総合科目

平良和昭

生活の中に見る数学

講義内容

- 日常生活において数学が果たしている役割に光を当てる。特に、日々のありふれた事柄の背後にある数学的な見方･考え方のいくつかについて解説する。

自然科学における数学の役割

自然科学における数学の役割

自然現象

数理モデル化

理論上の現象解析

理論値

偏微分方程式 ⇒ 解を求める

気象情報

気象情報の仕組み

気象現象

予想の気象現象

数理モデル化

天気予報

ナヴィエ･ストークス方程式 ⇒ 近似解を見つける

数値計算
（地球シミュレータ）

ナヴィエ・ストークスの流体方程式

ナヴィエ・ストークスの流体方程式

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt}$$

$$= -\nabla p + \rho\mathbf{B} + \mu\Delta\mathbf{V} + \frac{1}{3}\mu\nabla \cdot \mathrm{div}\,\mathbf{V}$$

慣性力

＝圧力＋外力＋粘性力＋変形応力

数値計算の
重要性

数値計算の役割（比喩）

数学	解析学	数値計算
物理学	理論物理学	物理実験

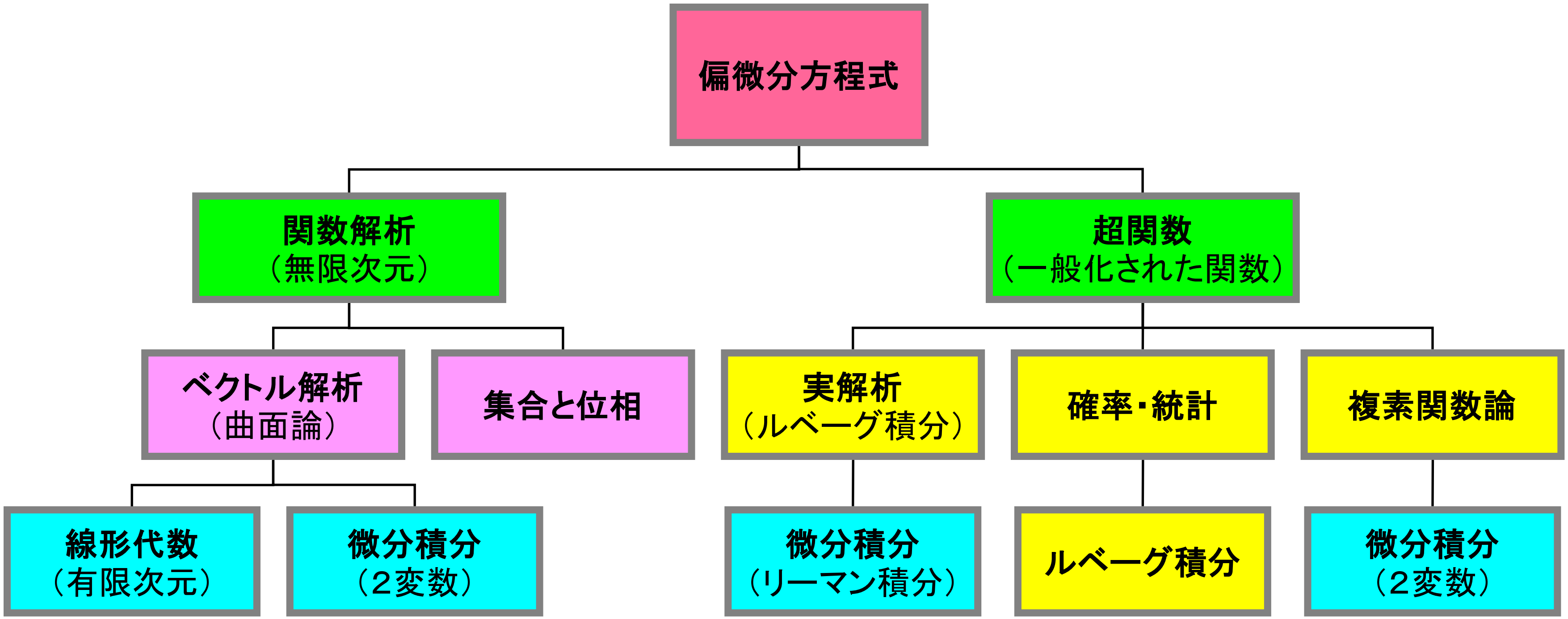
数値計算の精神

数値計算の精神

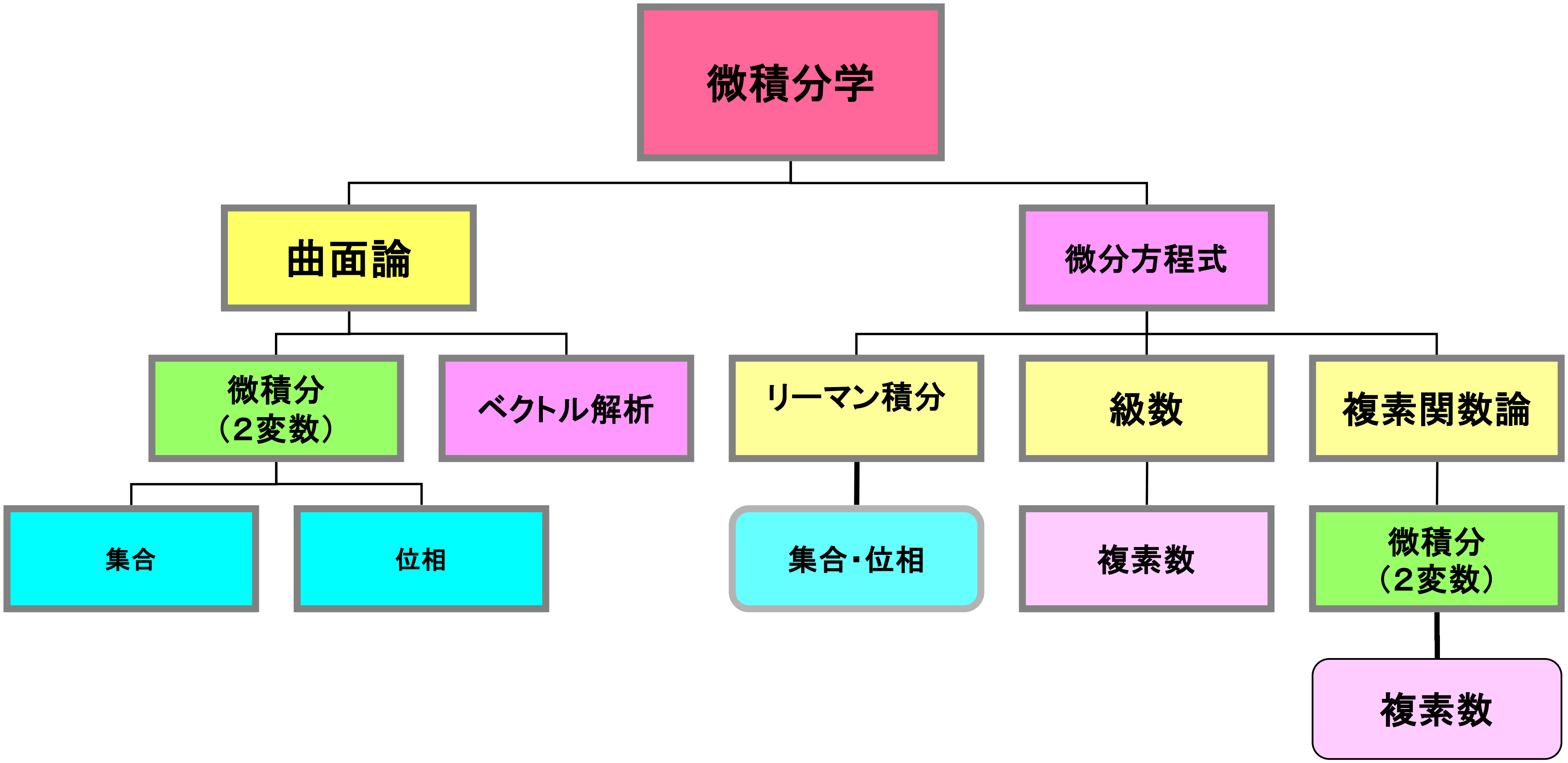
（Ｉ） より早く（時間的に）
（Ⅱ） より精確に（理論的に）
（Ⅲ） より安く（経済的効率）

偏微分方程式論
の構図

偏微分方程式論の構図


偏微分方程式
関数解析
（無限次元）
超関数
（一般化された関数）
ベクトル解析
（曲面論）
集合と位相
実解析
（ルベーグ積分）
確率・統計
複素関数論
線形代数
（有限次元）
微分積分
（２変数）
微分積分
（リーマン積分）
ルベーグ積分
微分積分
（２変数）

微積分学の構図



微積分学
曲面論
微分方程式
微積分
（2変数）
ベクトル解析
リーマン積分
級数
複素関数論
集合
位相
集合・位相
複素数
微積分
（2変数）
複素数

大学での
数学勉強法

勉強上の心得

（Ⅰ） 全体像の一部しか学ばない。
（Ⅱ） 全てを理解するには、４年はかかる。
（Ⅲ） 繰り返して、何度も復習する。

数学的思考力とは

数学的思考力

（Ⅰ） 確かな論理力（正しい証明）
（Ⅱ） 自然な発想力（素直な推論）
（Ⅲ） 豊かなイメージ（数学的な感性）

数理生態学

研究のキャッチフレーズ

研究テーマ	現実の問題
人口動態論	地球の人口問題
多種競争モデル	絶滅危険種の保護 （動物の自然環境対策）

数理モデルの例

（1）ロトカ・ヴォルテラの捕食者・被食者方程式

（2）ヴォルテラの2種競争モデル

（3）3すくみの競争モデル

Vito Volterra

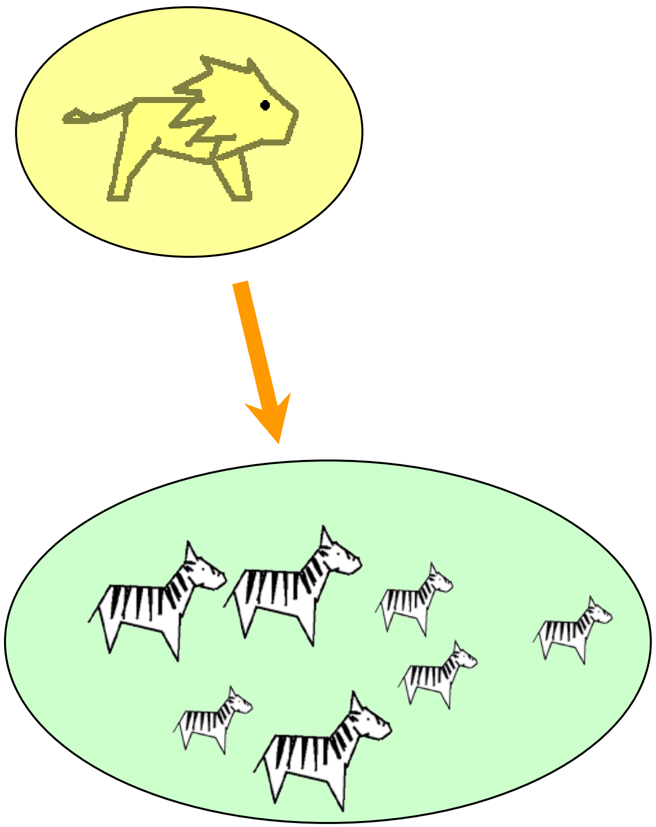
ヴォルテラ

◆**Vito Volterra (1860-1940)**

Italian Mathematician and Physicist

ロトカ･ヴォルテラの
捕食者･被食者方程式

捕食者・被食者の方程式



$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = (1 - y(t))\,x(t) \\
\dfrac{dy}{dt} = (-1 + x(t))\,y(t) \\
x(0) = 20\text{（シマウマ）} \\
y(0) = 2\text{（ライオン）}
\end{cases}
$$

現実のモデル

微分方程式

方程式の数理生態的解釈

生物1：餌になる方、個体数 $x(t)$

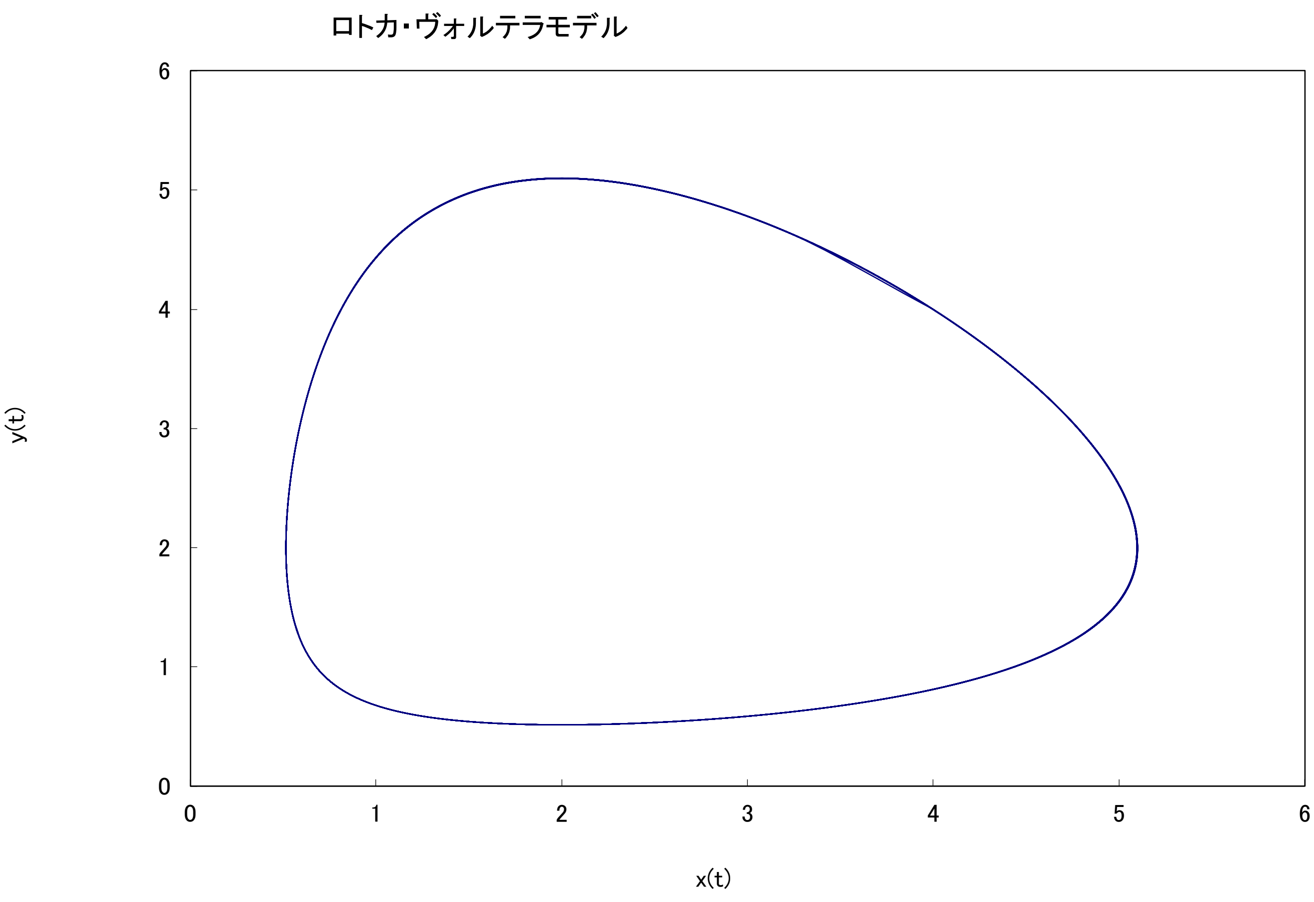
生物2：捕食する方、個体数 $y(t)$

ロトカ･ヴォルテラの方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (1 - y(t))x(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = (-1 + x(t))y(t) \\ x(0) = 20\text{（被捕食者）} \\ y(0) = 2\text{（捕食者）} \end{cases}$$

