749－1827）フランス
- ベッチ（1823－1892）イタリア
- リーマン（1826－1866）ドイツ
- ヒルベルト（1862－1943）ドイツ
- フレドホルム（1866－1927）スウェーデン
- ルベーグ（1875－1941）フランス
- カルタン（1869－1951）フランス

略年史(3)

- オイラー(1707－1783)スイス
- ポアンカレ(1854－1912)フランス
- リース(1880－1956)ハンガリー
- シャウダー(1899－1943)ポーランド
- ド・ラーム(1903－？)フランス
- ホッジ(1903－？)イギリス
- 小平邦彦(1915－1997)日本

図形の数学的研究（まとめ）

- **代数的位相幾何学**

  幾何学的図形の位相的構造を、代数学の手法を用いて研究する（オイラー、ポアンカレ）

- **微分位相幾何学**

  多様体（幾何学的図形）の微分構造を、微分形式を利用して研究する（カルタン、ド・ラーム）

- **調和積分論**

  多様体（幾何学的図形）の微分構造を、ラプラス作用素を利用して研究する（ホッジ、小平邦彦）

参考書

- 長野正：曲面の数学
- 数学のたのしみ：ラプラシアンの諸相
- 数学のたのしみ：指数定理の裾野
- 北原・河上：調和積分論
- 吉田朋好：ディラック作用素の指数定理
- シンガー・ソープ：トポロジーと幾何学入門

参考書

- **I. M. Singer and J. A. Thorpe:**

Lecture notes on elementary topology and geometry, Springer-Verlag, 1967

- **K. Taira:**

Brownian motion and index formulas for the de Rham complex, Mathematical Research, No. 106, WILEY--VCH, 1998.