解析学特别研究I

拡散現象の数理

平良和昭

研究の目的

●拡散現象を、現代解析学ではどのように捉えるかを概観すること。

拡散現象の代表的な例

- ●ブラウン運動（物理学）

- ●人口動態論（数理生態学）

- ●化学反応速度論（化学）

ブラウン運動の数理

研究の目的

●ブラウン運動の数学的研究を通して、解析学の3分野確率論、関数解析、偏微分方程式の密接な関係を概観すること。

結論

●領域の内部での拡散現象は、連続的な拡散と不連続な拡散（ジャンプ）の２つの現象によって特徴付けられる。

●境界上の拡散現象は、吸収、反射、粘性、連続的な拡散と不連続な拡散（ジャンプ）等の６つの現象によって分類される。

ブラウン運動小史

- ■1828年 ブラウン 花粉の運動の観察
- ■1905年 アインシュタイン ブラウン運動の物理的解明
- ■1906年 ペラン ブラウン運動のアインシュタイン理論の実験的検証（アボガドロ数の実験値）
- ■1923年 ウィナー ブラウン運動の数学的研究

1次元拡散過程の分類問題
（解決済み）

- ◆**1931年** コルモゴロフ　偏微分方程式的研究
- ◆**1952年** フェラー　吉田耕作　関数解析的研究
- ◆**1965年** ディンキン　確率論的研究
- ◆**1965年** 伊藤清　マッキーン 確率微分方程式的研究

ブラウン運動の数学的研究

マルコフ過程
（確率論）
N.Wiener
E.B.Dynkin
伊藤清

ブラウン運動
（物理学）
A.Einstein
J. Perrin

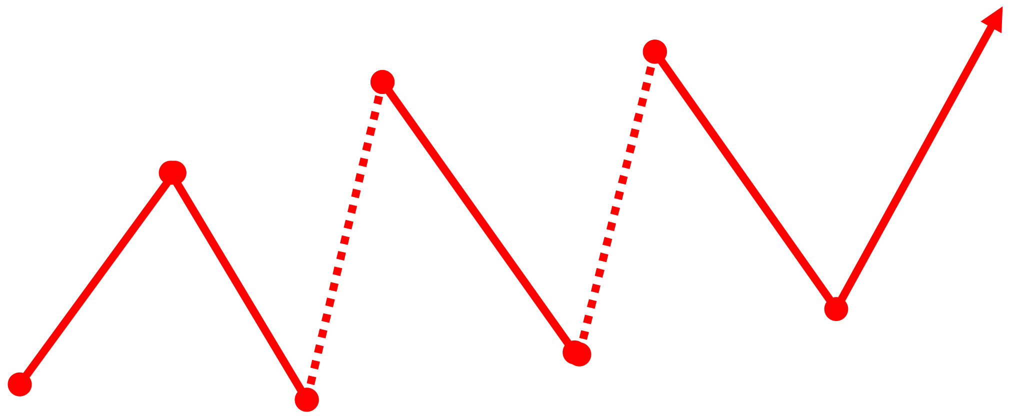
拡散方程式
（偏微分方程式）
A.N.Kolmogorov

半群の理論
（関数解析）
W.Feller
吉田耕作

鳥瞰図

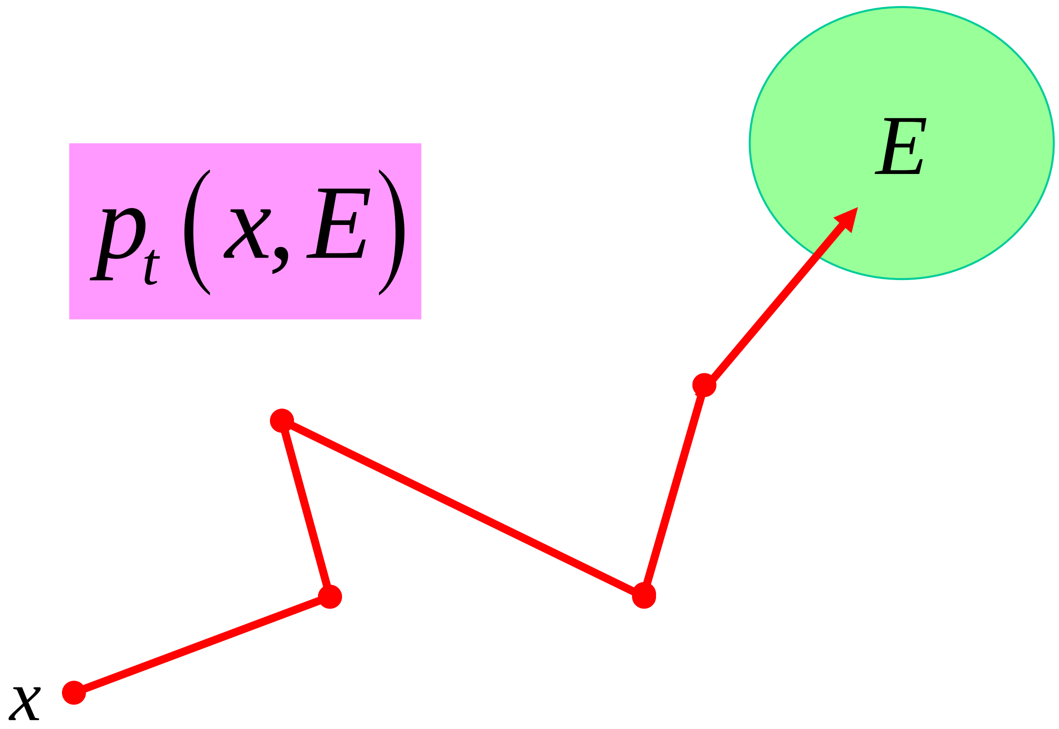
確率論 （ミクロスコピック）	関数解析 （マクロスコピック）	偏微分方程式 （メゾスコピック）
マルコフ過程	フェラー半群	生成作用素 による特徴付け
マルコフ性 （各経路を追跡）	半群の性質 （推移確率を追跡）	境界値問題 （グリーン関数の追跡）