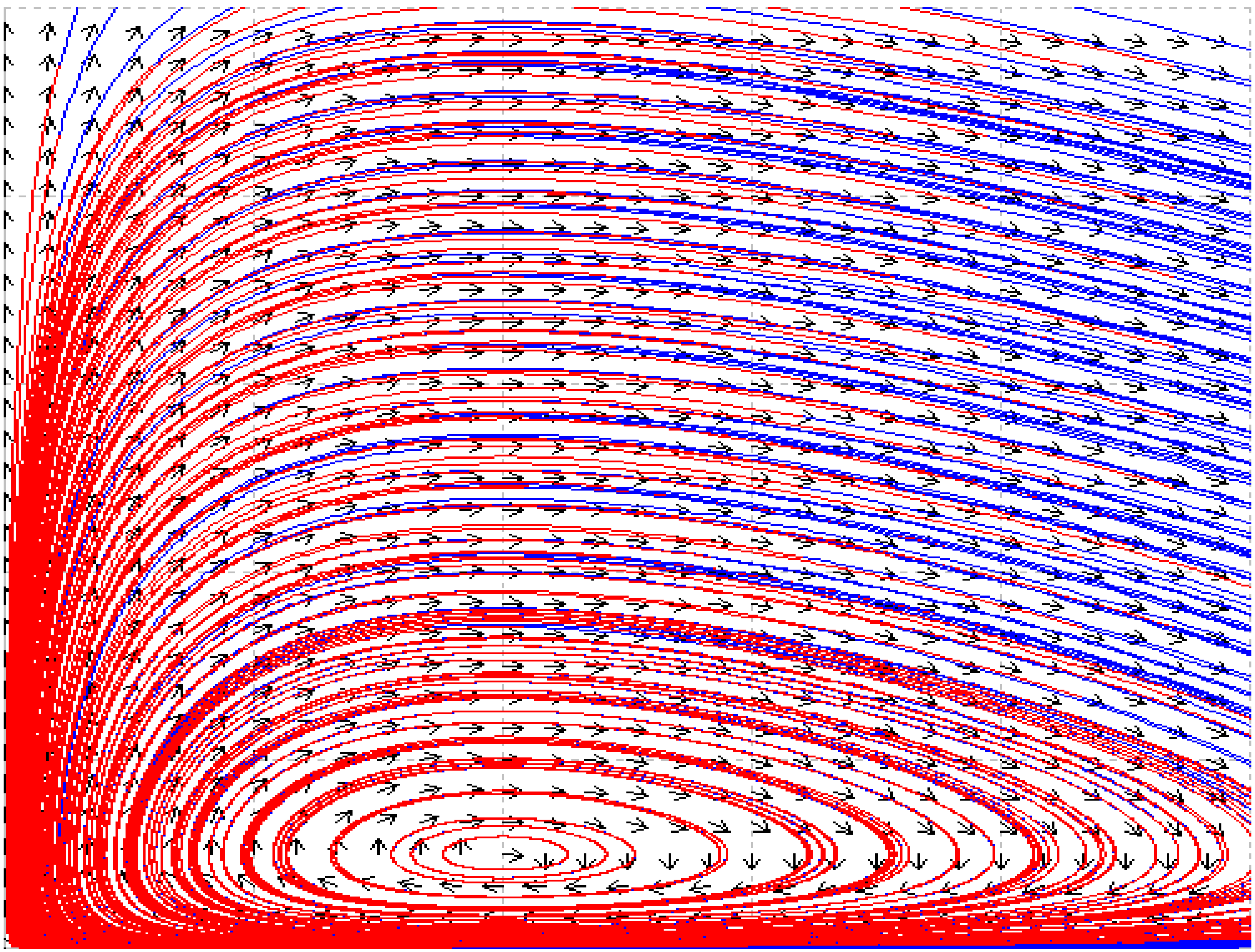
Excel(VBA)
による数値計算

数値計算（ルンゲ・クッタ法）



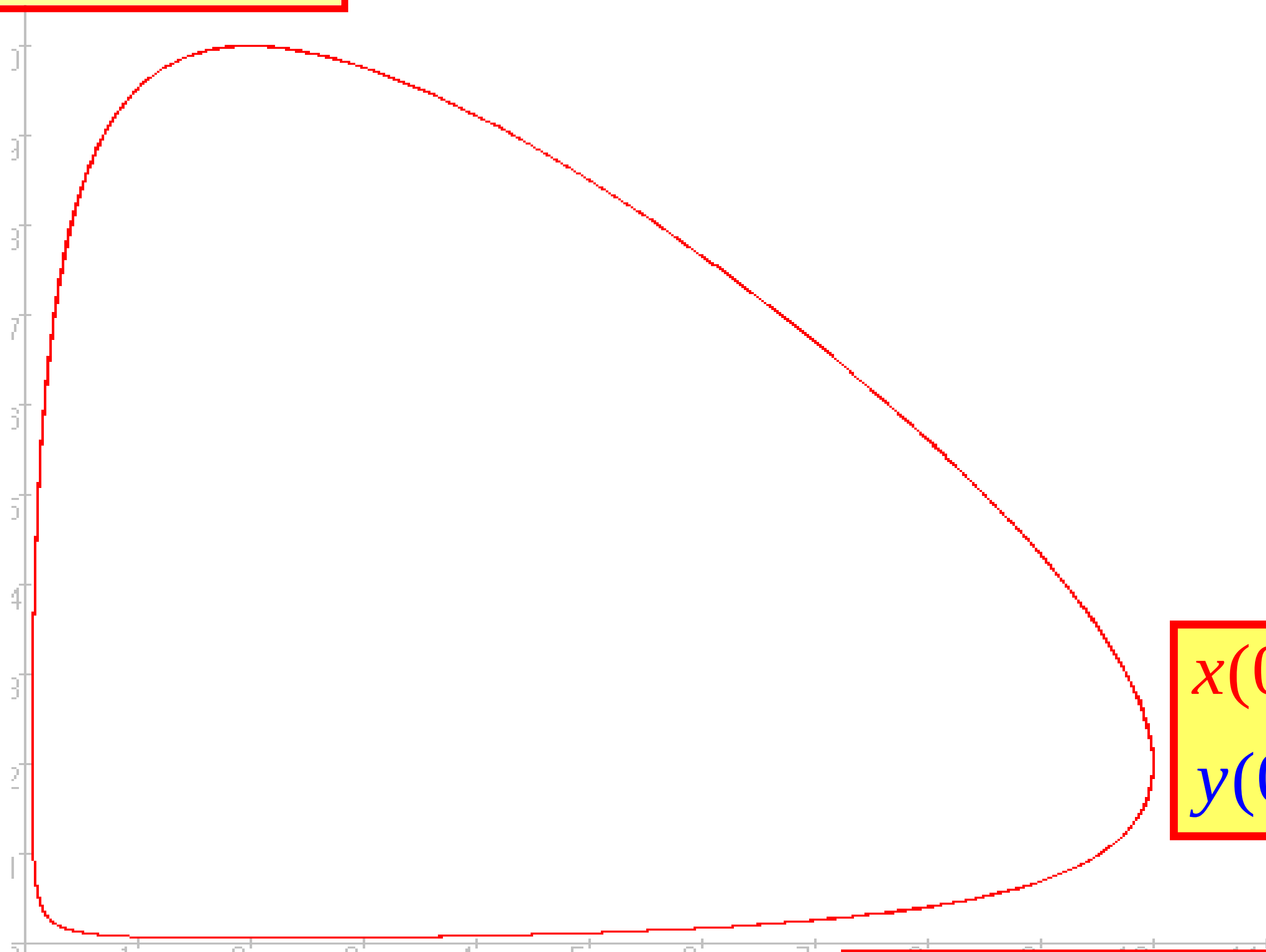
BASIC
による数値計算

初期条件による解軌道の全体



Runge-Kutta Method

捕食する個体数 $y(t)$



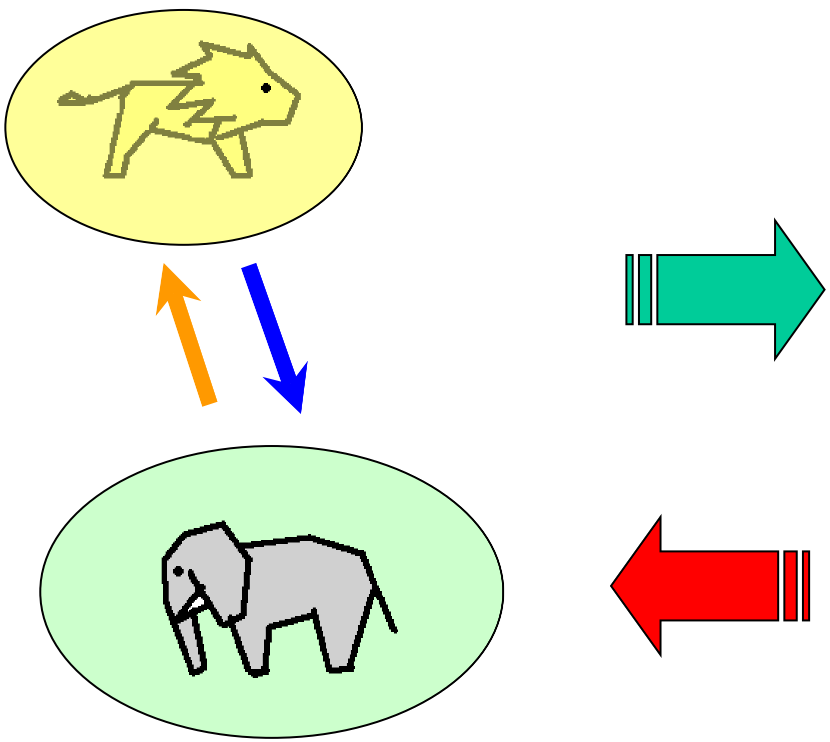
$x(0) = 10$

$y(0) = 2$

餌になる個体数 $x(t)$

ヴォルテラの
競争モデル

2種の競争方程式



$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = r_1(1 - ax(t) - by(t))x(t) \\
\dfrac{dy}{dt} = r_2(1 - cy(t) - dx(t))y(t) \\
x(0) = \alpha \\
y(0) = \beta
\end{cases}
$$

現実のモデル　　　　**微分方程式**

方程式の数理生態的解釈

生物1：競合する個体数 $x(t)$

生物2：競合する個体数 $y(t)$

ヴォルテラの競争方程式

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = r_1\left(1 - ax(t) - by(t)\right)x(t) \\
\dfrac{dy}{dt} = r_2\left(1 - cy(t) - dx(t)\right)y(t) \\
x(0) = \alpha \\
y(0) = \beta
\end{cases}
$$

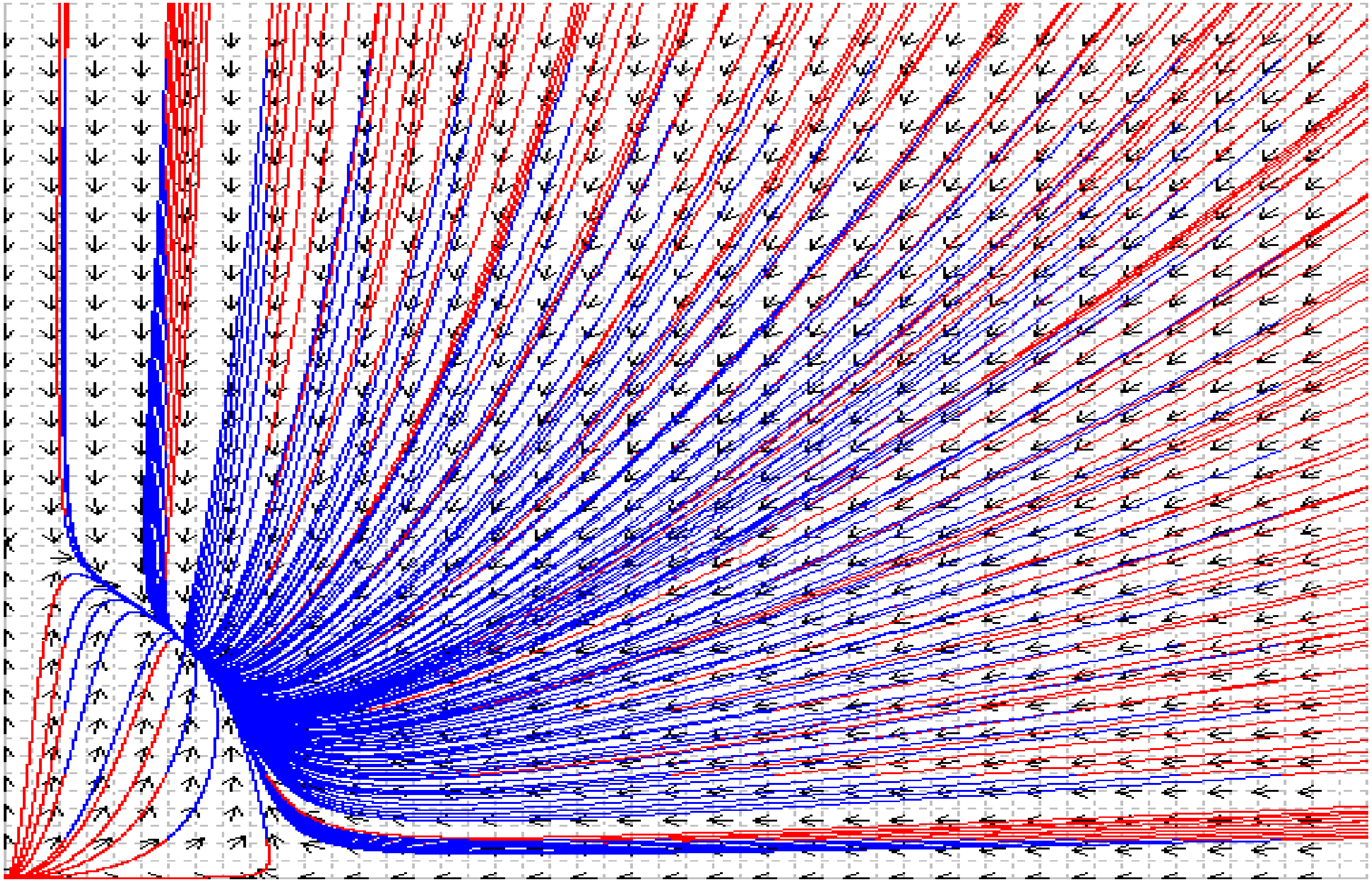
ヴォルテラ方程式の解の分類

BASIC
による数値計算

２種が共存する場合

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = (1 - 0.1x(t) - 0.025y(t))x(t) \\
\dfrac{dy}{dt} = 2(1 - 0.05y(t) - 0.05x(t))y(t)
\end{cases}
$$

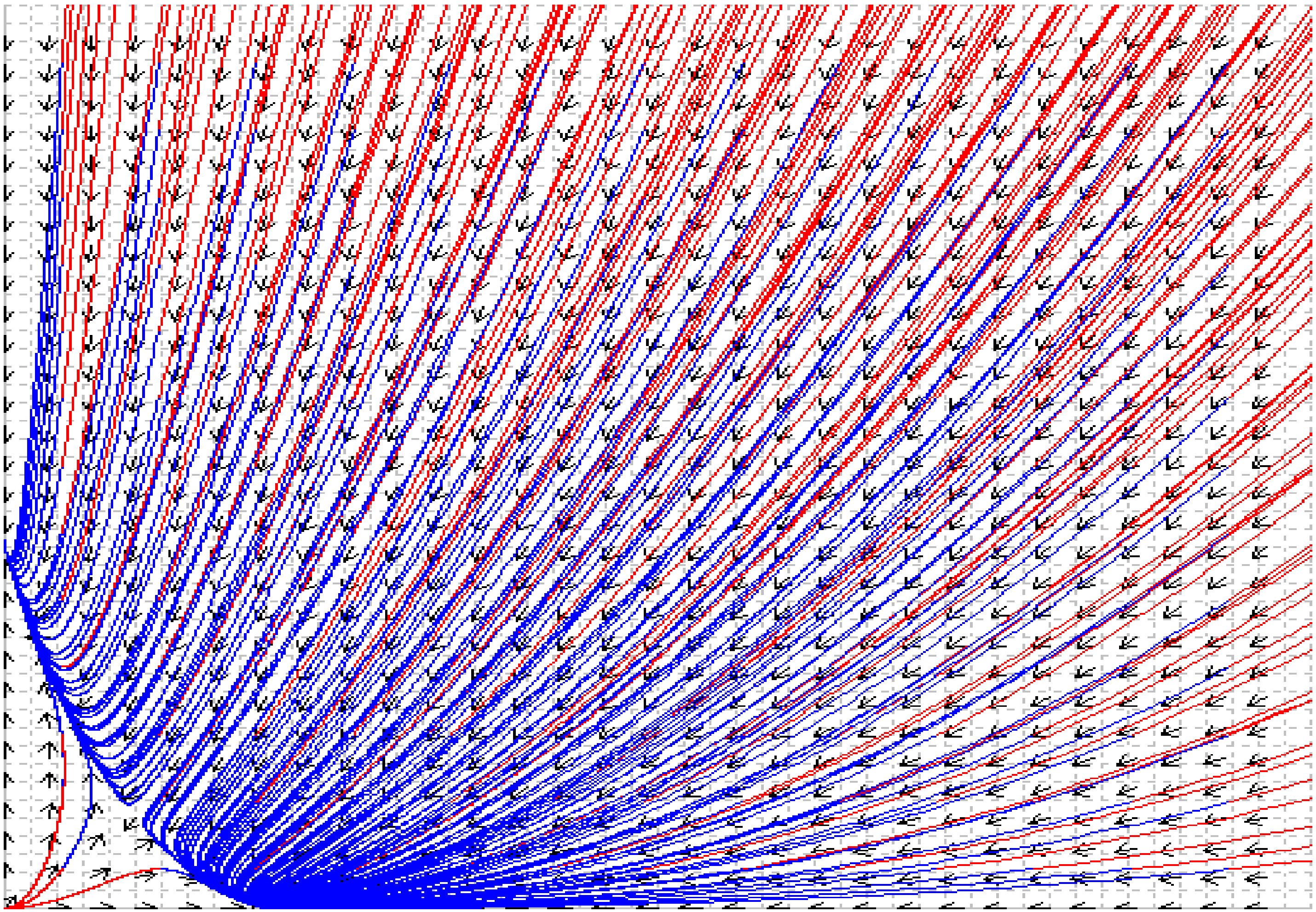
2種が共存する場合



初期値によって分かれる場合

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = (1 - 0.1x(t) - 0.1y(t))x(t) \\
\dfrac{dy}{dt} = 2(1 - 0.05y(t) - 0.15x(t))y(t)
\end{cases}
$$

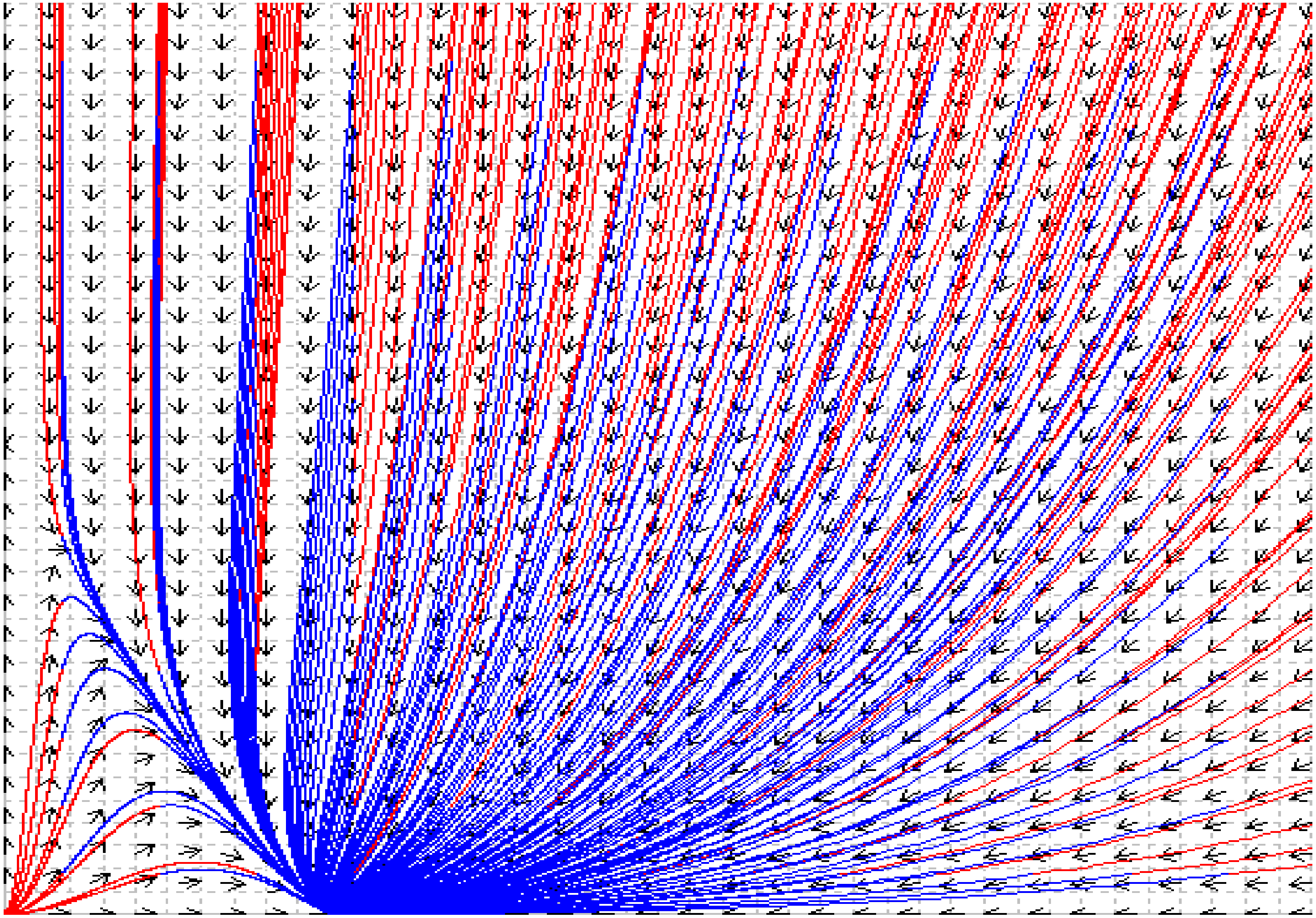
初期値によって分かれる場合



一方のみが生き残る場合

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (1 - 0.1x(t) - 0.025y(t))x(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = 2(1 - 0.05y(t) - 0.15x(t))y(t) \end{cases}$$

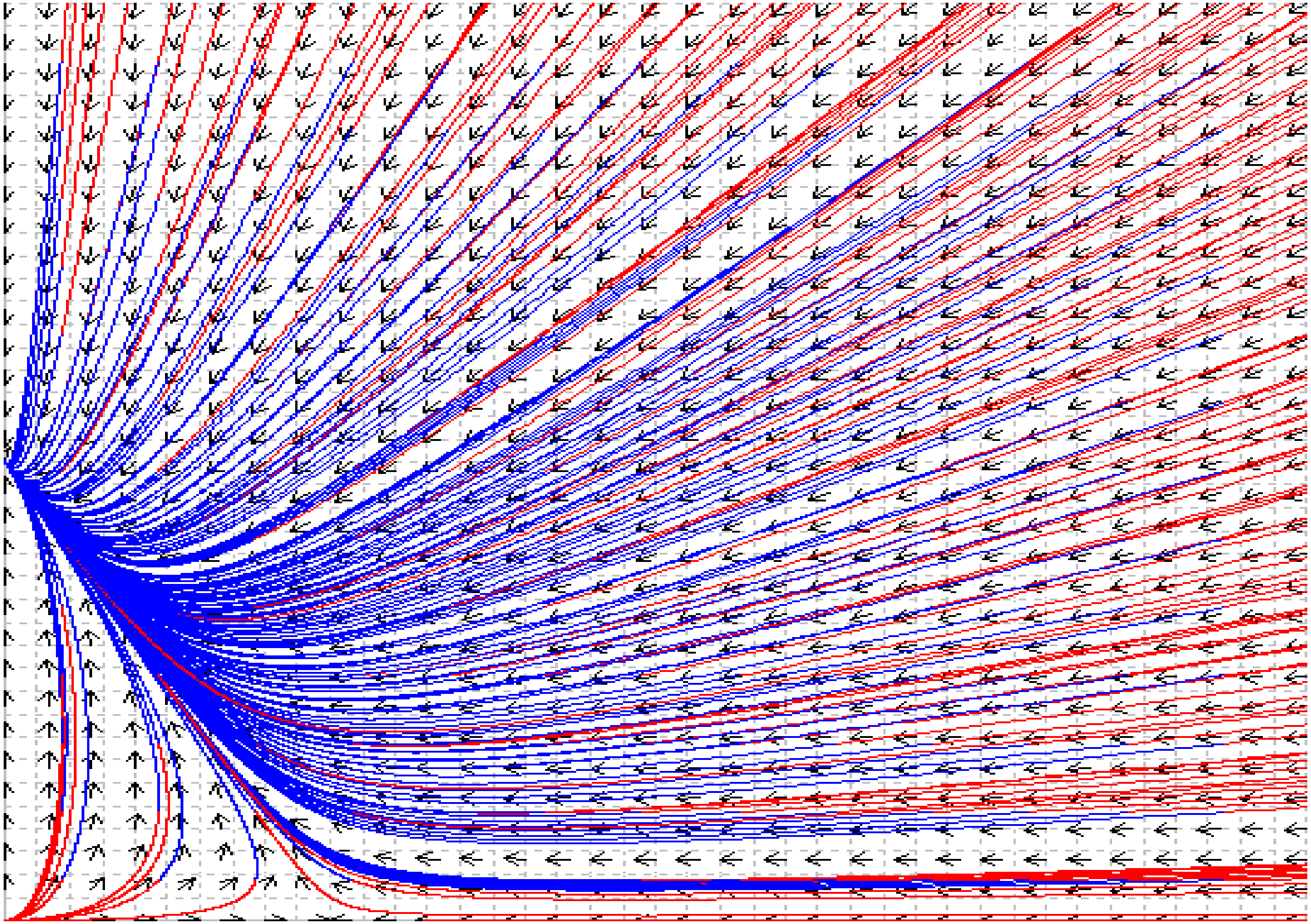
一方のみが生き残る場合



他方のみが生き残る場合

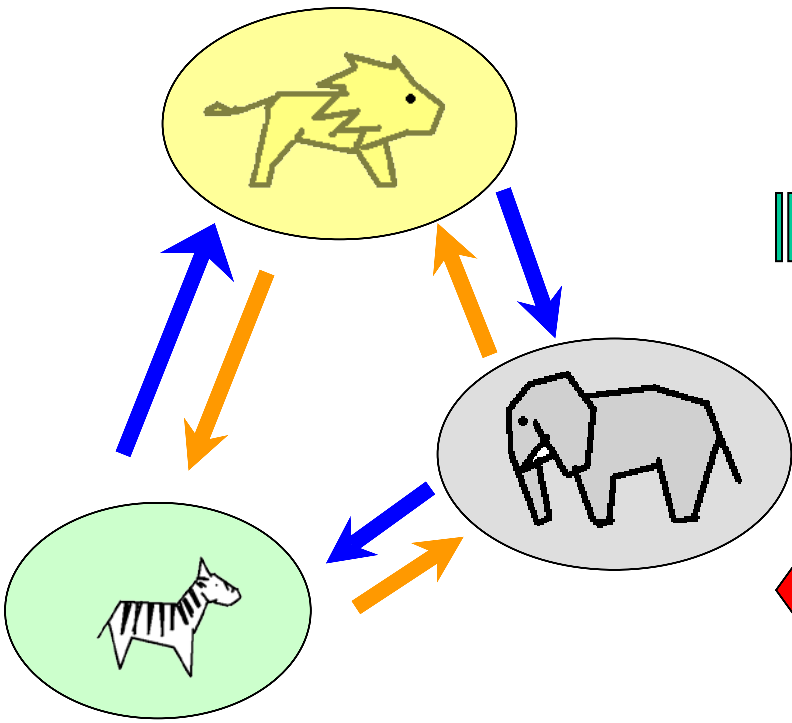
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (1 - 0.1x(t) - 0.1y(t))x(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = 2(1 - 0.05y(t) - 0.05x(t))y(t) \end{cases}$$

他方のみが生き残る場合



3すくみモデル
の解の漸近挙動

巡回的競争モデル方程式



$$\dot{x}_i = x_i\left(r_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

現実のモデル

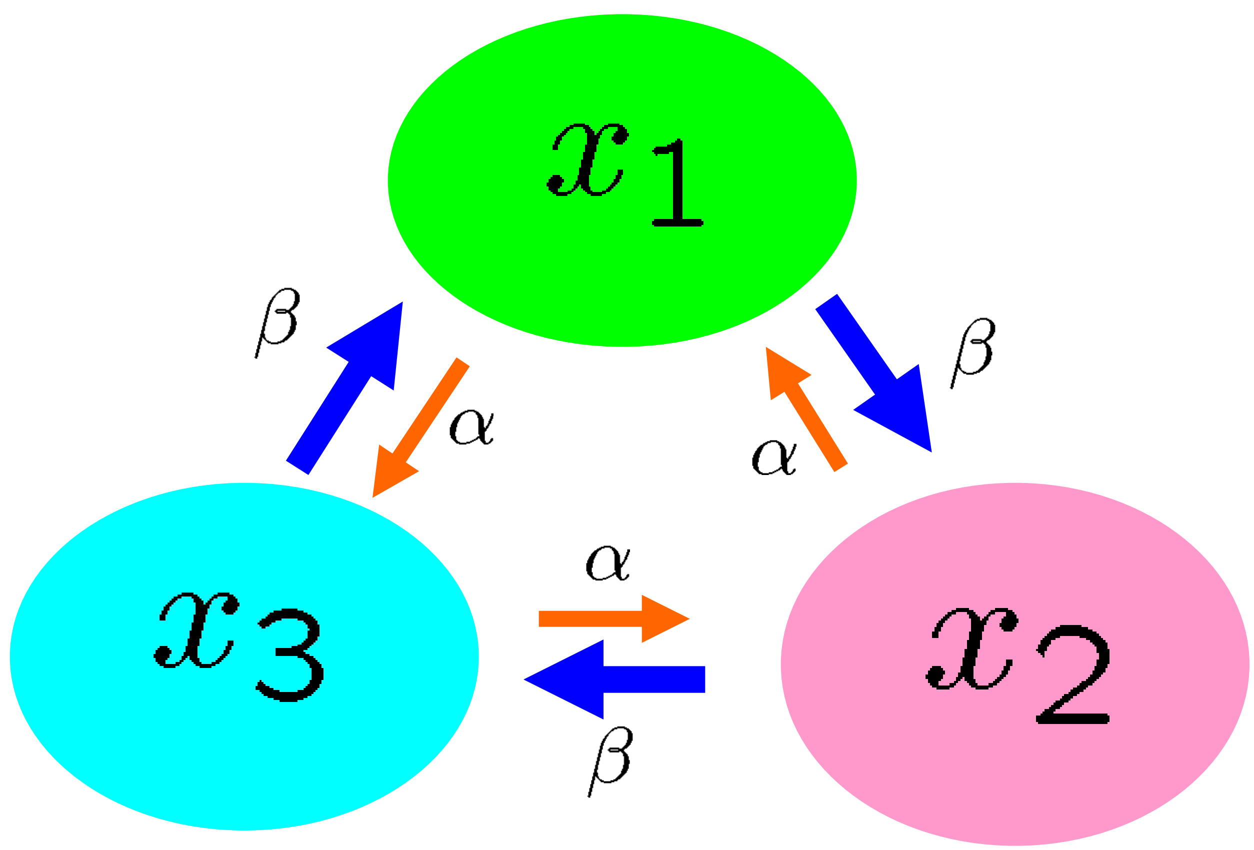
微分方程式

３すくみ競争モデル方程式

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = x_1(1 - x_1 - \alpha x_2 - \beta x_3) \\
\dot{x}_2 = x_2(1 - \beta x_1 - x_2 - \alpha x_3) \\
\dot{x}_3 = x_3(1 - \alpha x_1 - \beta x_2 - x_3)
\end{cases}
$$

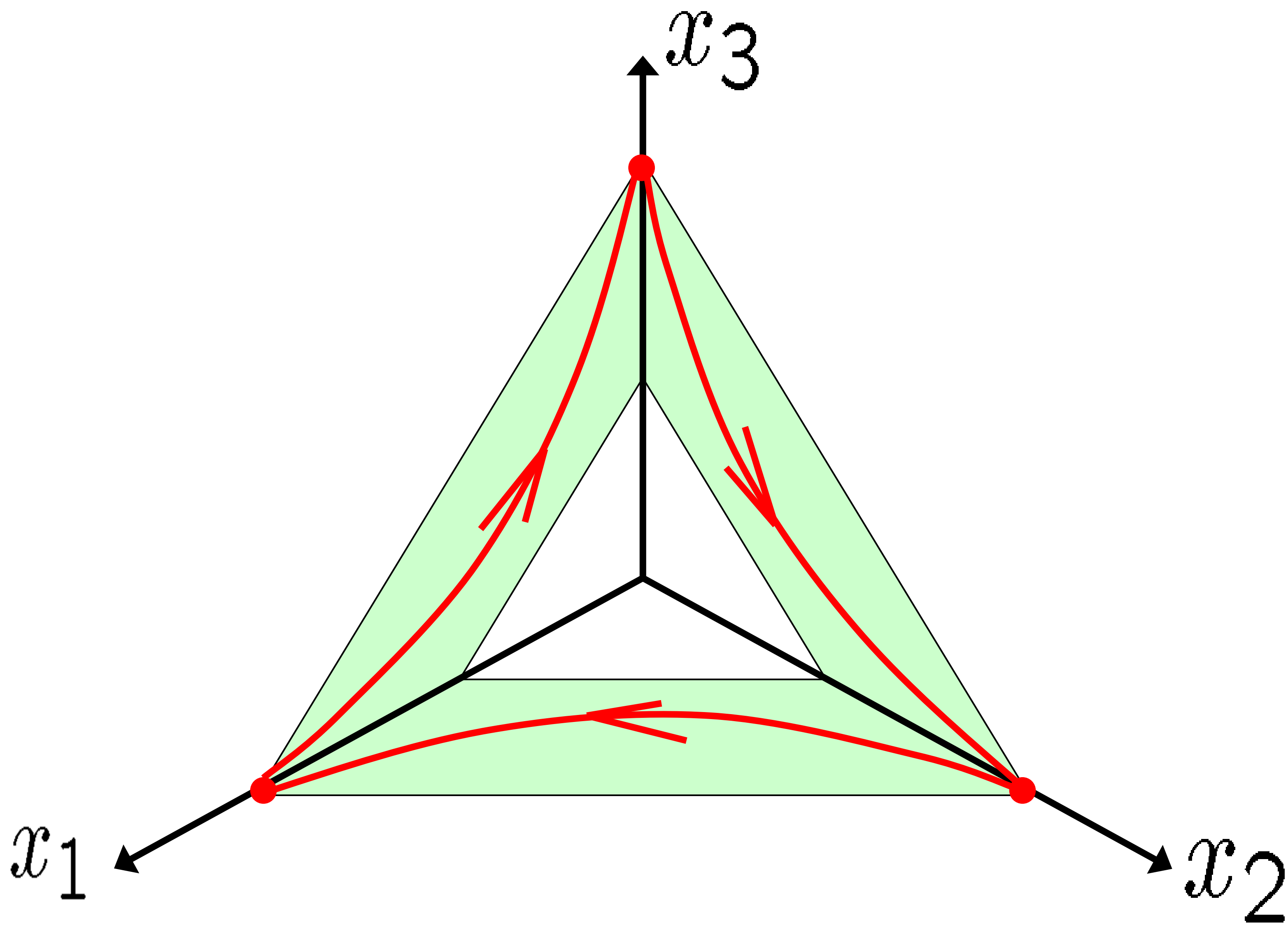
$$0 < \alpha < 1 < \beta$$

３すくみのモデル図

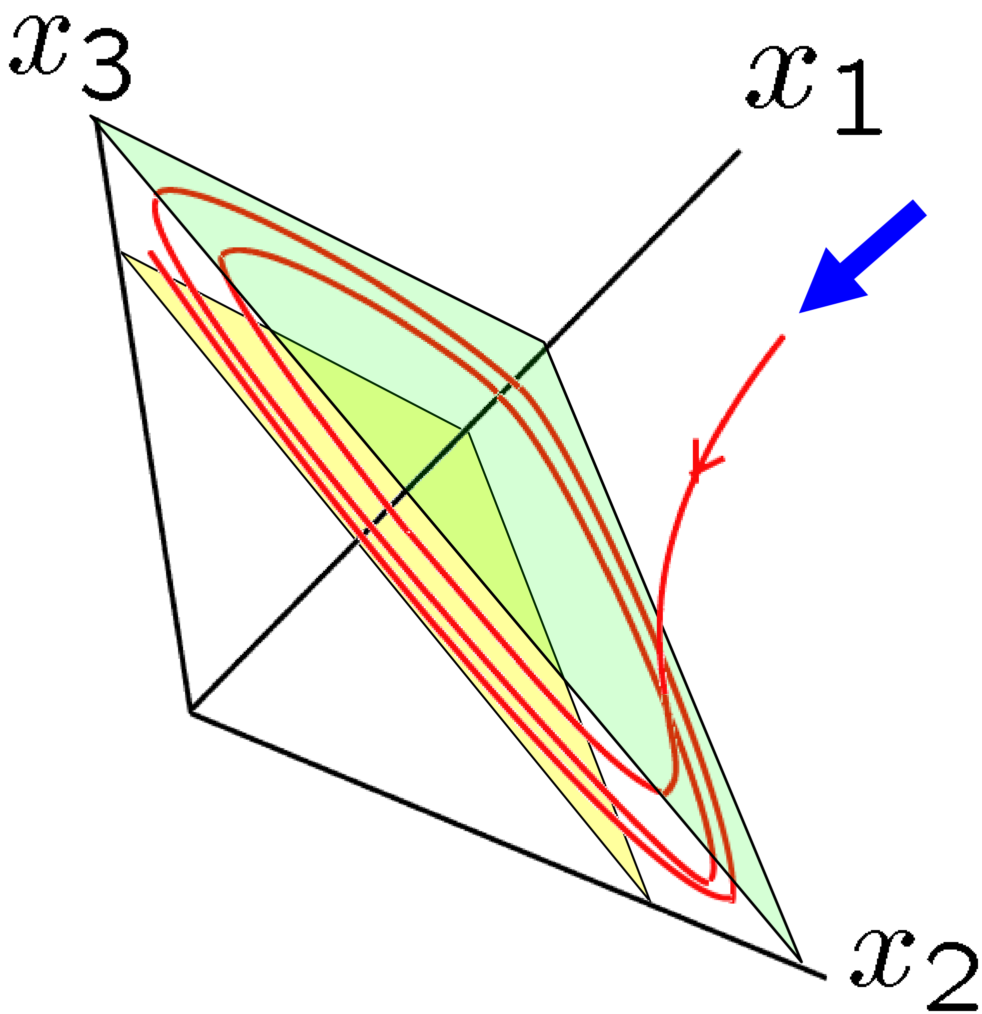


数値計算の例
（Mathematica）

解の全体の軌道(上から見た)



解の全体の軌道(下から見た)



拡散現象の数理

拡散現象の代表的な例

- ●ブラウン運動（物理学）

- ●化学反応速度論（化学）

- ●人口動態論（数理生態学）

ブラウン運動の数理

研究のキャッチフレーズ

研究テーマ	現実の問題
ブラウン運動	杉花粉の飛散 （花粉症対策）

ブラウン運動の例

- 静止水面上の花粉の運動
- 無風の空気中の煙の運動

◆ 流れる川の中の花粉の運動

◆ 風の中の煙の運動

Robert Brown

ブラウン

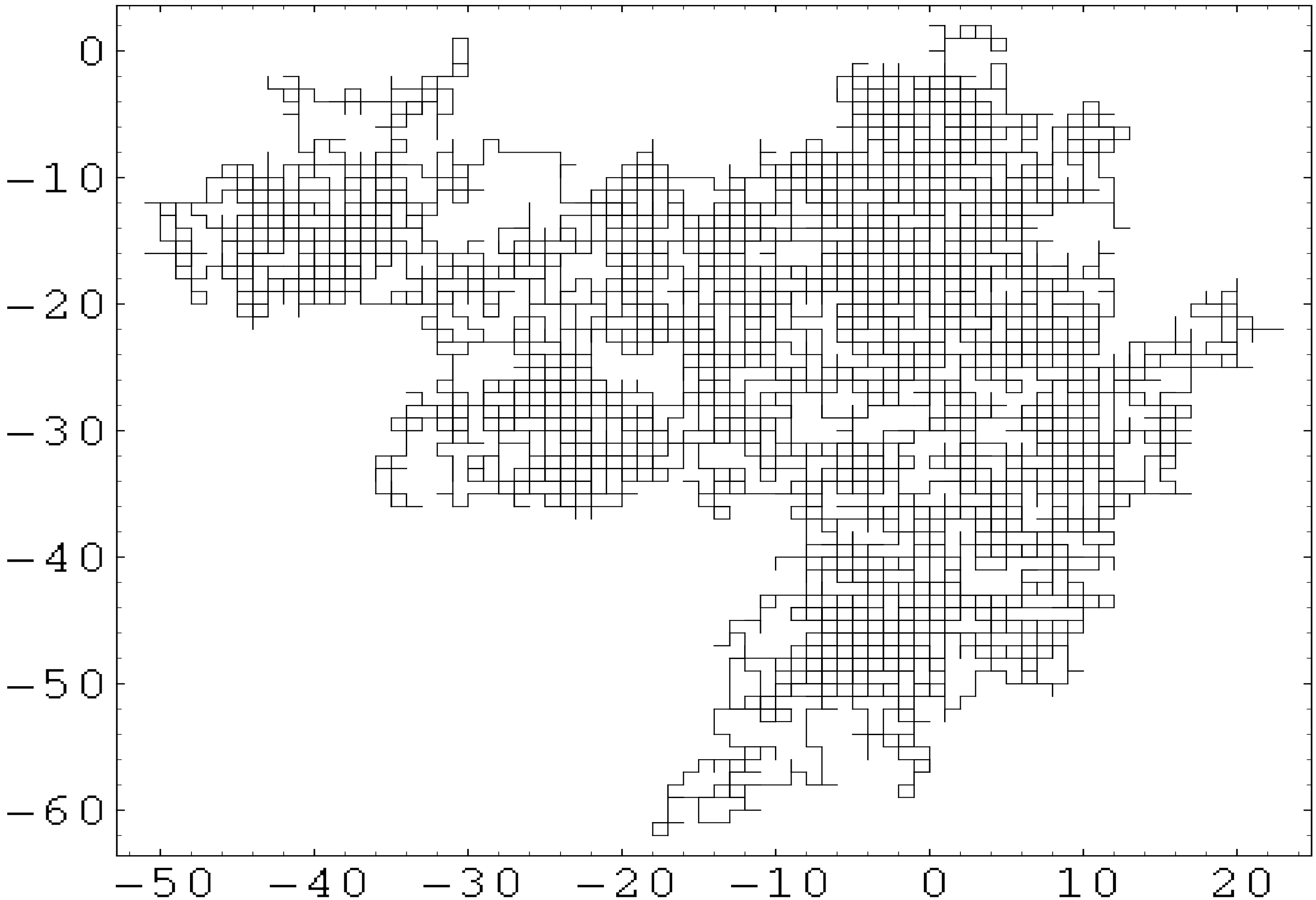
◆Robert Brown (1773-1858)