(I) 経路の追跡（確率論）



（II）推移確率の追跡（関数解析）

$$p_t(x, E)$$



(III) グリーン関数の追跡（偏微分方程式）

$$u = \mathbf{G}_{\alpha} f$$

$$(\alpha - \mathbf{W})u = f \quad \text{in } D$$

$$\mathbf{L}u = 0 \quad \text{on } \partial D$$

ブラウン運動と境界値問題

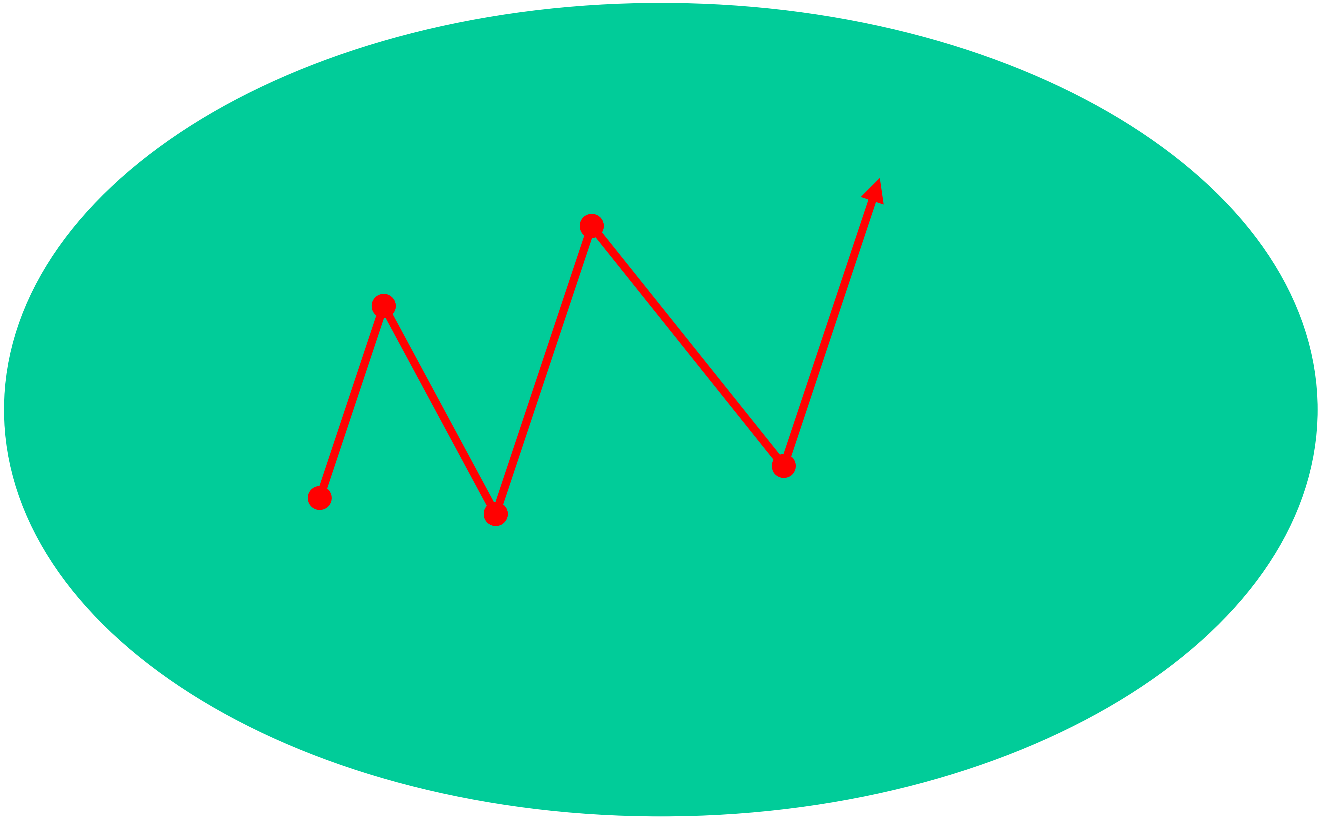
領域内部での微分積分作用素

$$Wu := Au + Su$$