Scottish Botanist

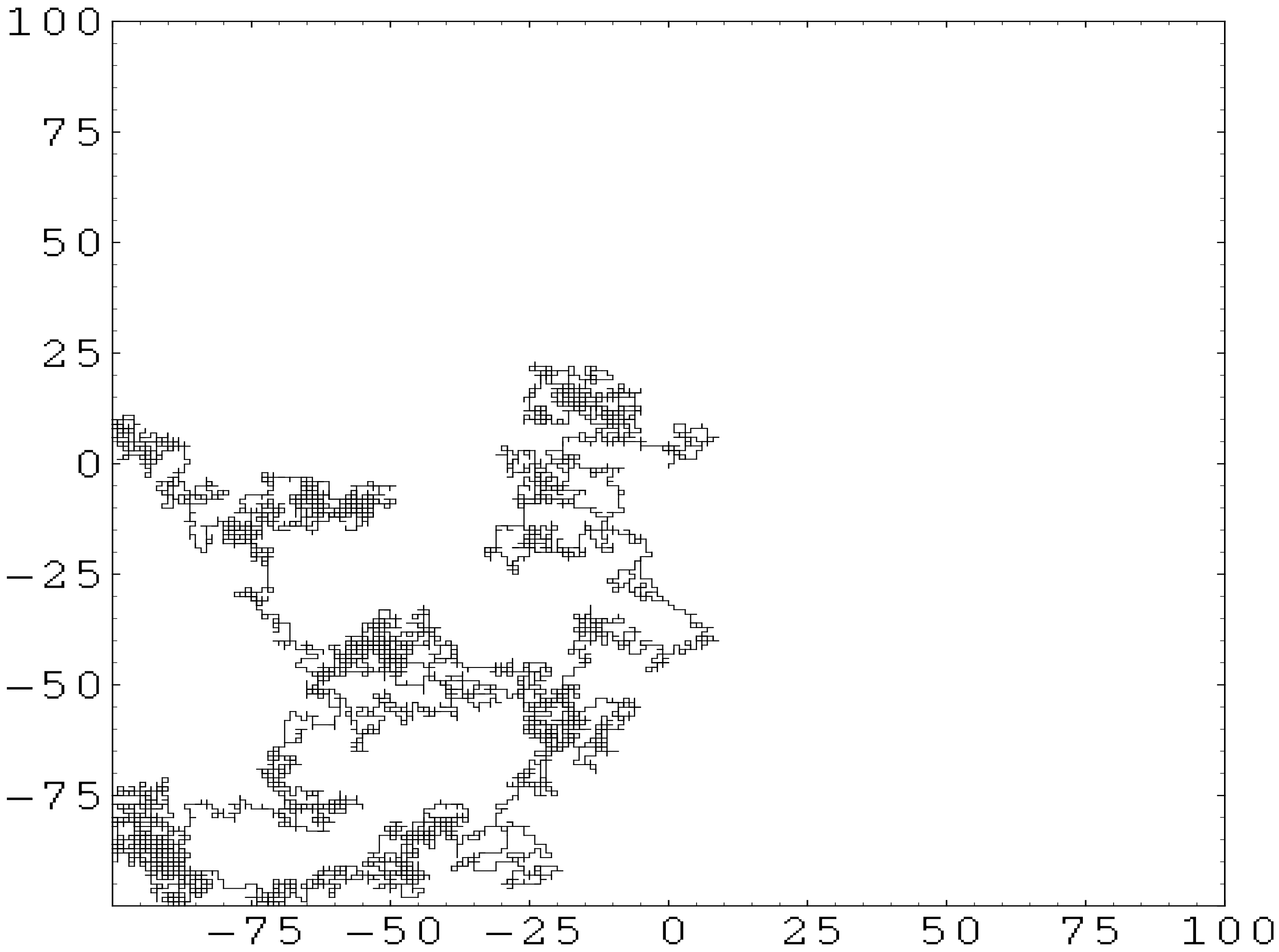
ブラウン運動のグラフ

（Mathematica）

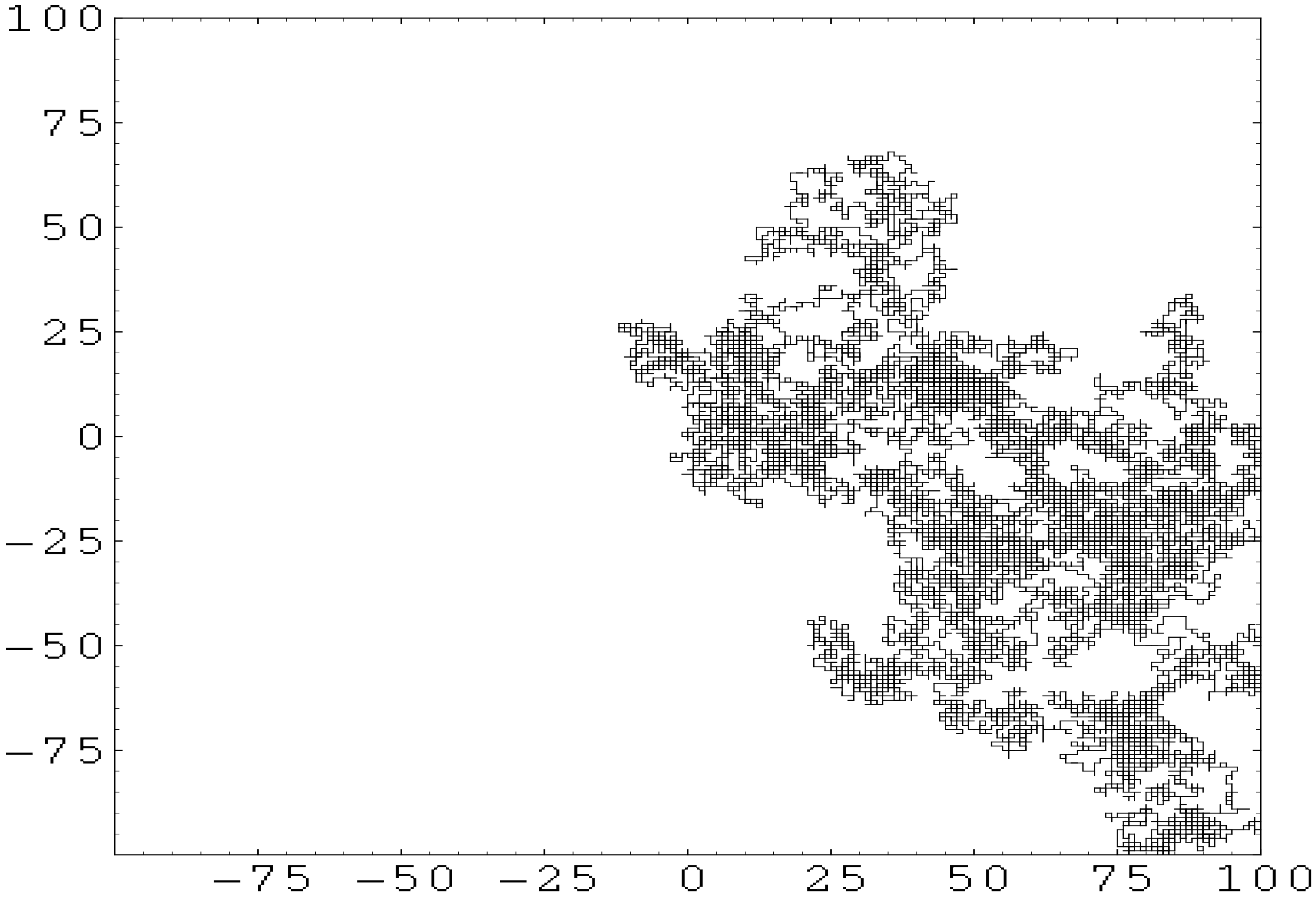
２次元ランダムウォーク



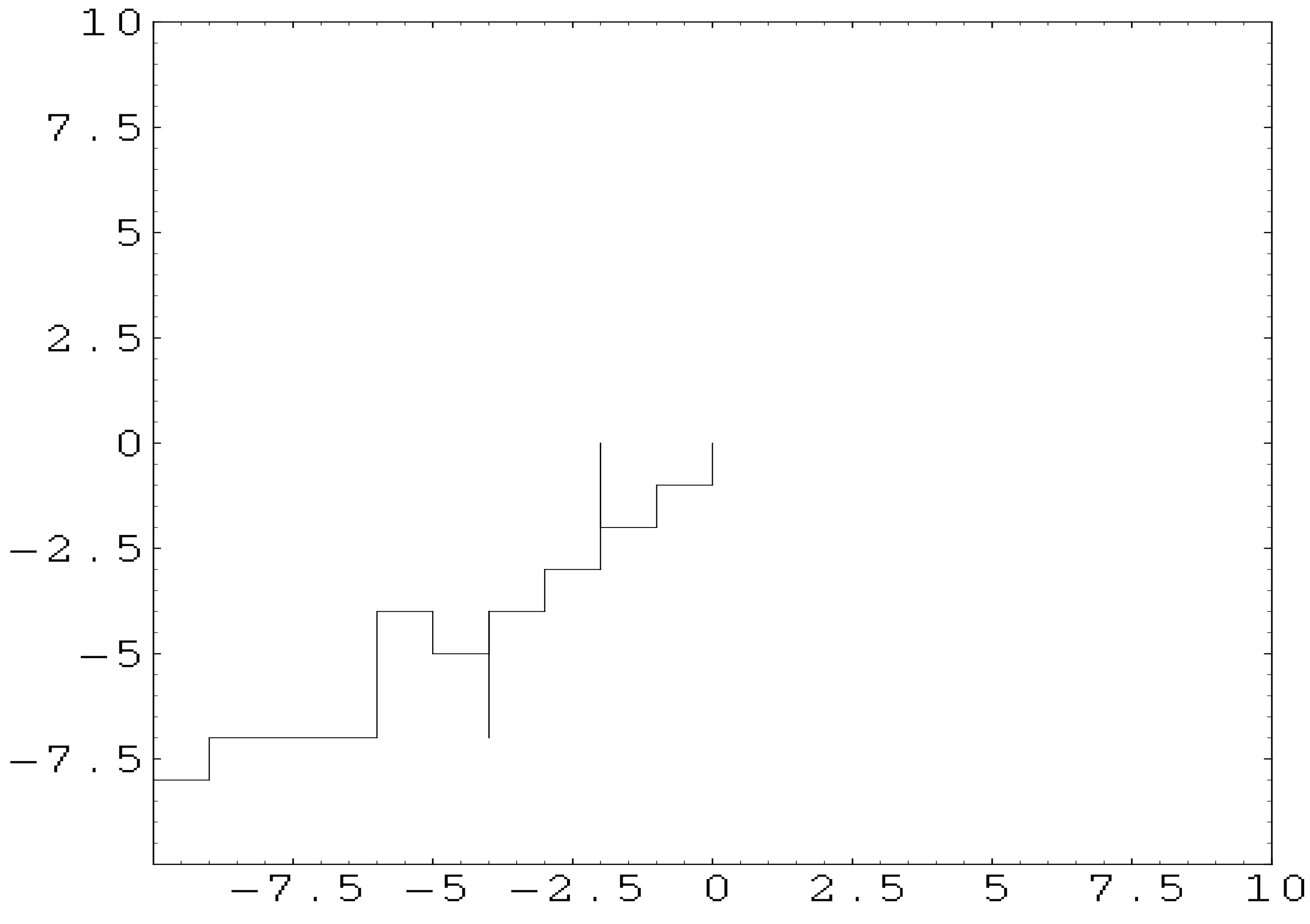
2次元反射壁ランダムウォーク（１）



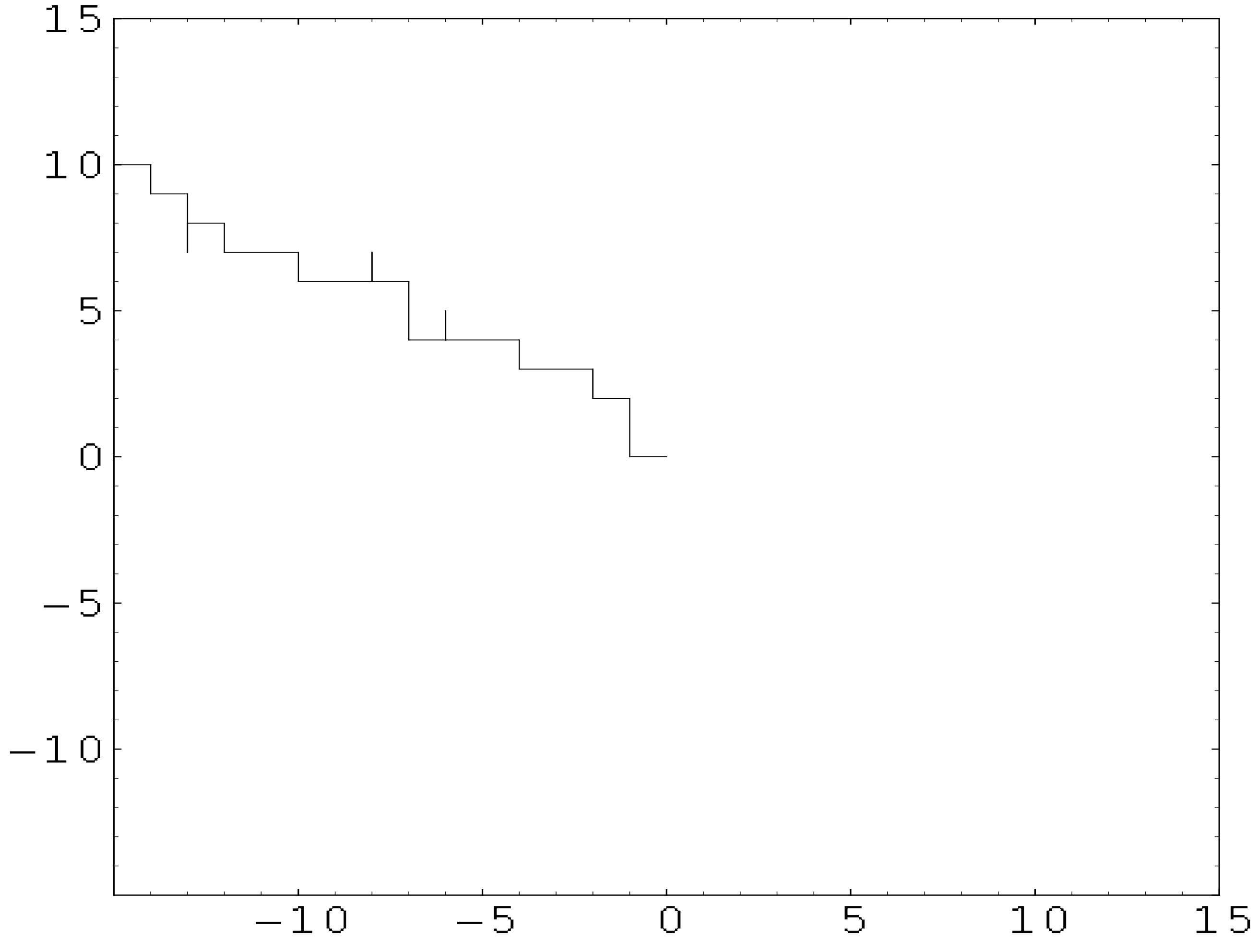
2次元反射壁ランダムウォーク（２）



2次元吸収壁ランダムウォーク（1）



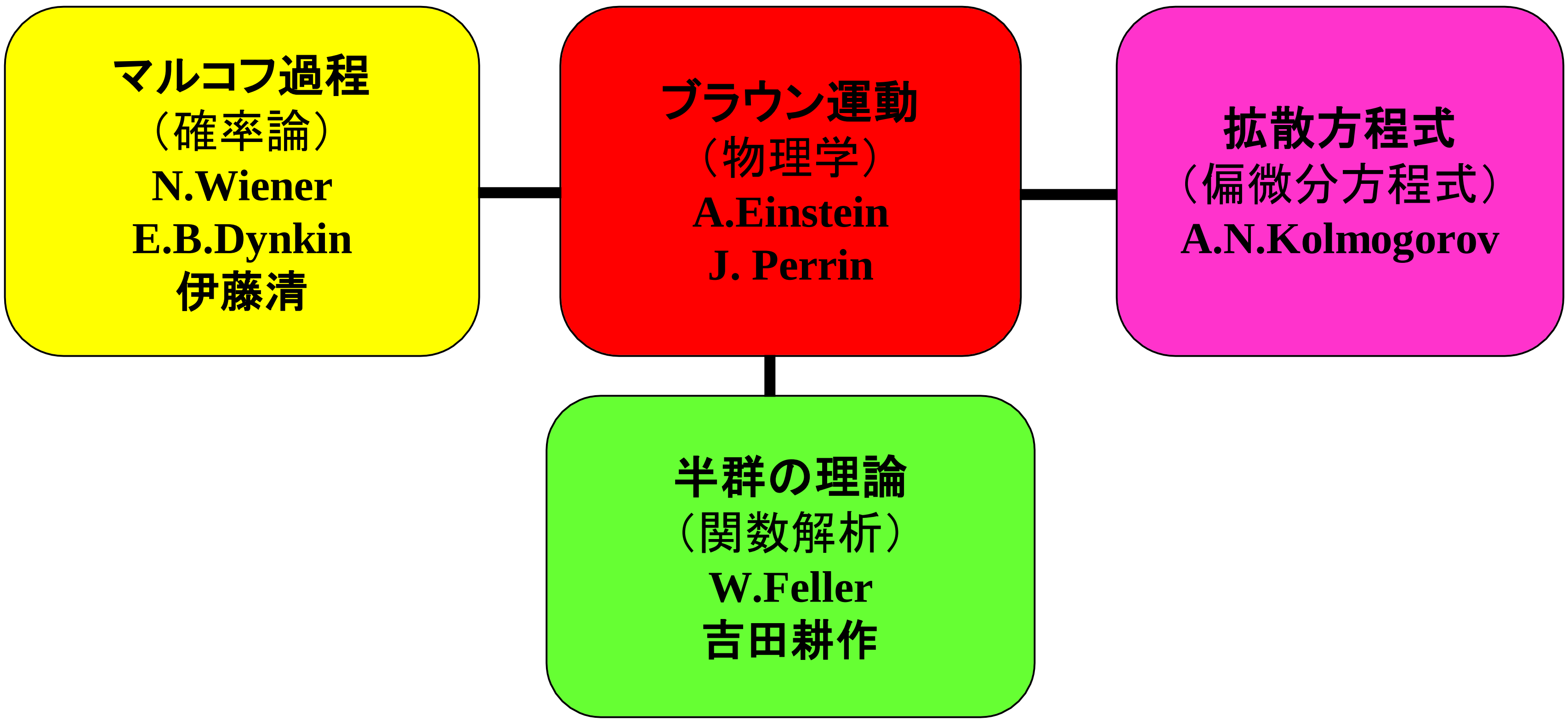
2次元吸収壁ランダムウォーク（２）



ブラウン運動小史

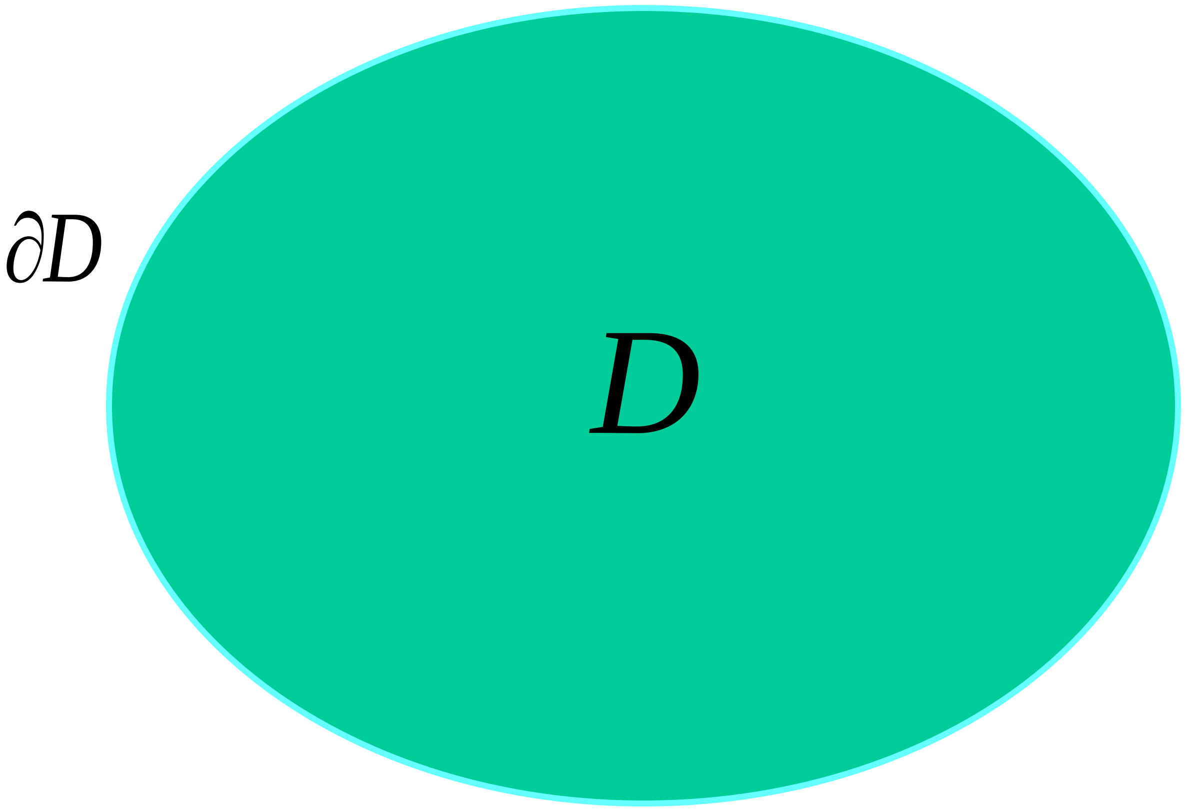
- ■1828年 ブラウン 花粉の運動の観察
- ■1905年 アインシュタイン ブラウン運動の物理的解明
- ■1906年 ペラン ブラウン運動のアインシュタイン理論の実験的検証（アボガドロ数の実験値）
- ■1923年 ウィナー ブラウン運動の数学的研究

ブラウン運動の数学的研究



ブラウン運動の分類問題

有界領域



拡散過程の分類問題

◆拡散過程を解析的に分類する。

結論（数学的結果）

- 領域の内部での拡散現象は、連続的な拡散と不連続な拡散（ジャンプ）の２つの現象によって特徴付けられる。
- 境界上の拡散現象は、吸収、反射、粘性、連続的な拡散と不連続な拡散（ジャンプ）等の６つの現象によって分類される。

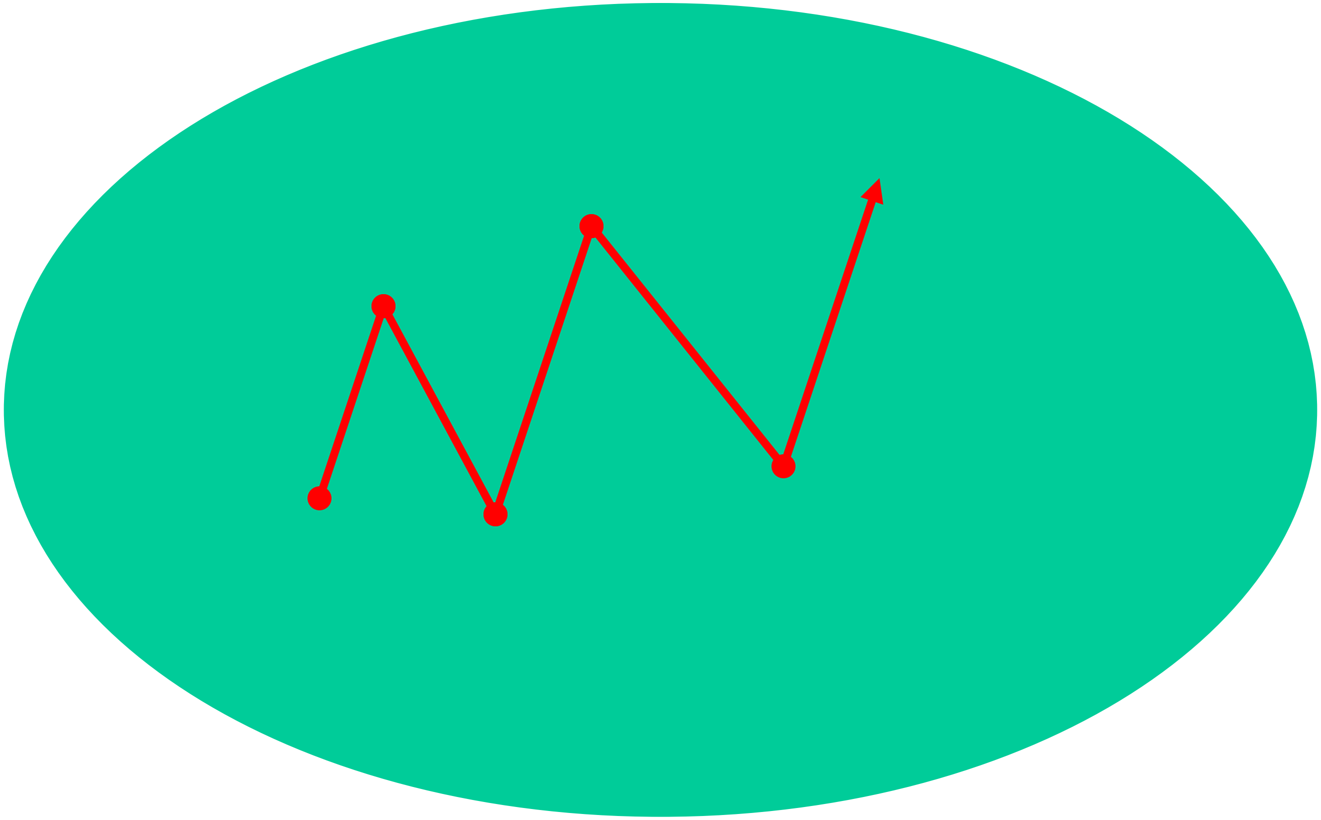
領域内部での微分積分作用素

$$\boldsymbol{Wu} := \boldsymbol{Au} + \boldsymbol{Su}$$

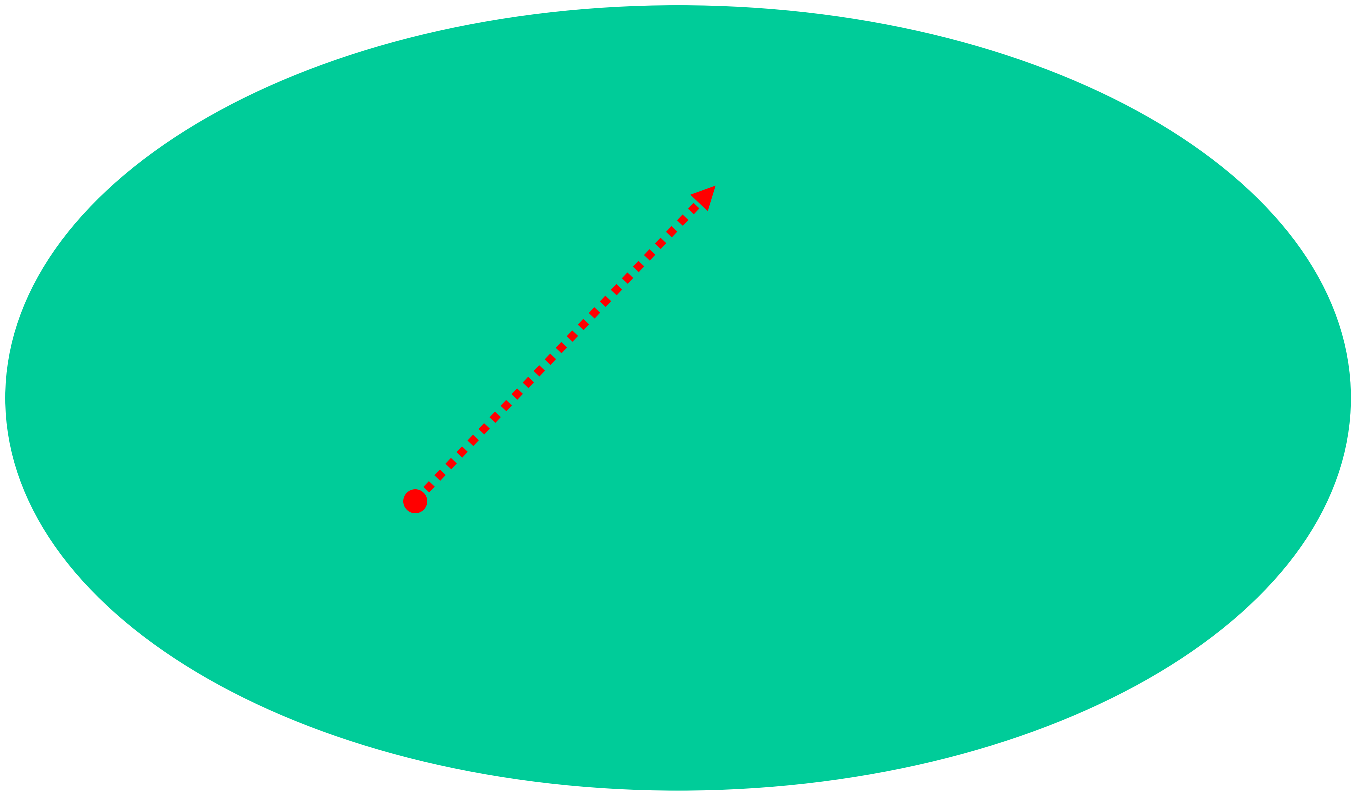
$$= \sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b^i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u$$

$$+ \int_D s(x,dy)\left[u(y) - u(x) - \sum_{j=1}^{N}(y_j - x_j)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\right]$$

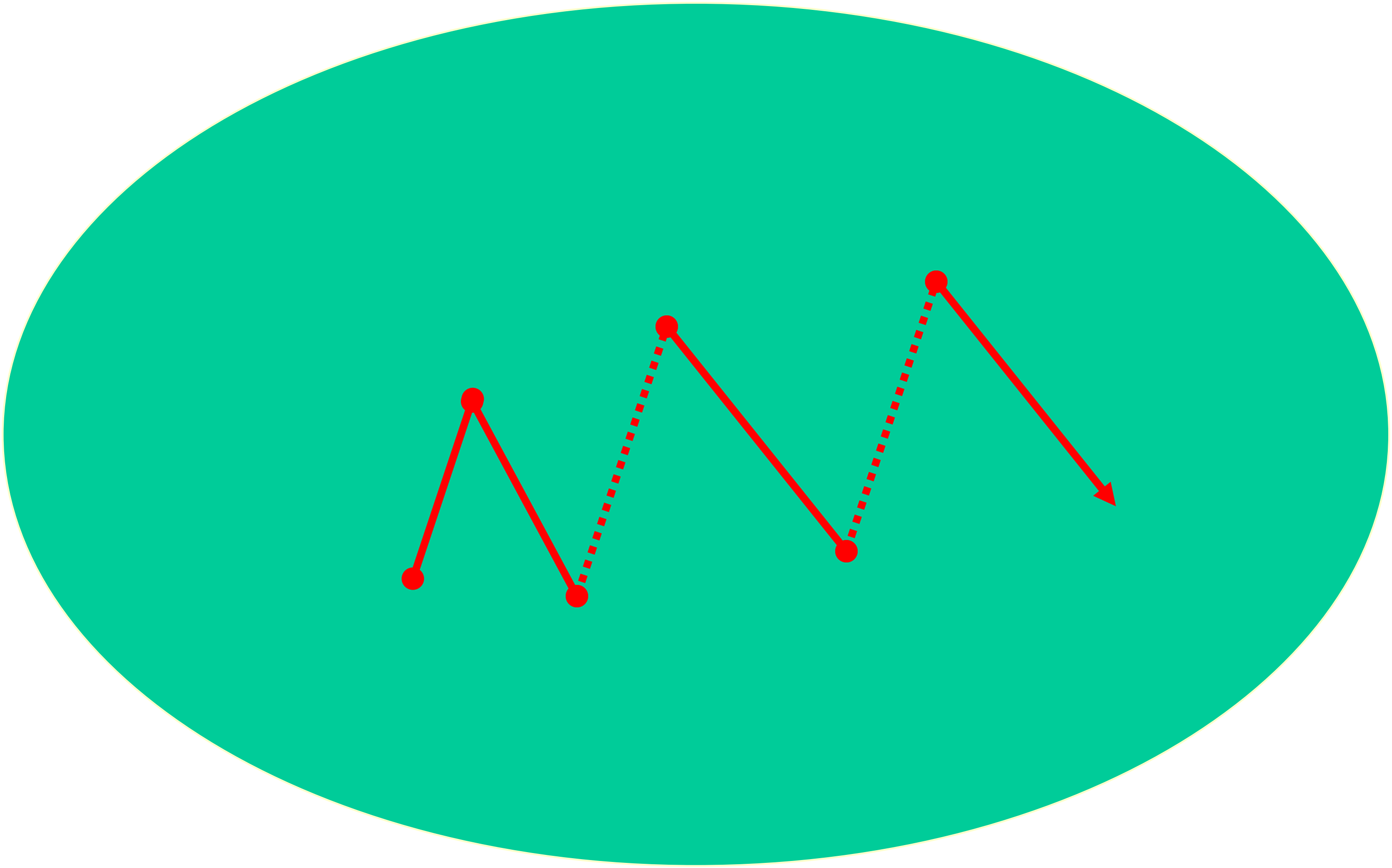
連続な拡散現象



不連続な拡散現象（ジャンプ）



領域内部での一般拡散現象



境界での一般境界条件

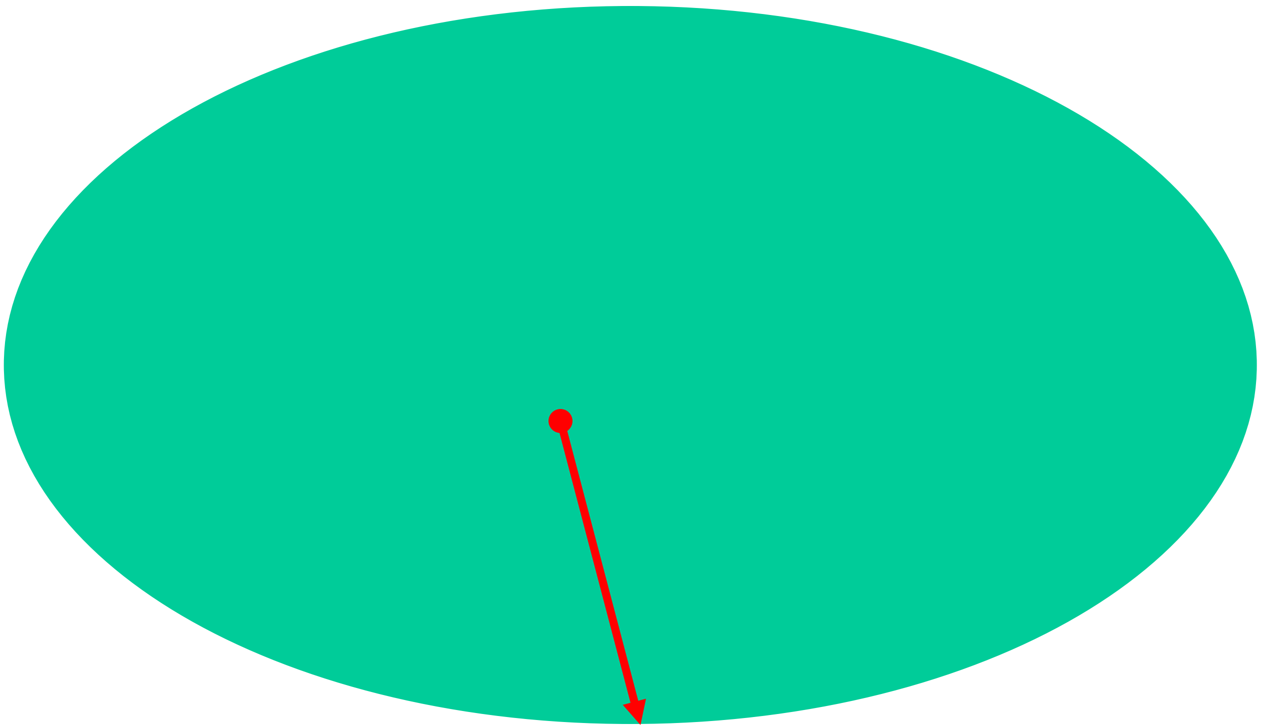
$$\boldsymbol{Lu} = \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x')\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N-1} \beta^{i}(x')\frac{\partial u}{\partial x_i} + \gamma(x')u$$

$$+\mu(x')\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - \delta(x')Wu$$

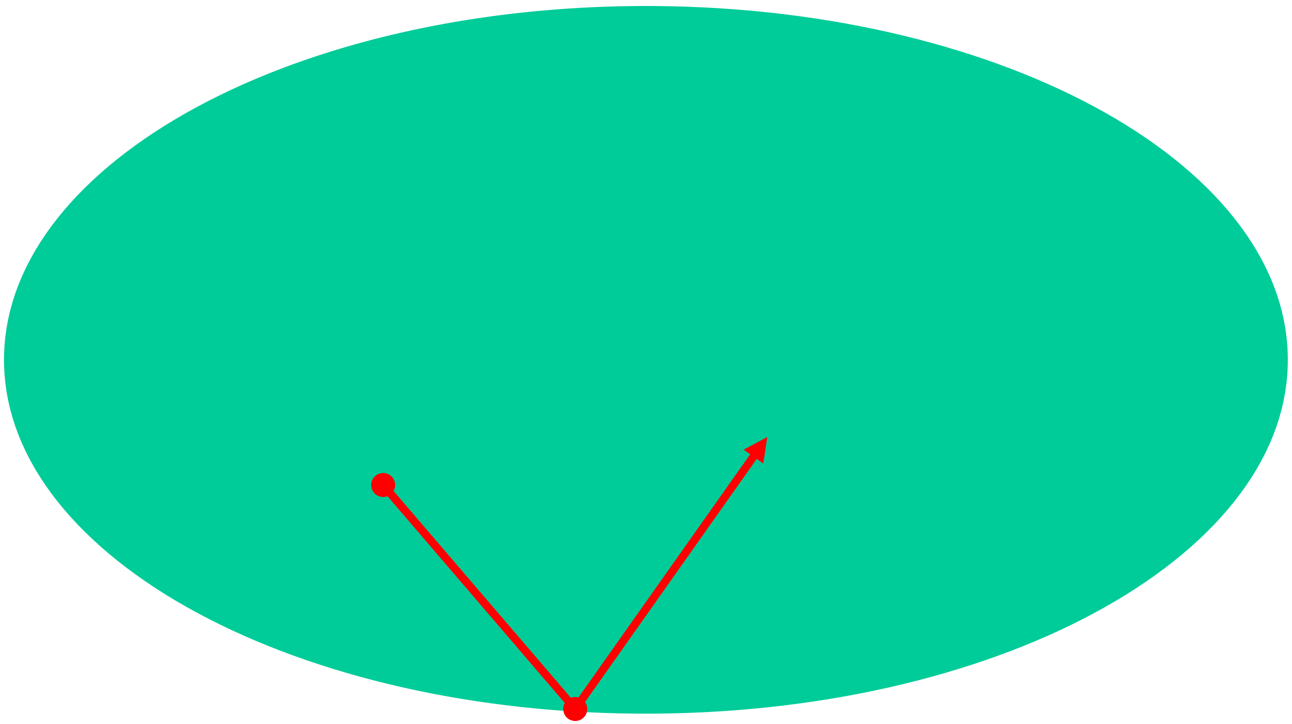
$$+\int_{\partial D} r(x',dy')\left[u(y') - u(x') - \sum_{j=1}^{N-1}(y_j - x_j)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x')\right]$$

$$+\int_{D} t(x',dy)\left[u(y) - u(x') - \sum_{j=1}^{N-1}(y_j - x_j)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x')\right]$$