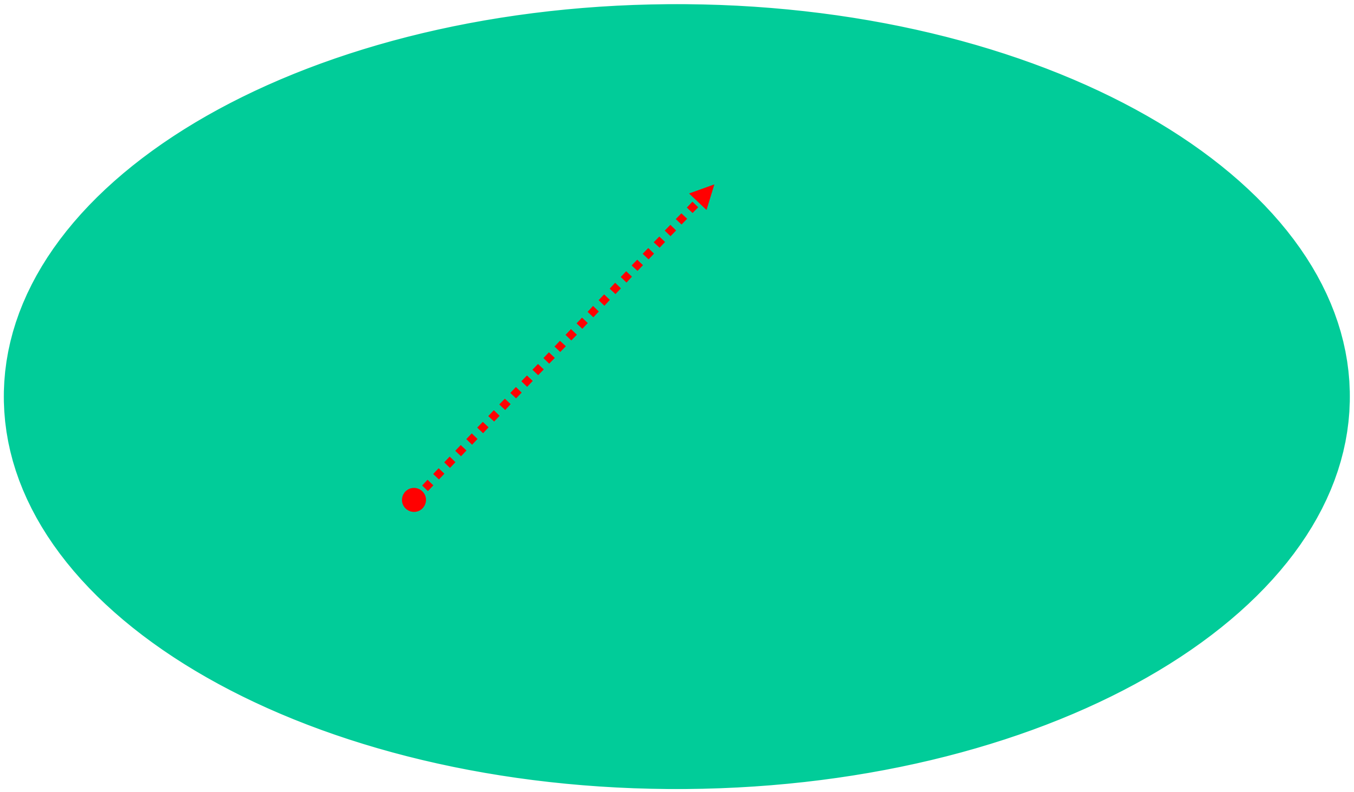
$$= \sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b^i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u$$

$$+ \int_D s(x,dy) \left[u(y) - u(x) - \sum_{j=1}^{N} (y_j - x_j) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \right]$$