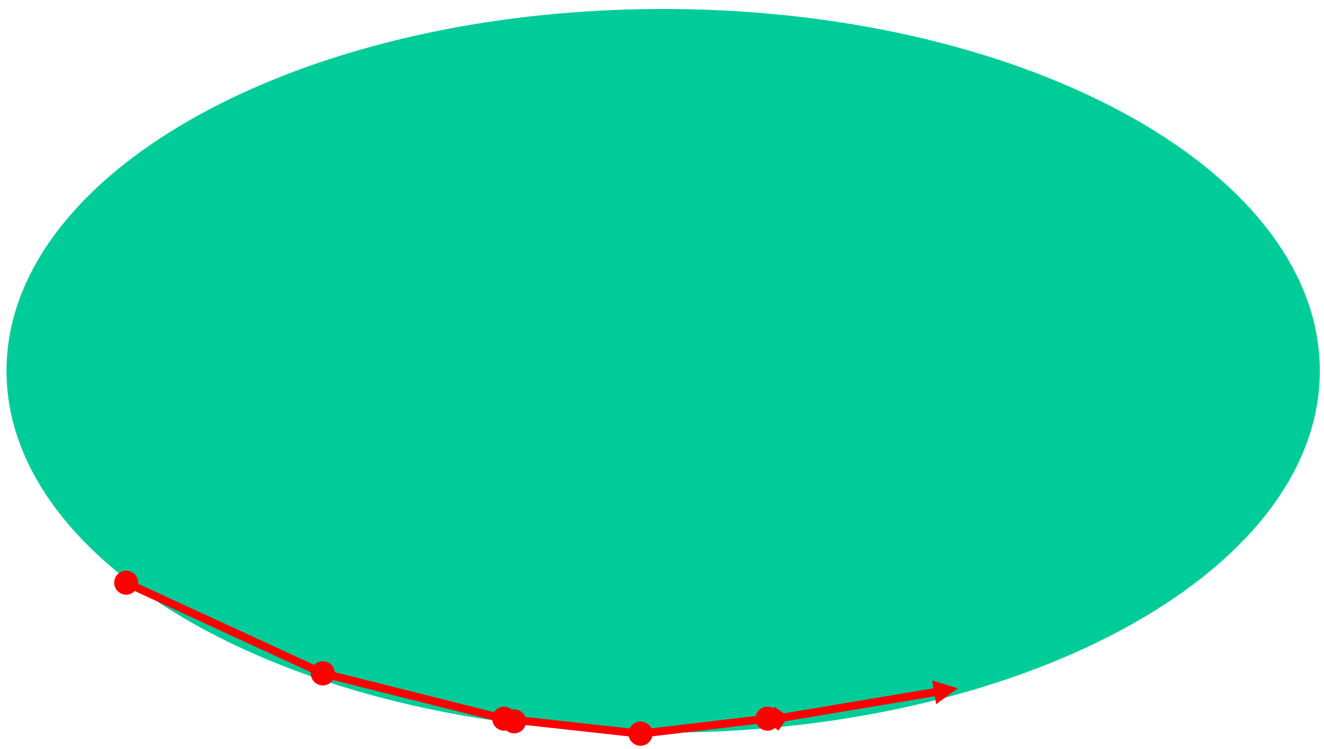
境界での吸収現象



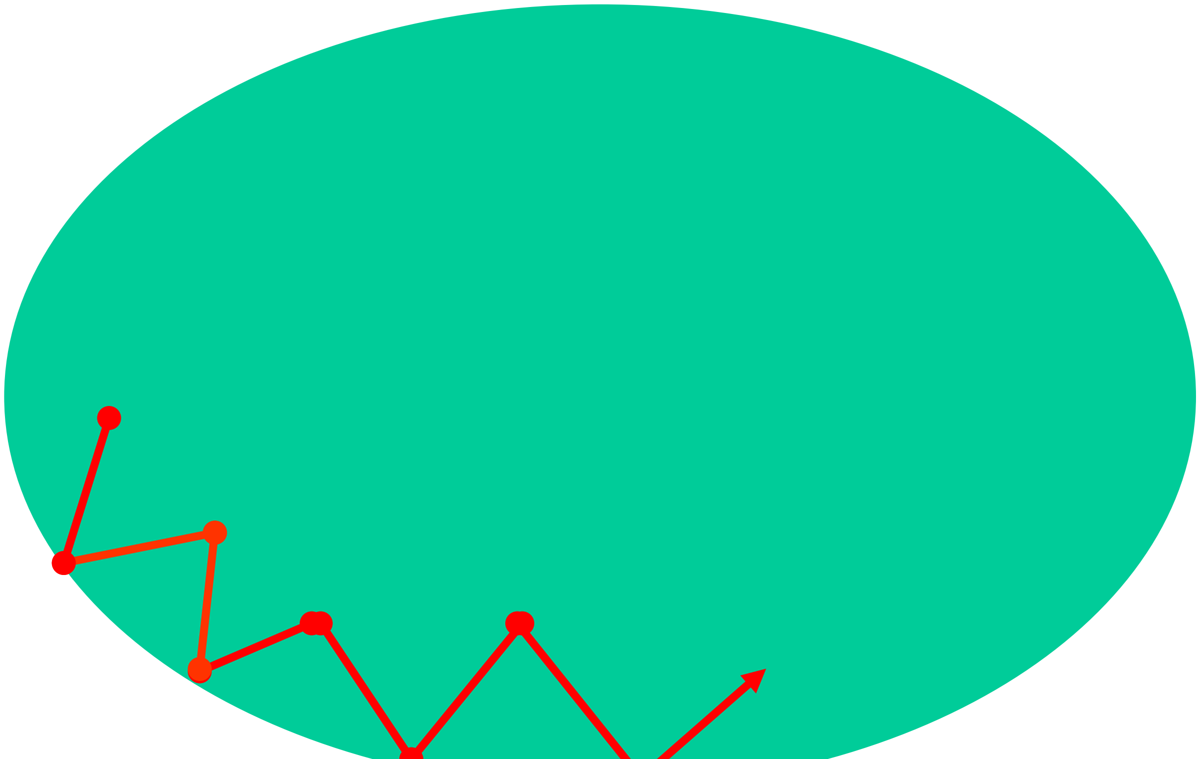
境界での反射現象



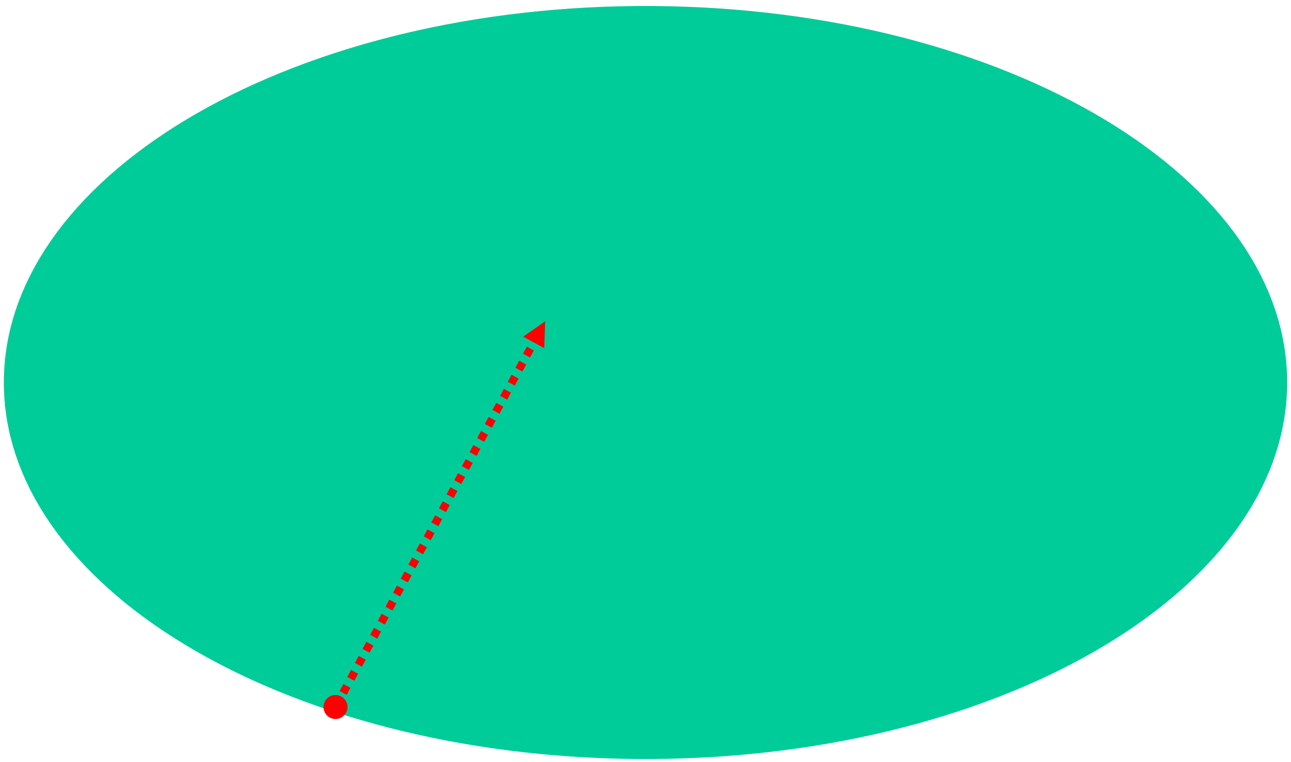
境界上の拡散現象



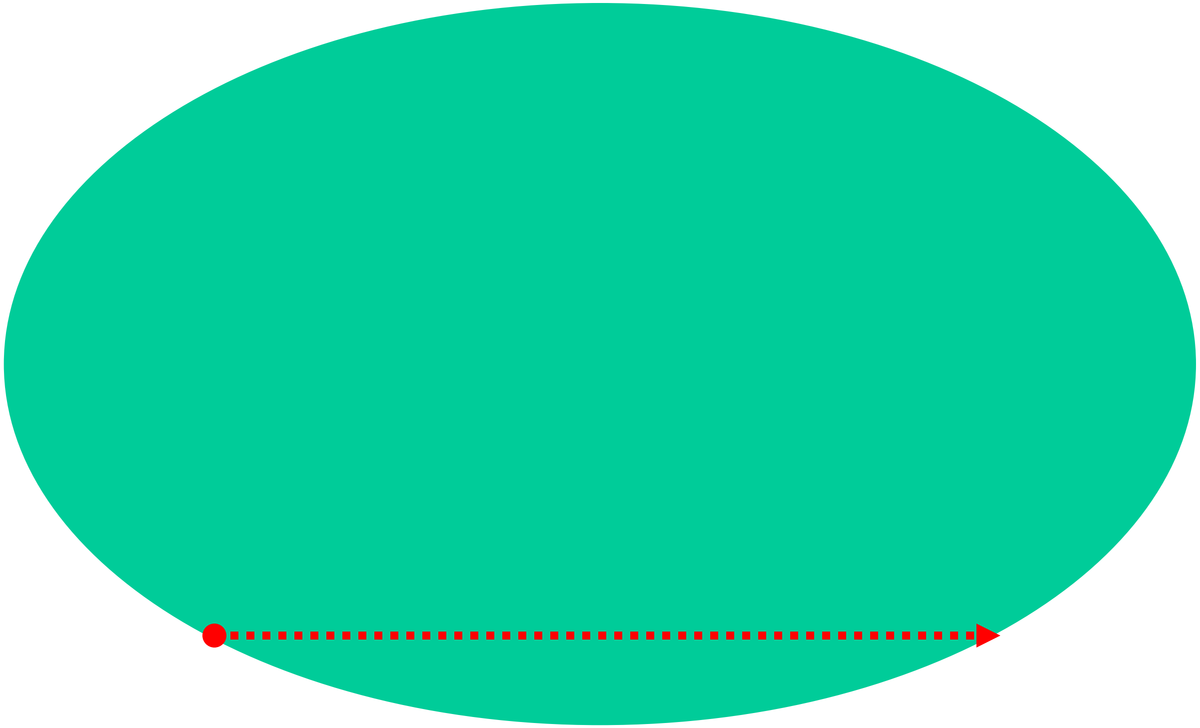
境界での滞留（粘性）現象



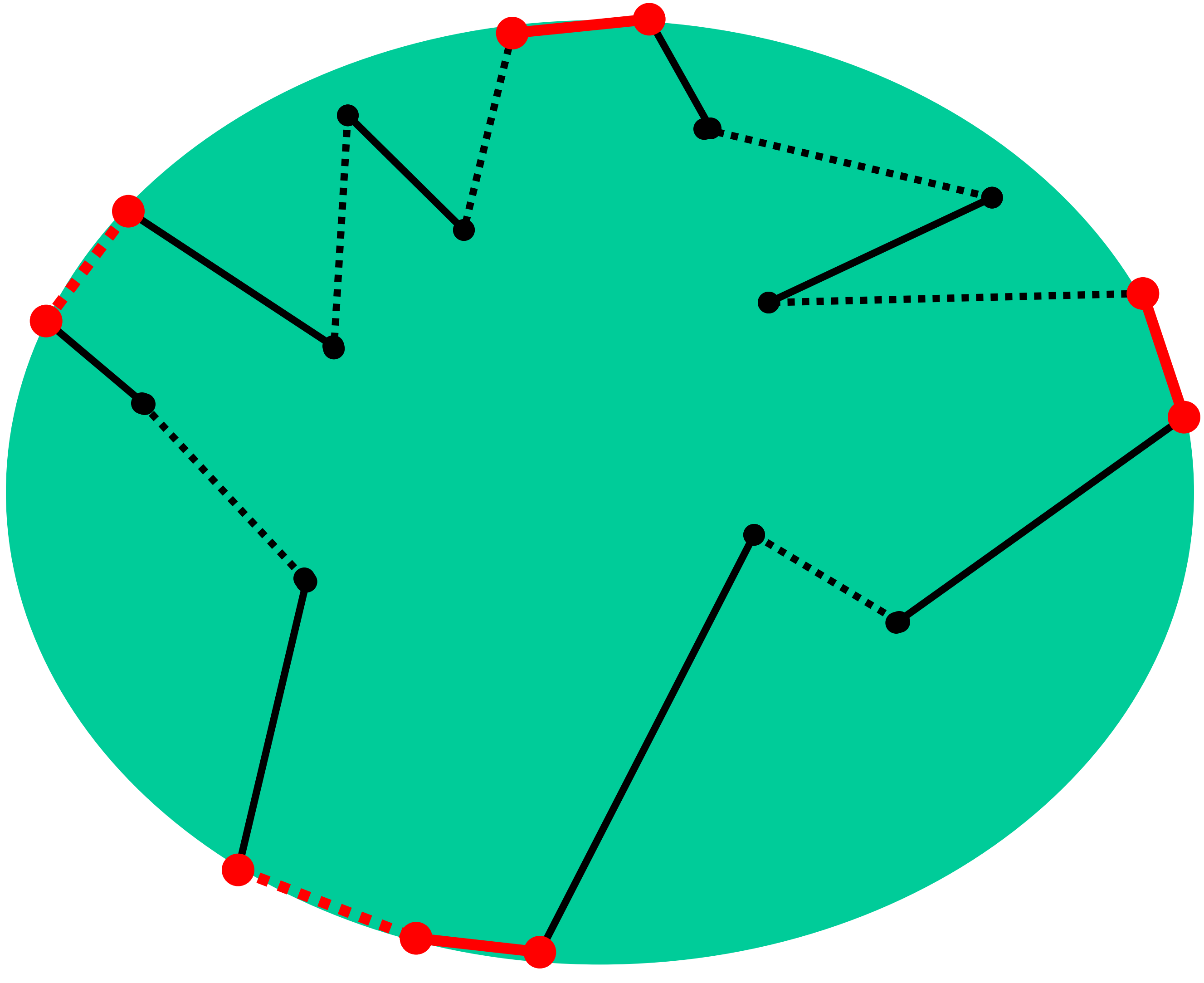
境界から内部へのジャンプ



境界から境界へのジャンプ



領域全体での一般拡散現象

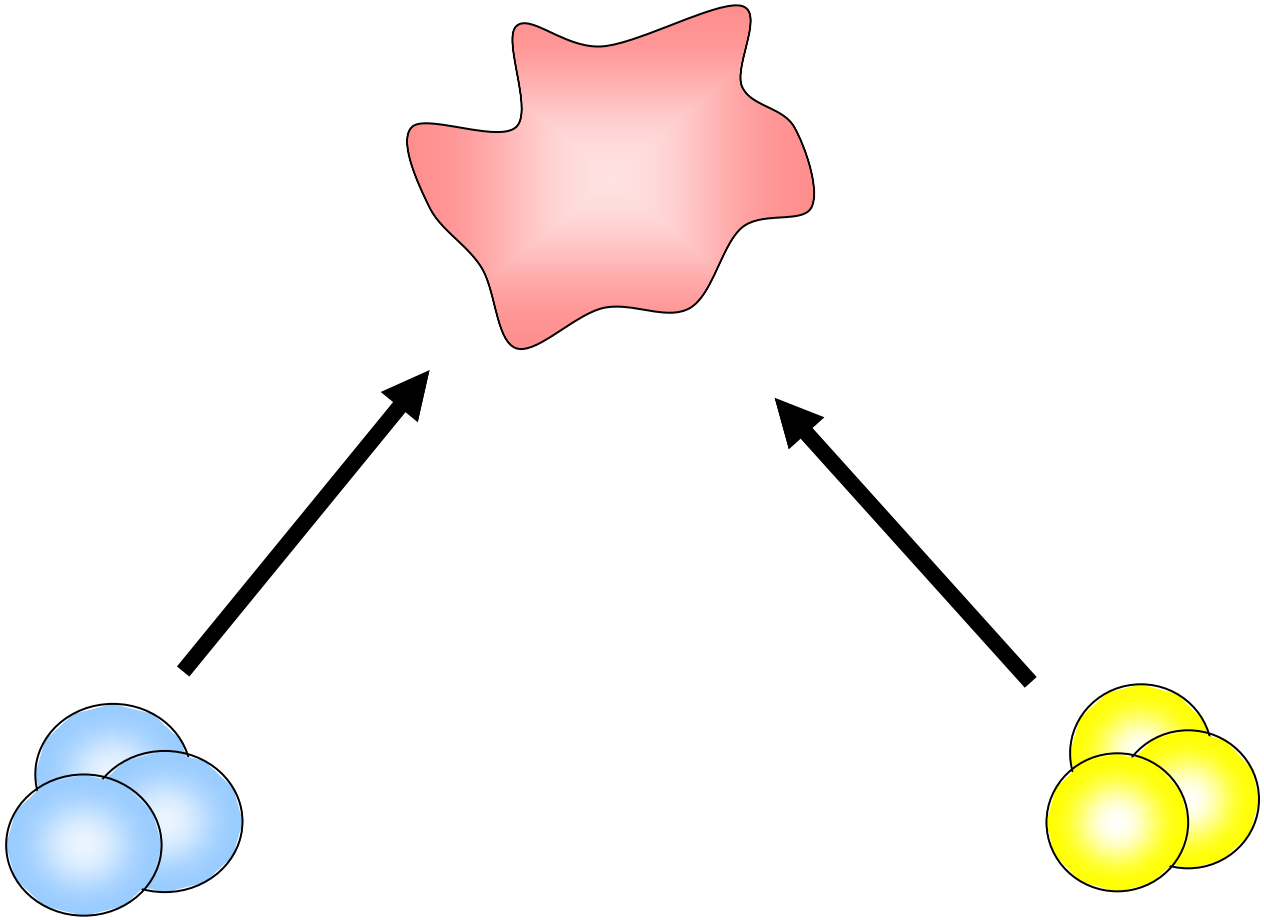


化学反応の数理

研究のキャッチフレーズ

研究テーマ	現実の問題
化学反応速度論	原子力発電所の臨界事故の防止

化学反応のイメージ



化学反応と温度の関係

- 化学反応が進む
- 反応熱により，領域の温度が上昇
- 化学反応がさらに進む（アウレニウスの法則）
- 一方で、熱拡散が起こる
- 領域の境界で，境界条件(等温条件、断熱条件）を課す（ニュートンの冷却の法則）

Svante August Arrhenius

アレニウス

◆Svante August Arrhenius (1859-1927)
スウェーデンの化学者
1903年ノーベル化学賞（電解質溶液における電離説）

アレニウスの法則

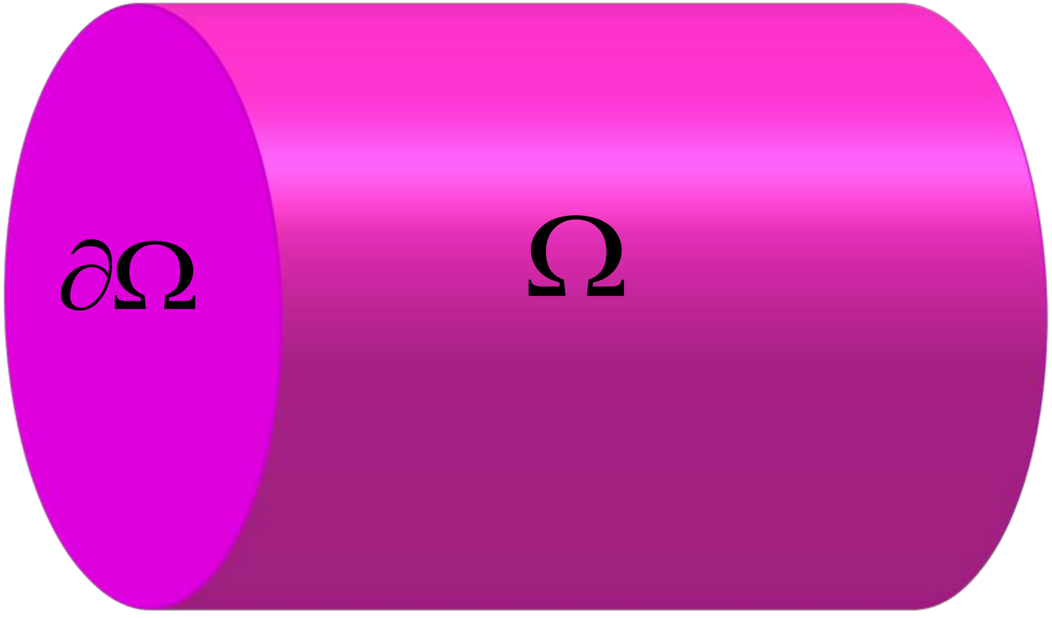
◆化学反応速度論におけるアレニウスの法則は、指数関数型の非線型項に対応している。

ニュートンの冷却の法則

◆熱の交換は容器表面の内と外との温度差に比例するという**ニュートンの冷却の法則**は、**一般ロバン境界条件**に対応している。

反応拡散方程式

有界領域(フラスコ)



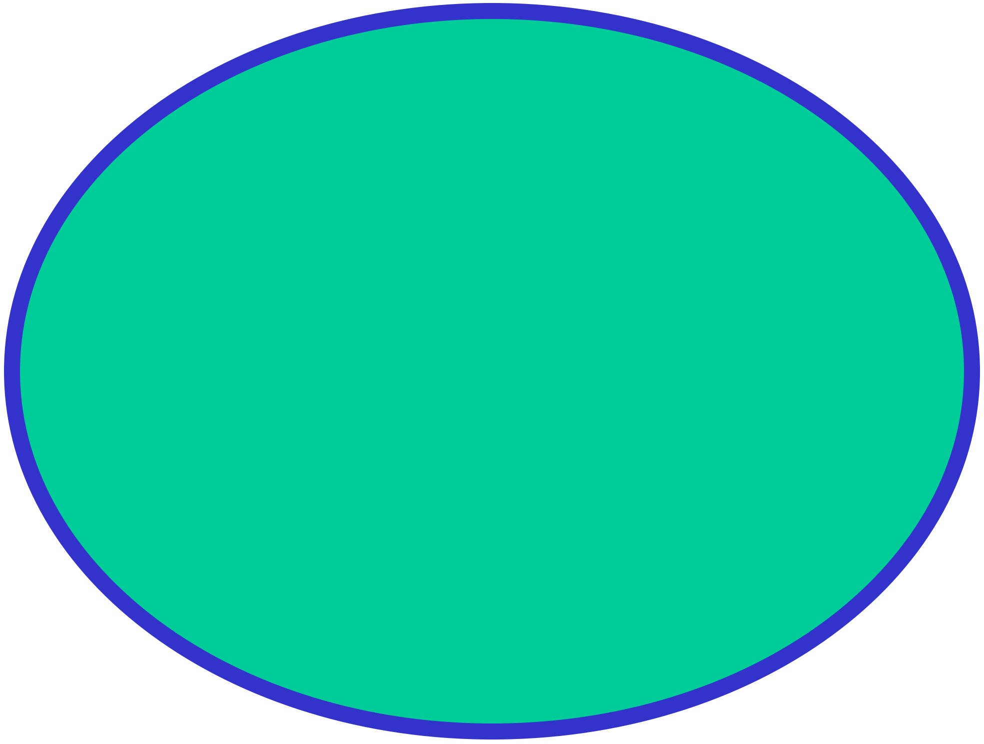
反応拡散方程式問題

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = \Delta \boldsymbol{u} + \lambda \exp\left[\frac{\boldsymbol{u}}{1+\varepsilon \boldsymbol{u}}\right] \quad \text{in } \ \Omega \times (0,\infty)$$

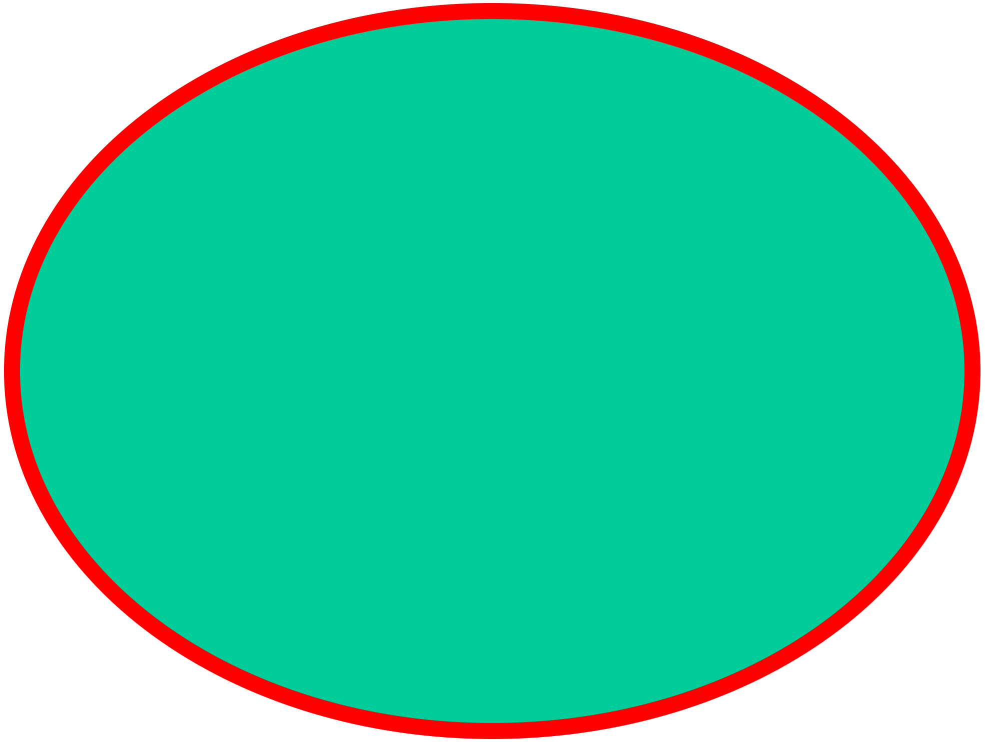
$$\boldsymbol{a}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \mathbf{n}} + (1-\boldsymbol{a})\boldsymbol{u} = \mathbf{0} \quad \text{on } \ \partial\Omega \times (0,\infty)$$