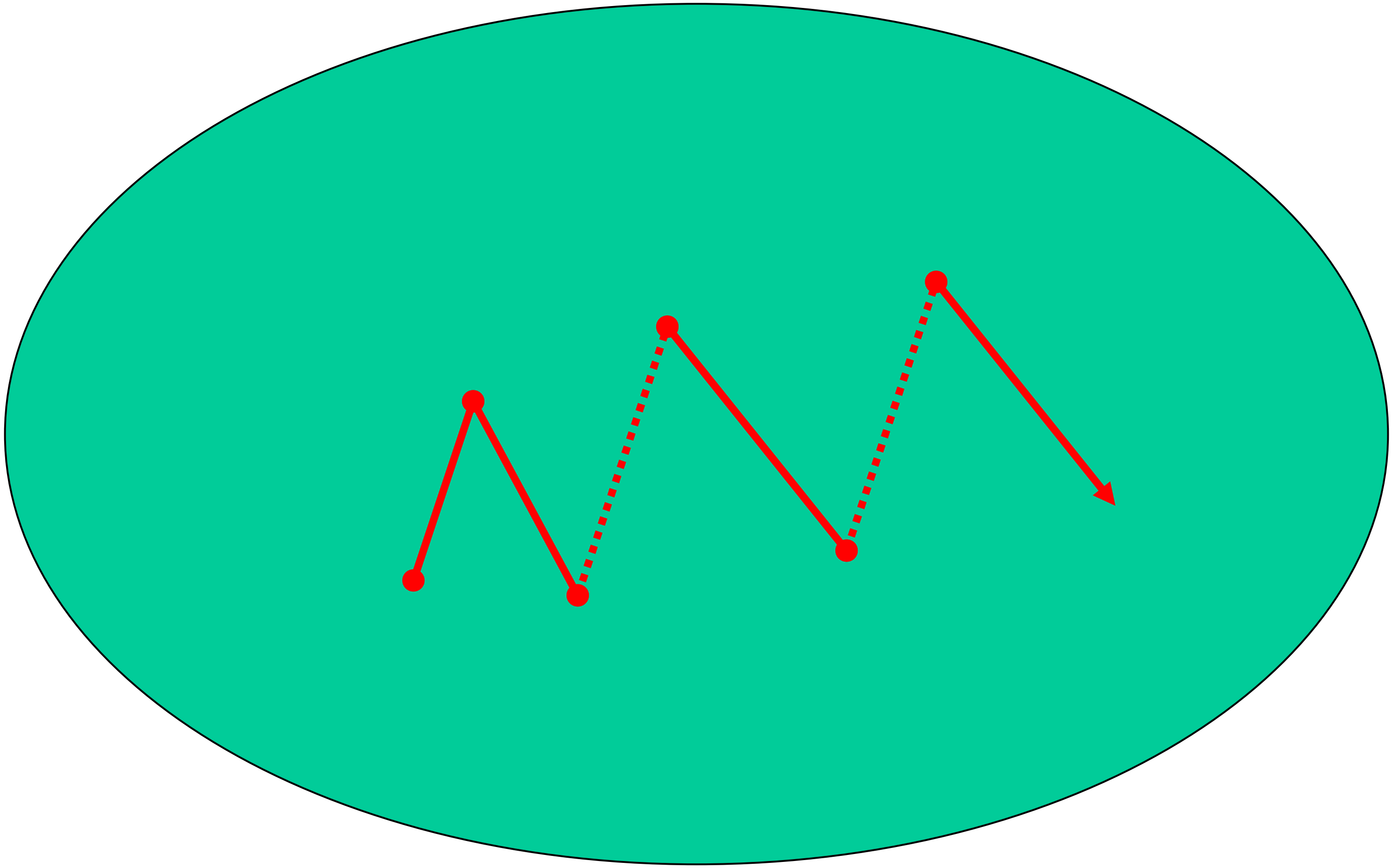
（1）連続な拡散現象



（2）不連続な拡散現象（ジャンプ）



領域内部での一般拡散現象



境界での一般境界条件

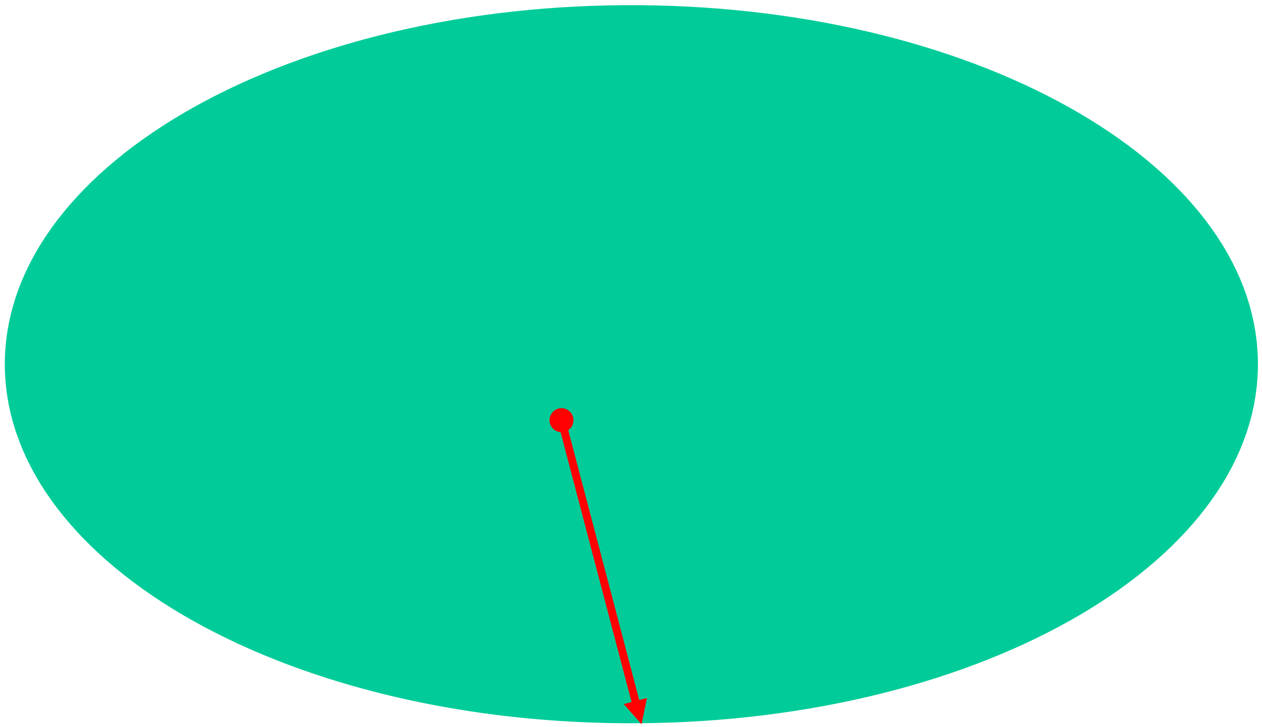
$$\boldsymbol{Lu} = \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x')\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x')\frac{\partial u}{\partial x_i} + \gamma(x')u$$

$$+\mu(x')\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - \delta(x')Wu$$

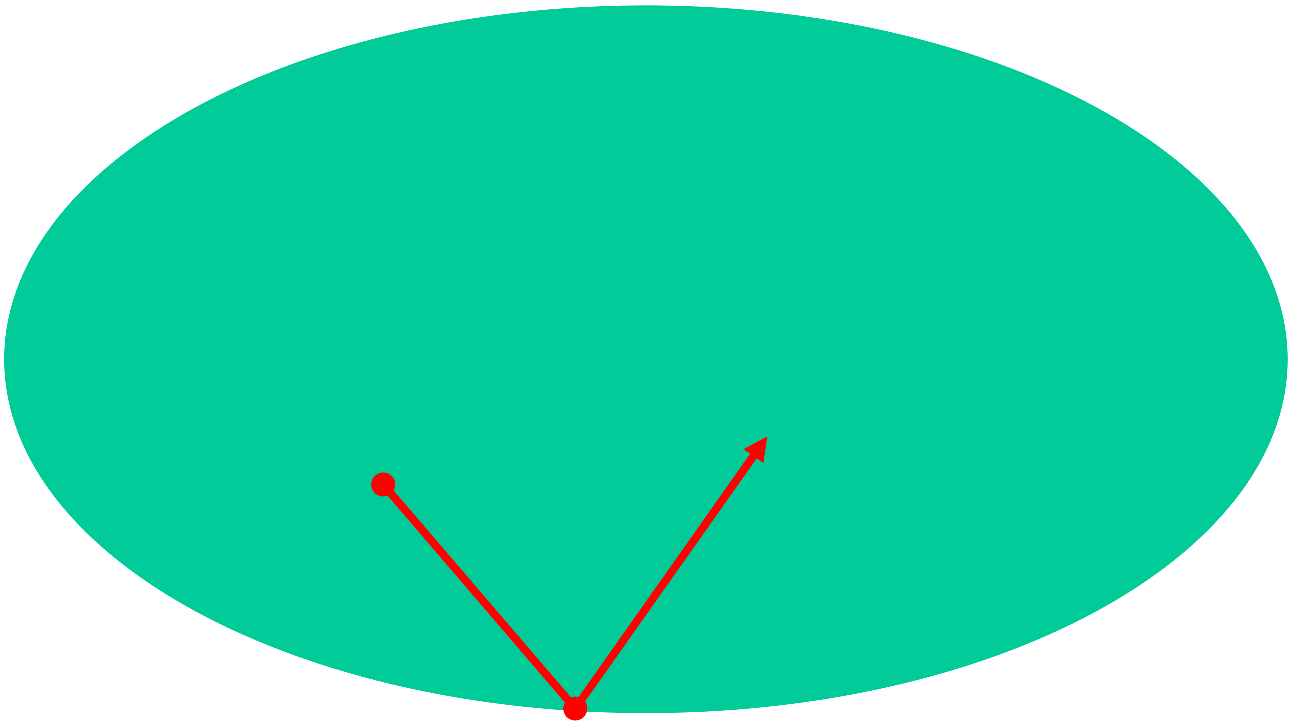
$$+\int_{\partial D} r(x', dy')\left[u(y') - u(x') - \sum_{j=1}^{N-1}(y_j - x_j)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x')\right]$$