$$\boldsymbol{u}\,\big|_{t=0} = \boldsymbol{u}_0 \quad \text{in } \ \Omega$$

等温（冷却）条件



断熱（保温）条件



反応速度論

活性化エネルギー

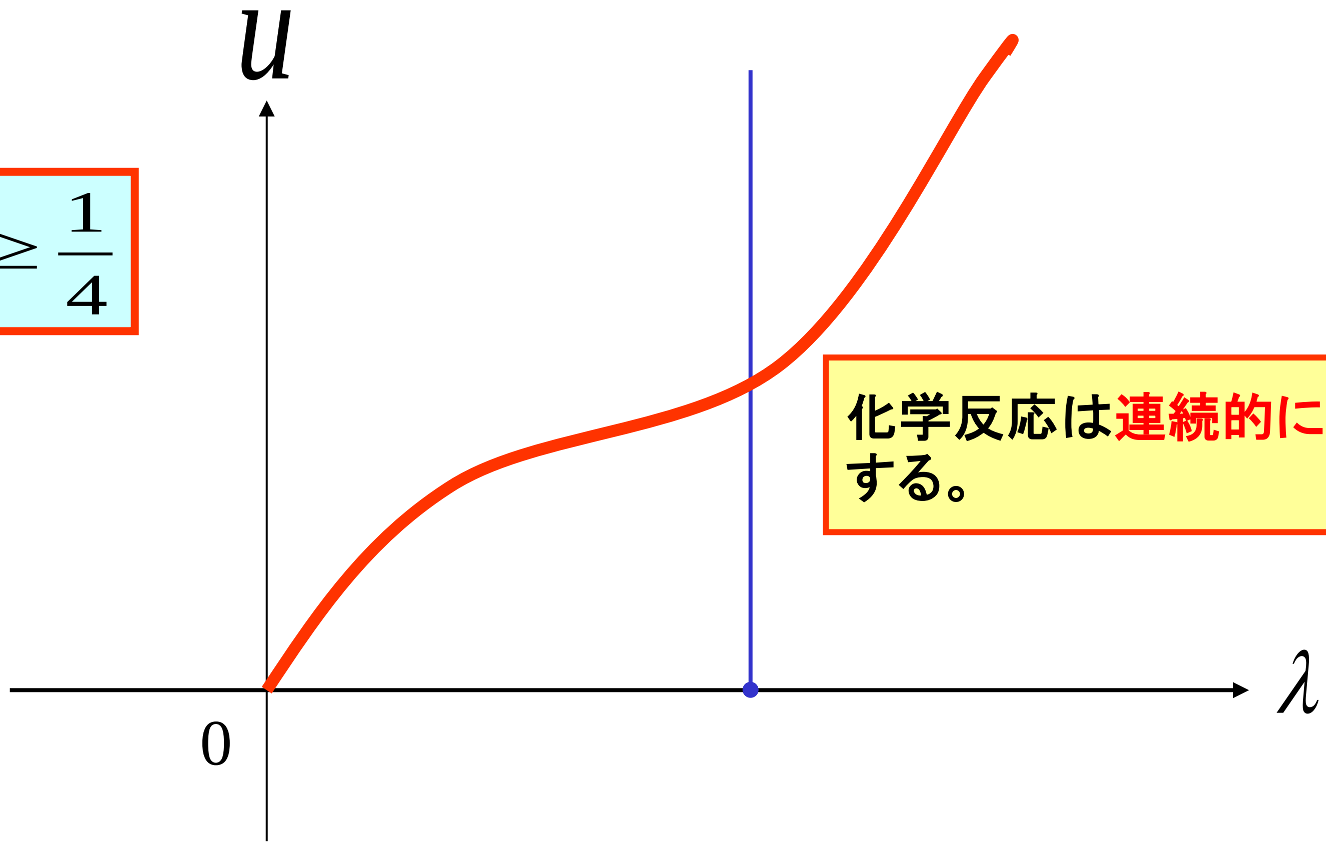
■ 化学反応が起こるために、越えなければならない**エネルギーの山**

活性化エネルギー（敷居エネルギー）

- 活性化エネルギーの山が高ければ、化学反応はゆっくりと進行する。
- 活性化エネルギーの山が低ければ、化学反応は速やかに進行する。

低い活性化エネルギー

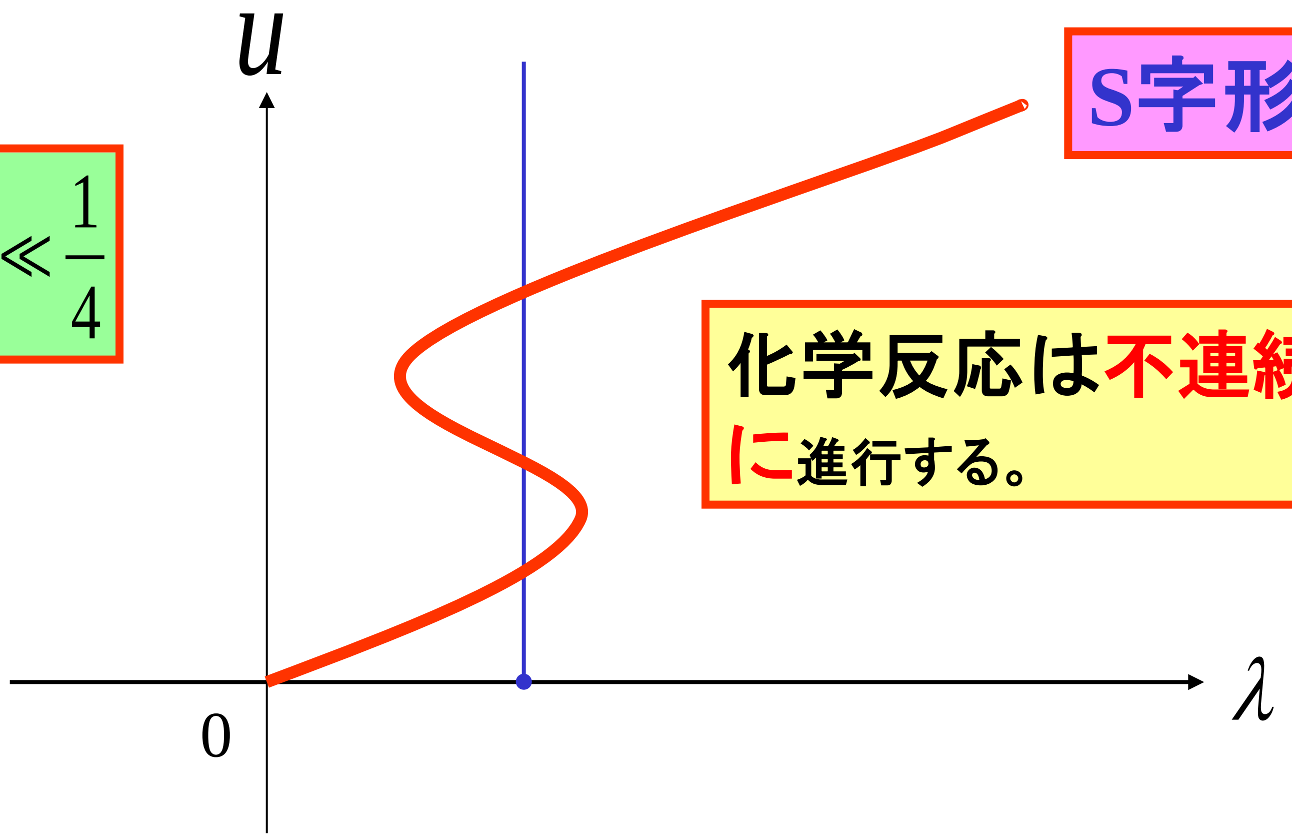
$$\varepsilon \geq \frac{1}{4}$$



化学反応は**連続的に**進行する。

高い活性化エネルギー

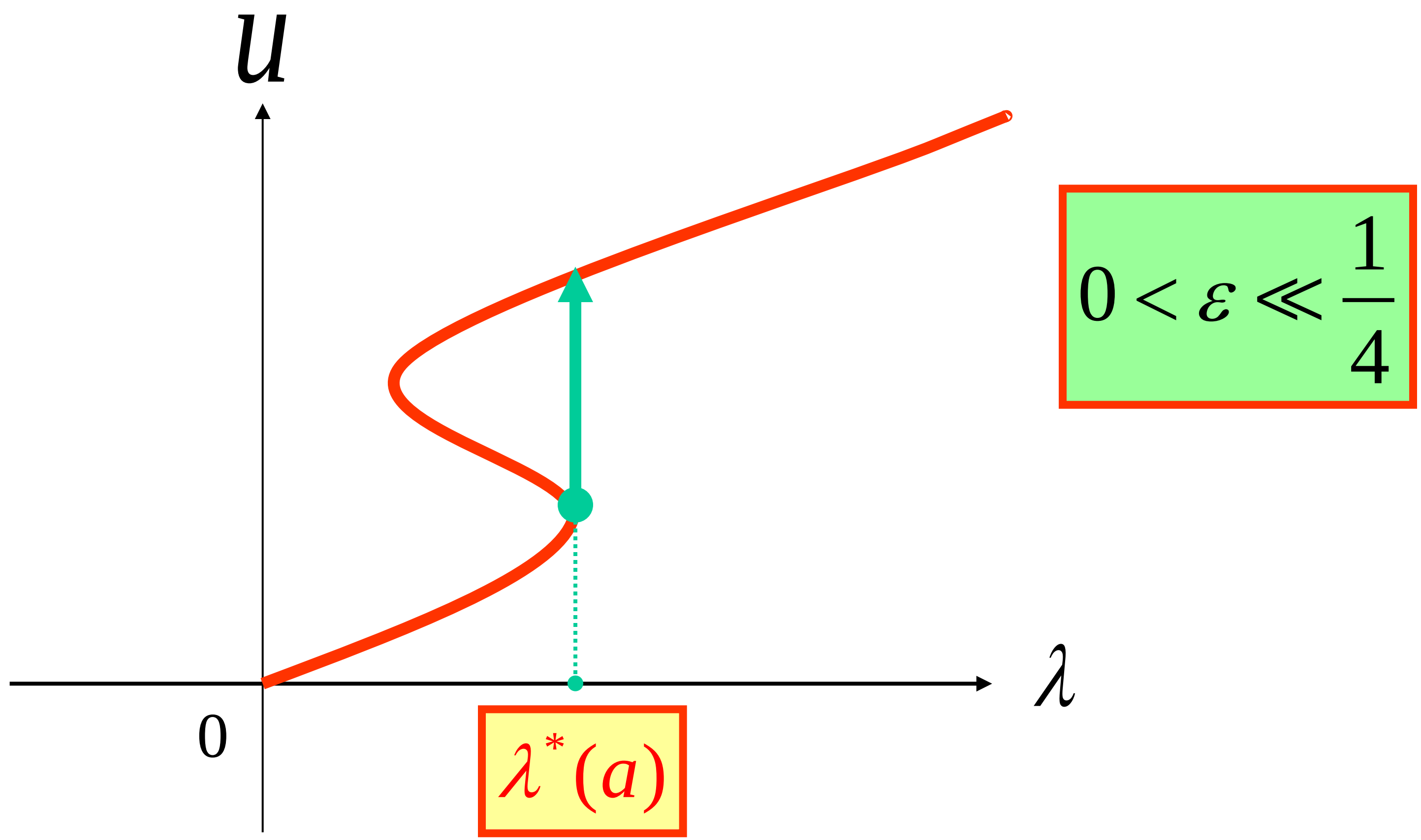
$$0 < \varepsilon \ll \frac{1}{4}$$



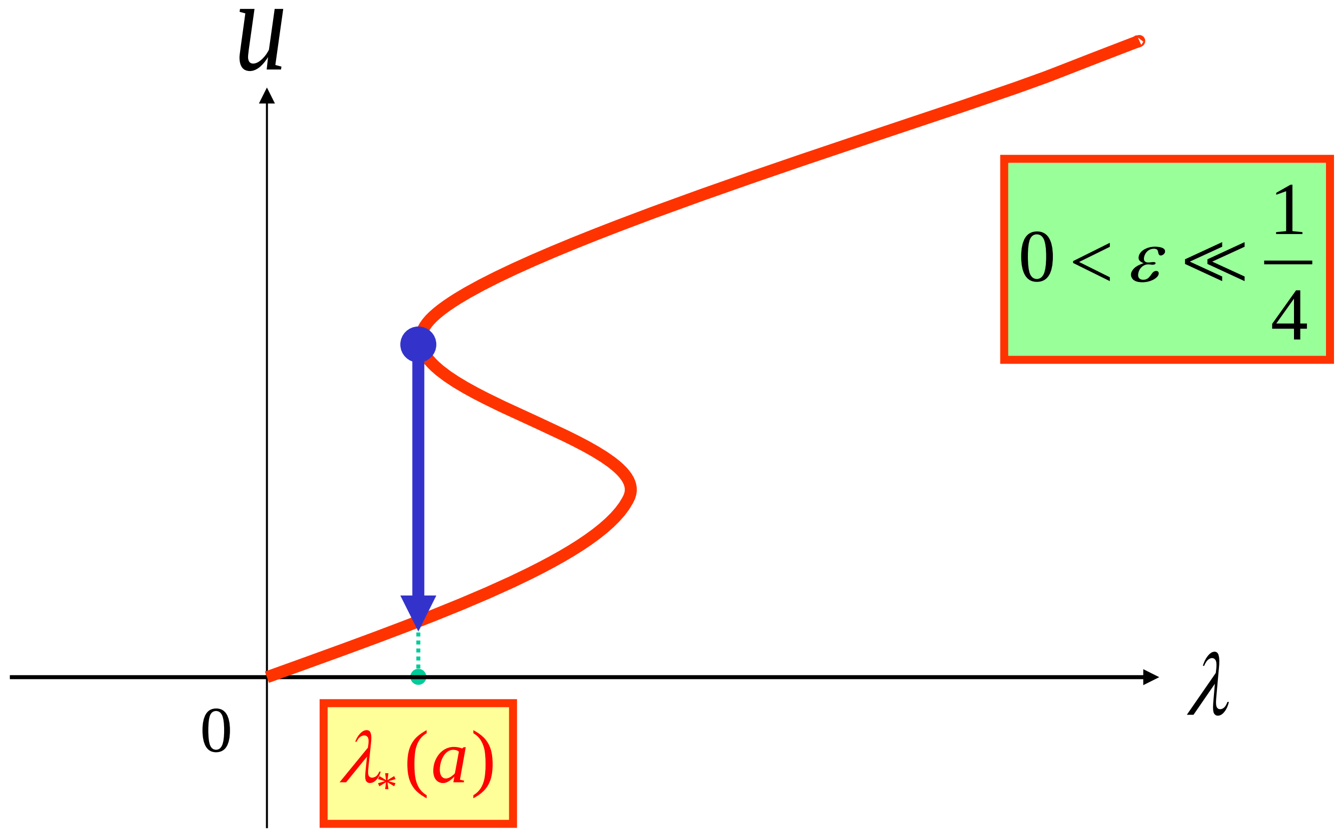
S字形

化学反応は不連続的に進行する。

発火点（熱爆発）



消火点（温度失活）



結果の解釈（数学的実験結果）

■発火温度は、保温条件の場合が一番低く（火がつきやすく）、冷却条件の場合が一番高い（火がつきにくい）。

結果の解釈（数学的実験結果）

■消火温度は、保温条件の場合が一番低く（火が消えにくく）、冷却条件の場合が一番高い（火が消えやすい）。

人口動態の数理

研究のキャッチフレーズ

研究テーマ	現実の問題
人口動態論	地球の人口問題

Thomas Robert Malthus

マルサス

◆**Thomas Robert Malthus (1766-1834)**

English Economist

An Essay on the Principle of Population (1798)

マルサスの人口論

- ■1798年、イギリスの経済学者マルサスは、論文「人口の原理」を発表した。
- ■彼のアイデアによると、人口（一般に生物個体数）は、そのときの**総人口（総個体数）に比例**する。

BASIC
による数値計算

マルサスの例題

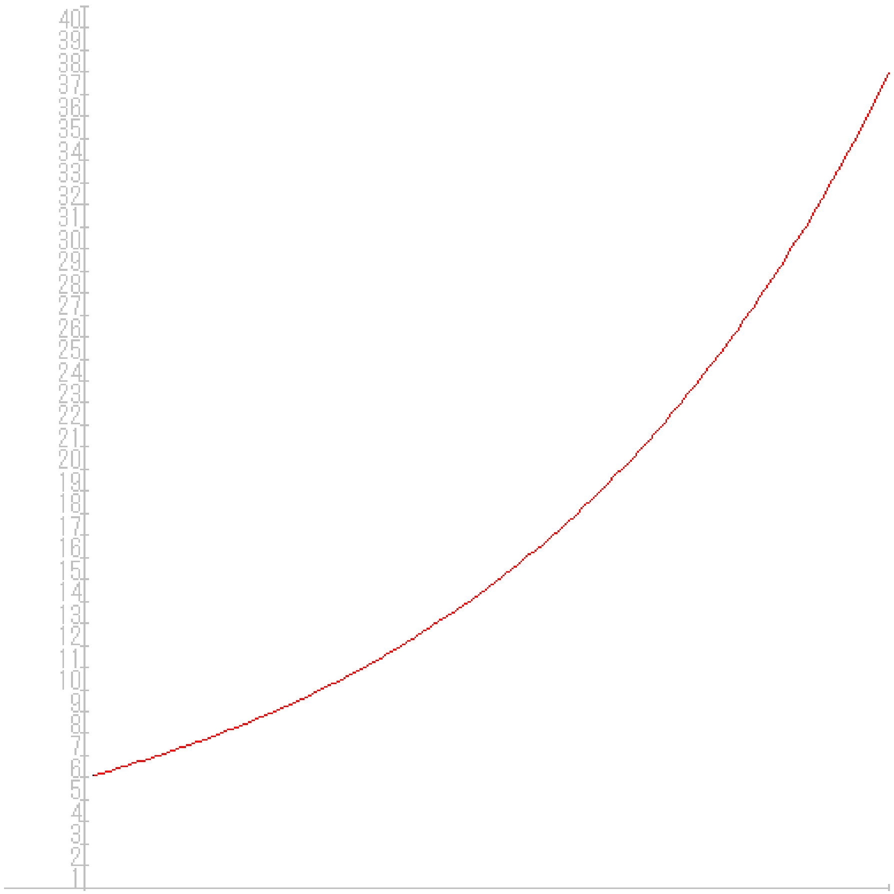
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x \\ x(0) = 5 \end{cases}$$

(**答え**：$x(t) = 5e^{2t}$)

Runge-Kutta Method

```
DEF F(x, y)=2*y
SET WINDOW -0.1,3,-0.1,60
DRAW axes
LET  x = 0
LET  y = 5
LET  h = 0.01
LET  N = 10

FOR i = 0 TO N STEP 0.01
   LET  k1 = F(x, y)
   LET  k2 = F(x + h / 2, y + h * k1 / 2)
   LET  k3 = F(x + h / 2, y + h * k2 / 2)
   LET  k4 = F(x + h, y + h * k3)

   LET  x = x + h
   LET  y = y + h * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) / 6
   PLOT LINES: x,y;
   SET LINE COLOR "red"
   WAIT DELAY 0.01
NEXT i
END
```

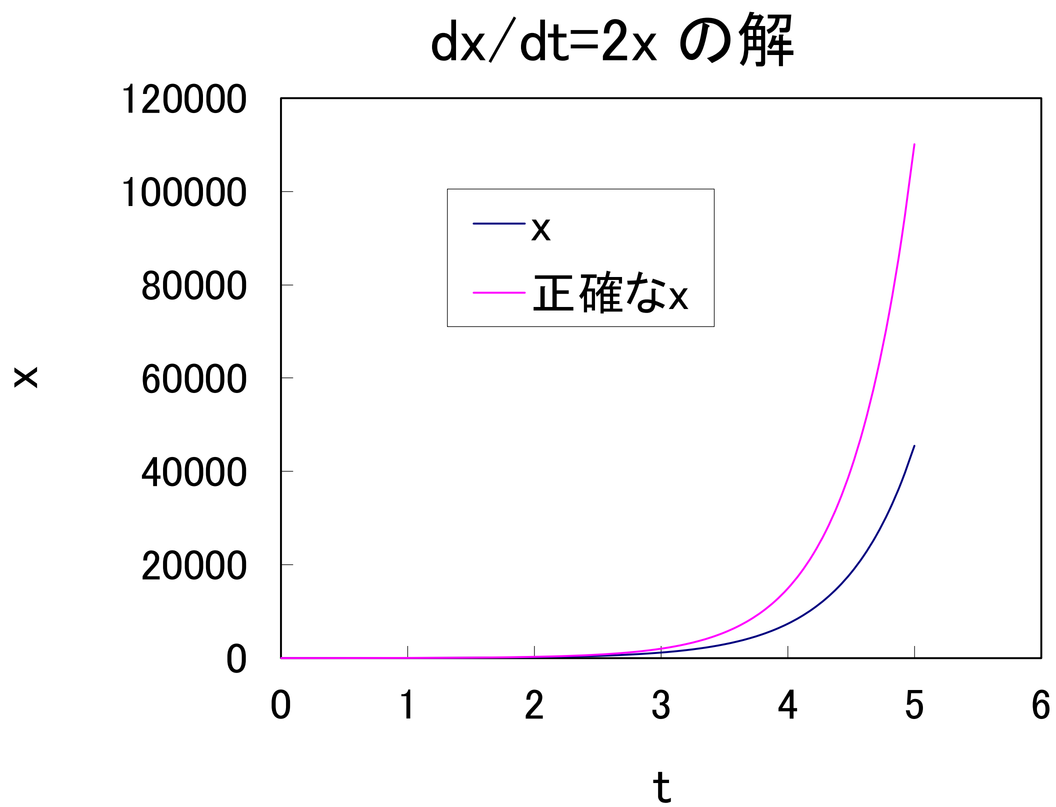
Runge-Kutta Method



A population will grow exponentially.

Excel(VBA)
による数値計算

数値計算（オイラー法）



dx/dt=2x の解
120000
100000
80000
60000
40000
20000
0
x
0
1
2
3
4
5
6
t
x
正確なx

Pierre Francois Verhulst

フェアフルスト

- **Pierre Francois Verhulst (1804-1849)**

  Belgian Mathematical Biologist

  Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement (1838)

フェアフルストの人口論

◆1837年、オランダの数理生物学者フェアフルストは、人口過密の要因を考慮に入れて、１つの修正されたマルサスの人口論を提唱した。

◆人口（一般には、生物の固体数）は、継続し得る限り増加し続けるのであるが、上限が存在する。

BASIC
による数値計算

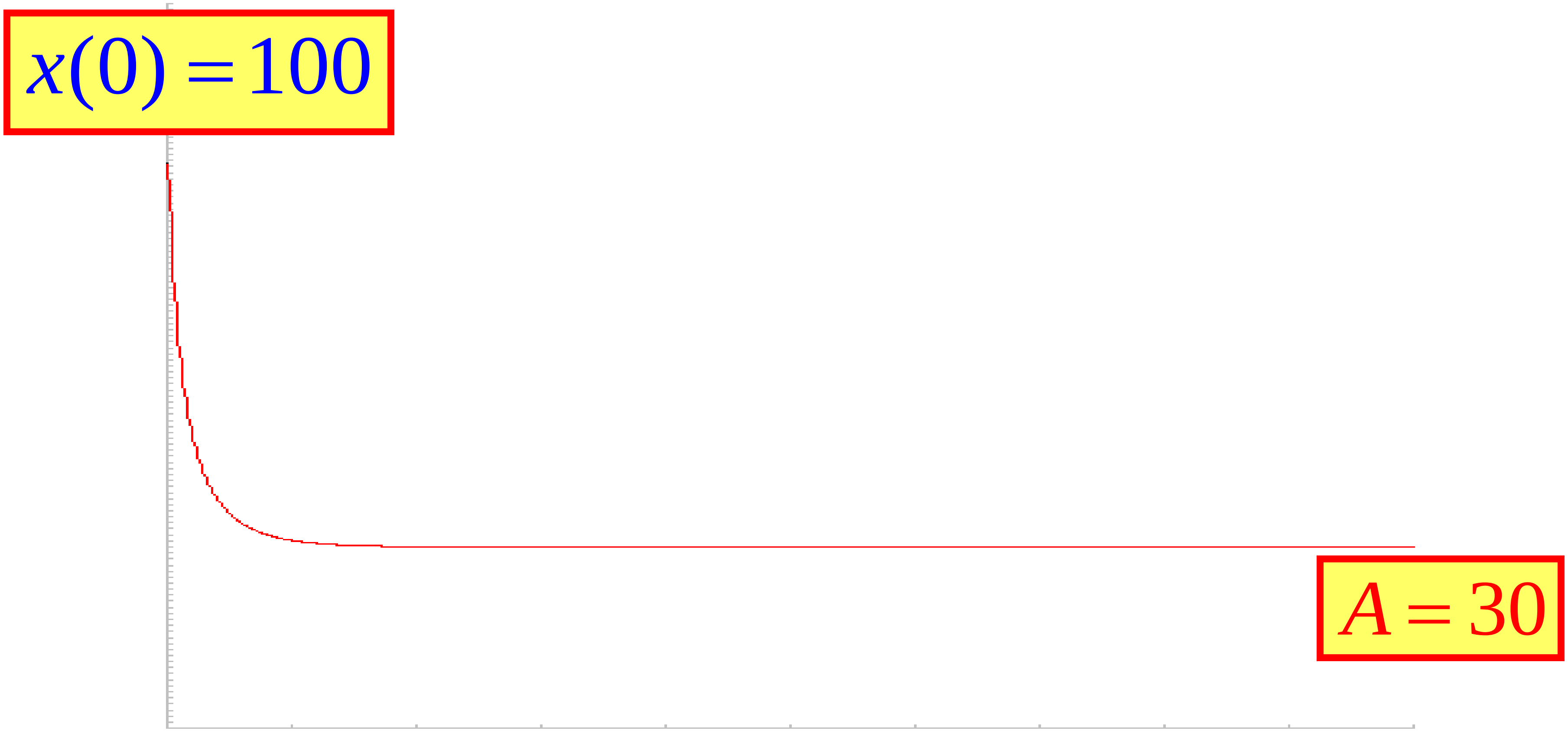
フェアフルストの例題（1）

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \left(3 - \dfrac{1}{10}x(t)\right)x(t) \\ x(0) = 100 > 30 \end{cases}$$

Runge-Kutta Method

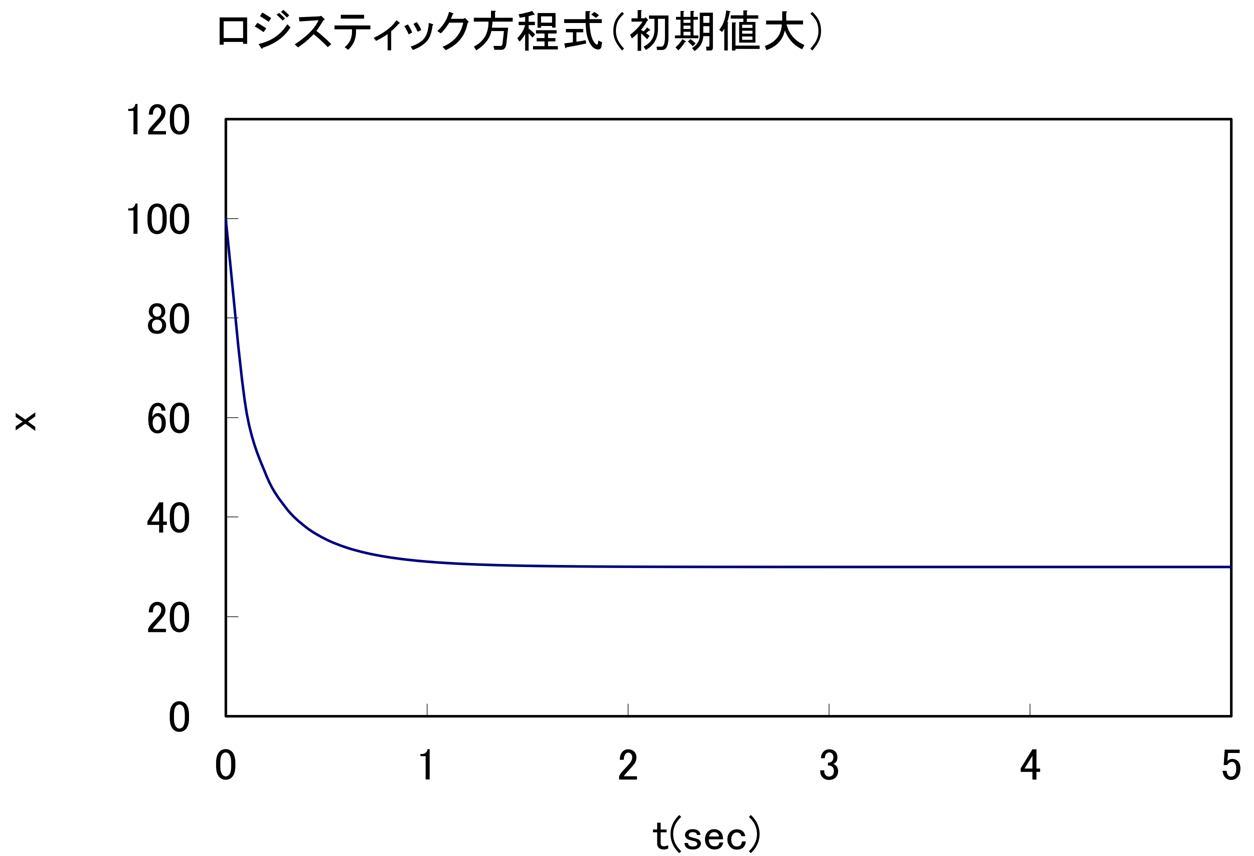
```
DEF F(t,x) = (3 - 0.1 * x) * x
SET WINDOW  0,10,0,40
DRAW axes

LET  t = 0
LET  x = 100

LET  h = 0.01
LET  N = 10

FOR i = 0 TO N STEP 0.01
   LET  k1 = F(t, x)
   LET  k2 = F(t + h / 2, x + h * k1 / 2)
   LET  k3 = F(t + h / 2, x + h * k2 / 2)
   LET  k4 = F(t + h, x + h * k3)

   LET  t = t + h
   LET  x = x + h * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) / 6
   PLOT LINES: t,x;
   SET LINE COLOR 4
   WAIT DELAY 0.01
NEXT i
END
```