$$+\int_{D} t(x', dy)\left[u(y) - u(x') - \sum_{j=1}^{N-1}(y_j - x_j)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x')\right]$$

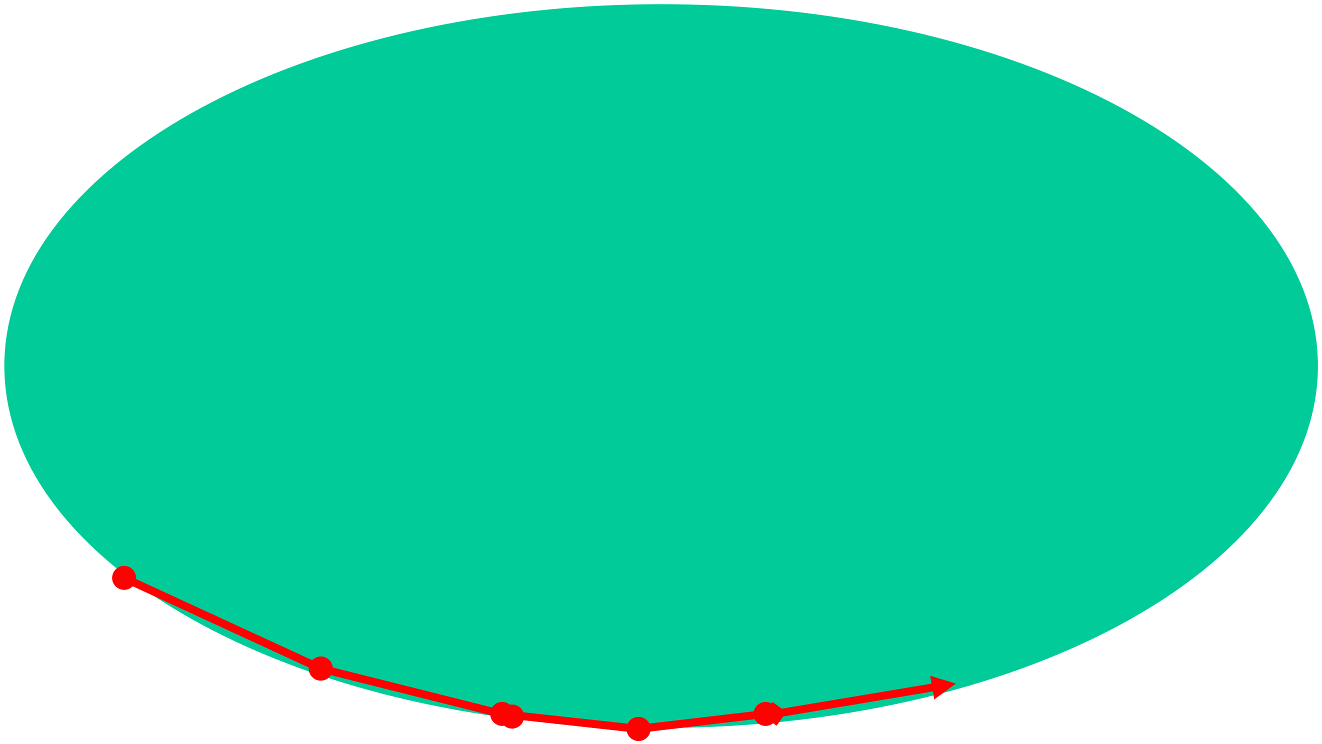
(1)境界での吸収現象



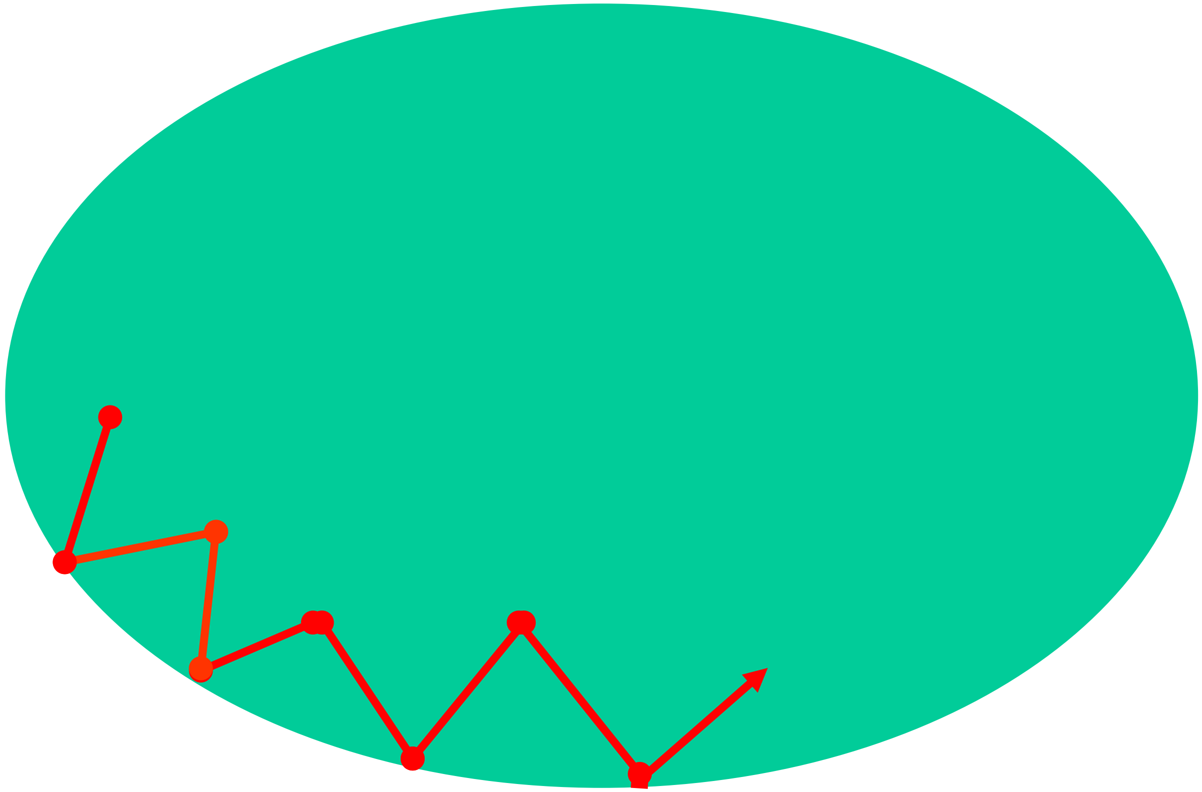
(2) 境界での反射現象