Runge-Kutta Method



Excel（VBA）による数値計算

数値計算（ルンゲ・クッタ法）

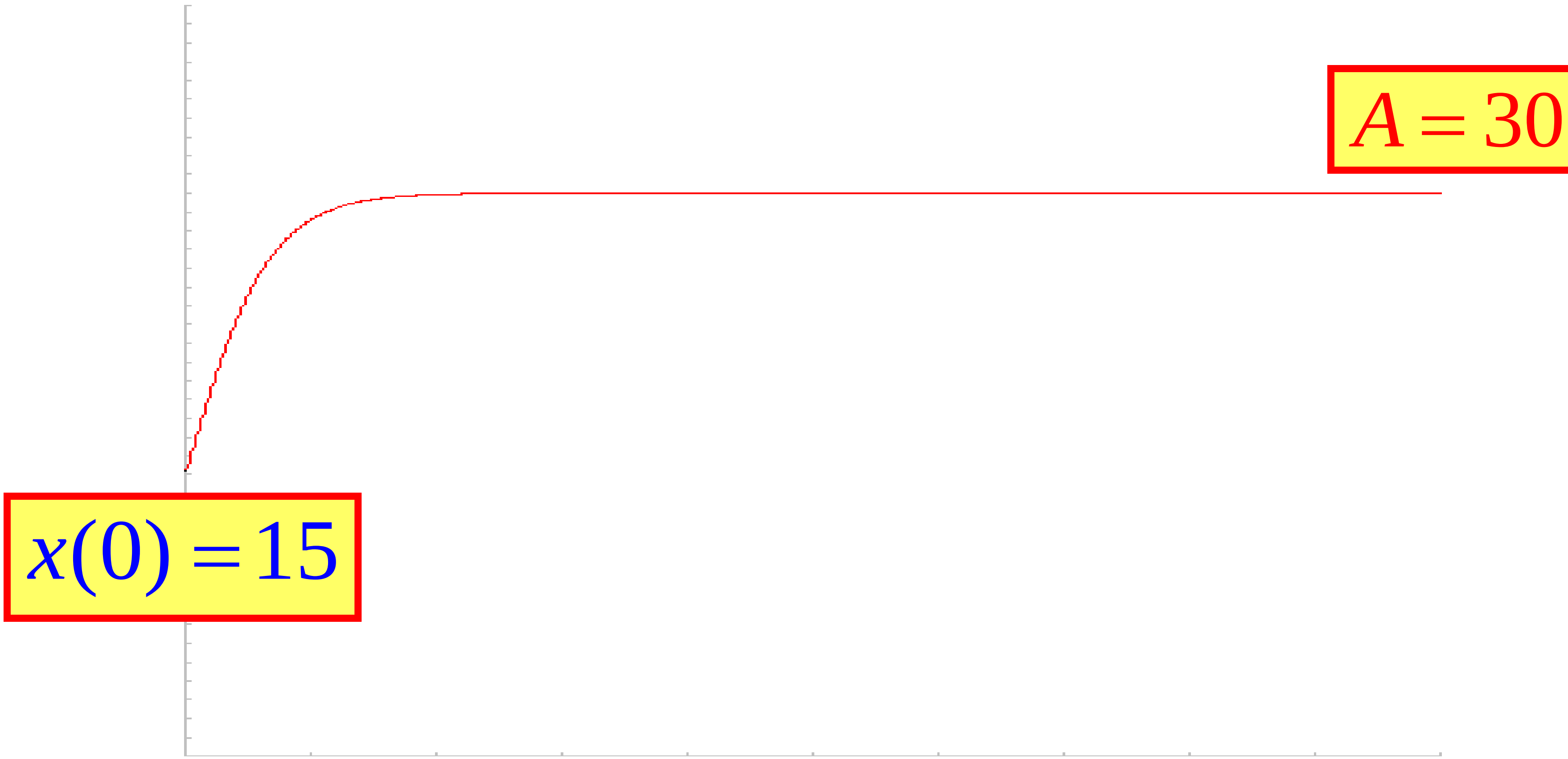


BASIC
による数値計算

フェアフルストの例題（2）

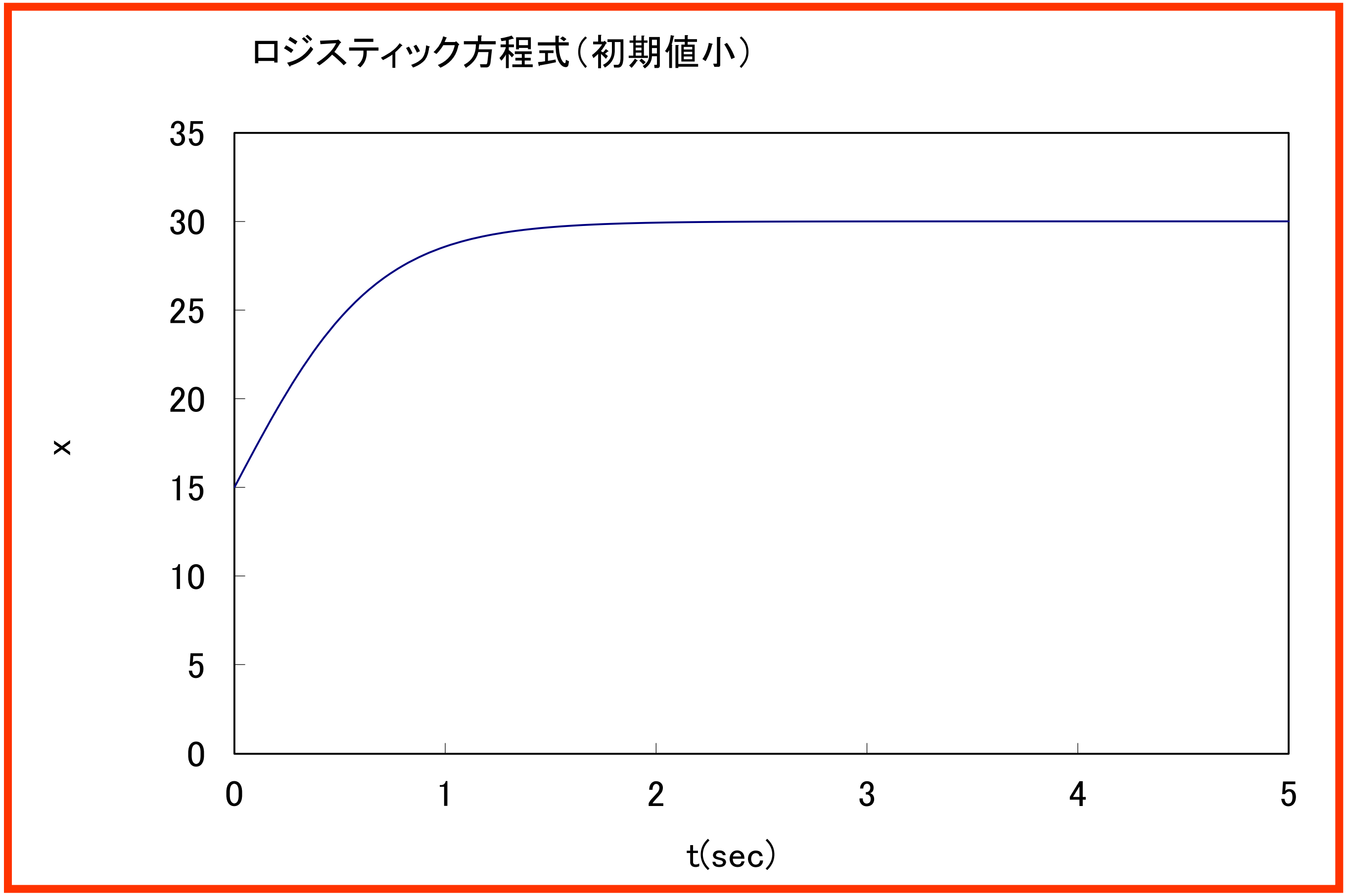
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \left(3 - \dfrac{1}{10}x(t)\right)x(t) \\ x(0) = 15 < 30 \end{cases}$$

Runge-Kutta Method



Excel(VBA)
による数値計算

数値計算（ルンゲ･クッタ法）



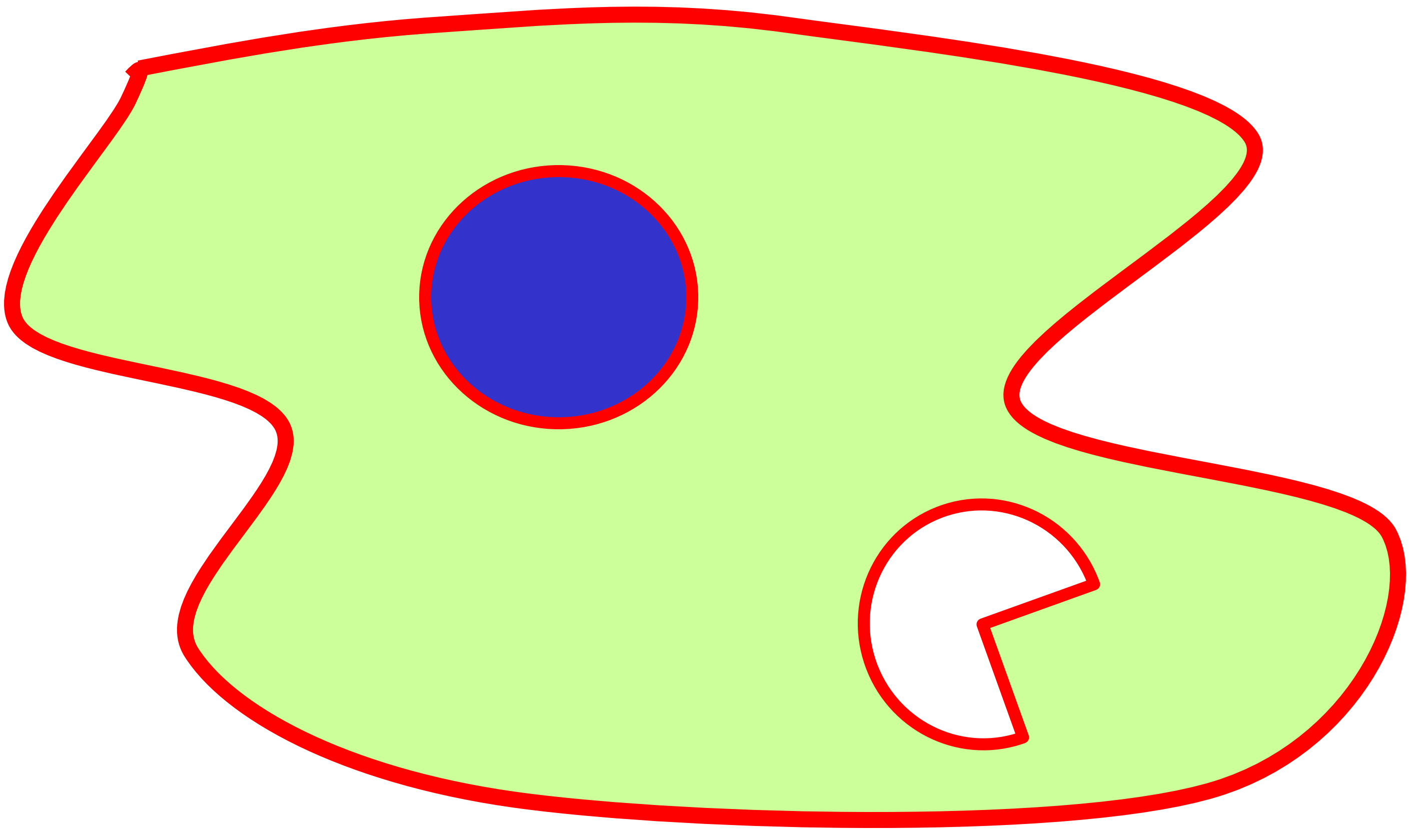
マルサスの人口論と
フェアフルストの人口論

結論（数学的結果）

◆人口の流動が小さい場合は、
マルサスの人口論に従う。
◆人口の流動が大きい場合は、
フェアフルストの人口論に従う。

拡散的ロジスティック方程式

有界領域（地形）



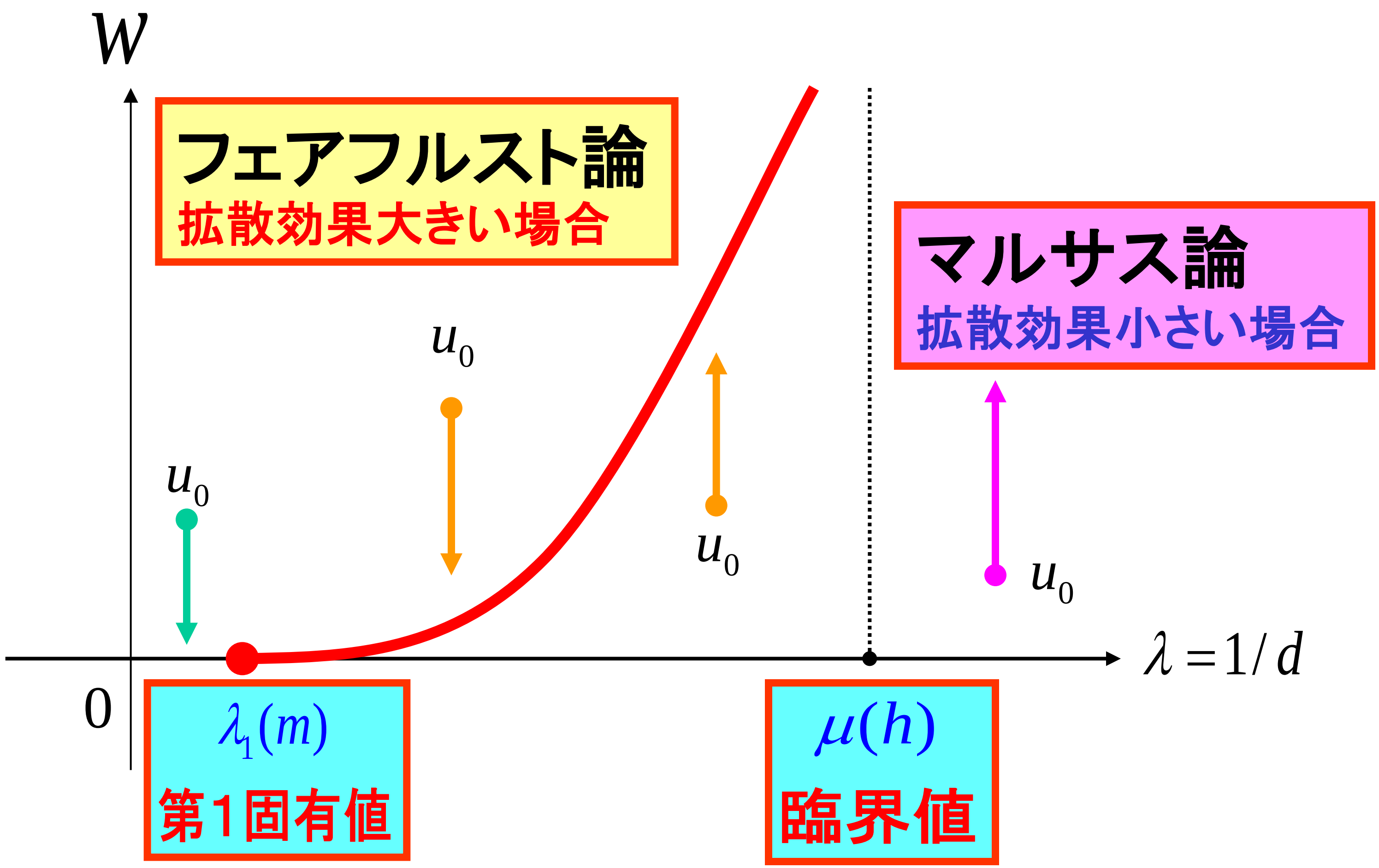
拡散的ロジスティック方程式問題

$$\frac{\partial w}{\partial t} - d\Delta w = m(x)w - h(x)w^2 \quad \text{in} \ \ \Omega \times (0, \infty)$$

$$w = 0 \quad \text{on} \ \ \partial\Omega \times (0, \infty)$$

$$w\,\big|_{t=0} = u_0 \quad \text{in} \ \ \Omega$$

人口動態論

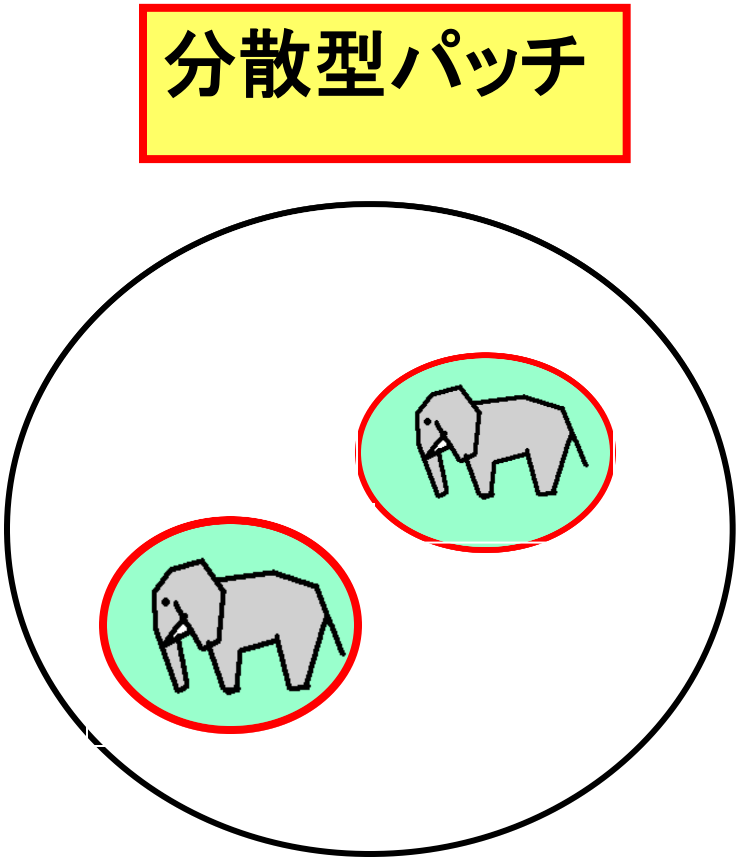


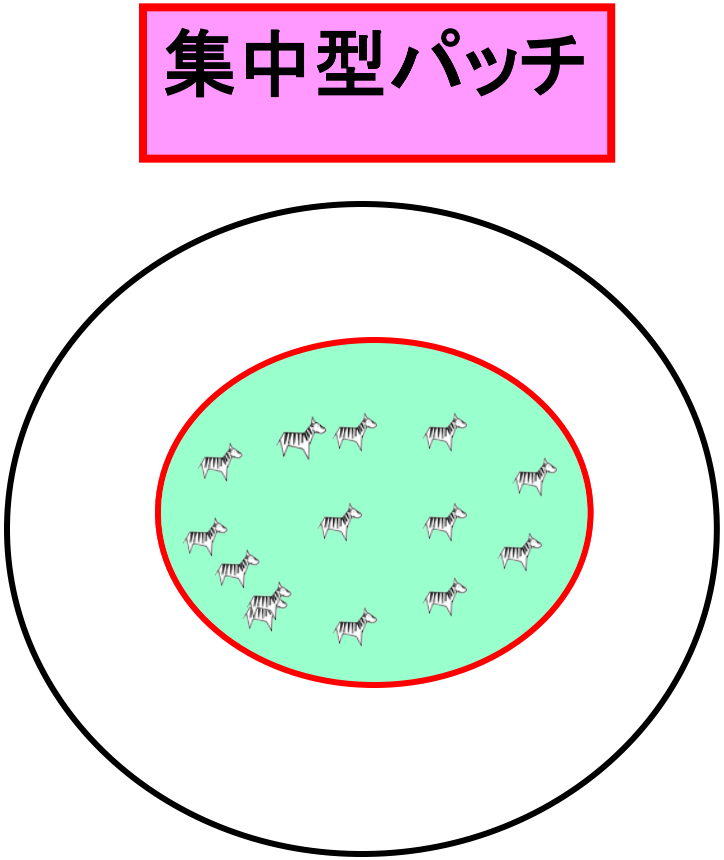
W
フェアフルスト論
拡散効果大きい場合
マルサス論
拡散効果小さい場合
u0
u0
u0
u0
λ=1/d
0
λ1(m)
第1固有値
μ(h)
臨界値

望ましい居住環境

生存競争が無く、
食料も豊富な居住地域

望ましい居住環境の形は集中型





THE END