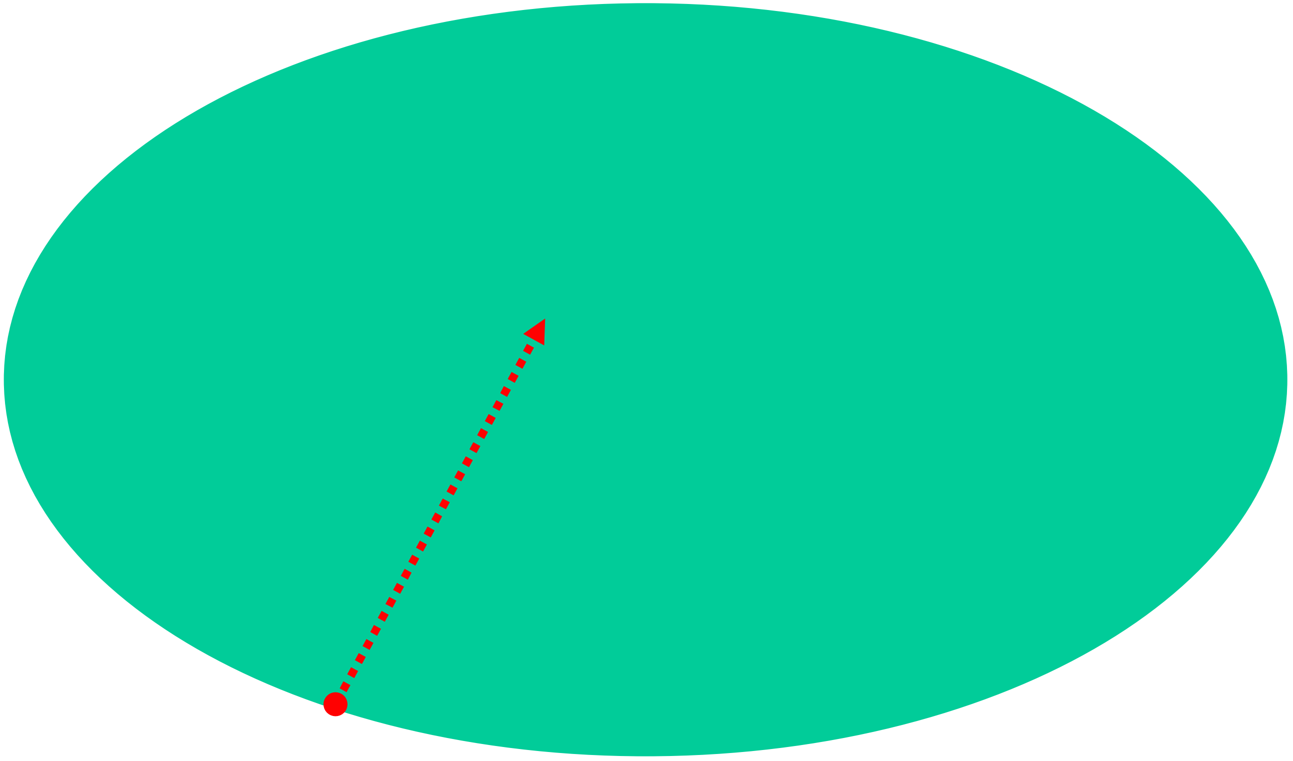
(3) 境界上の拡散現象



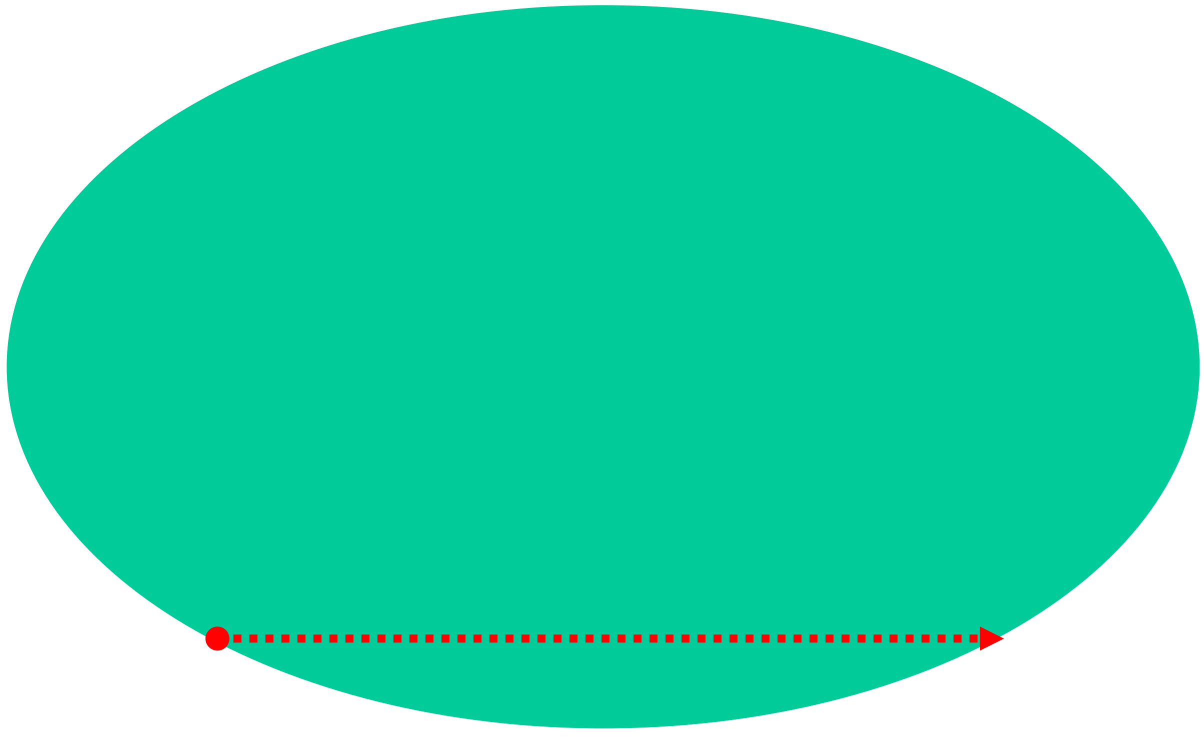
（4）境界での滞留（粘性）現象



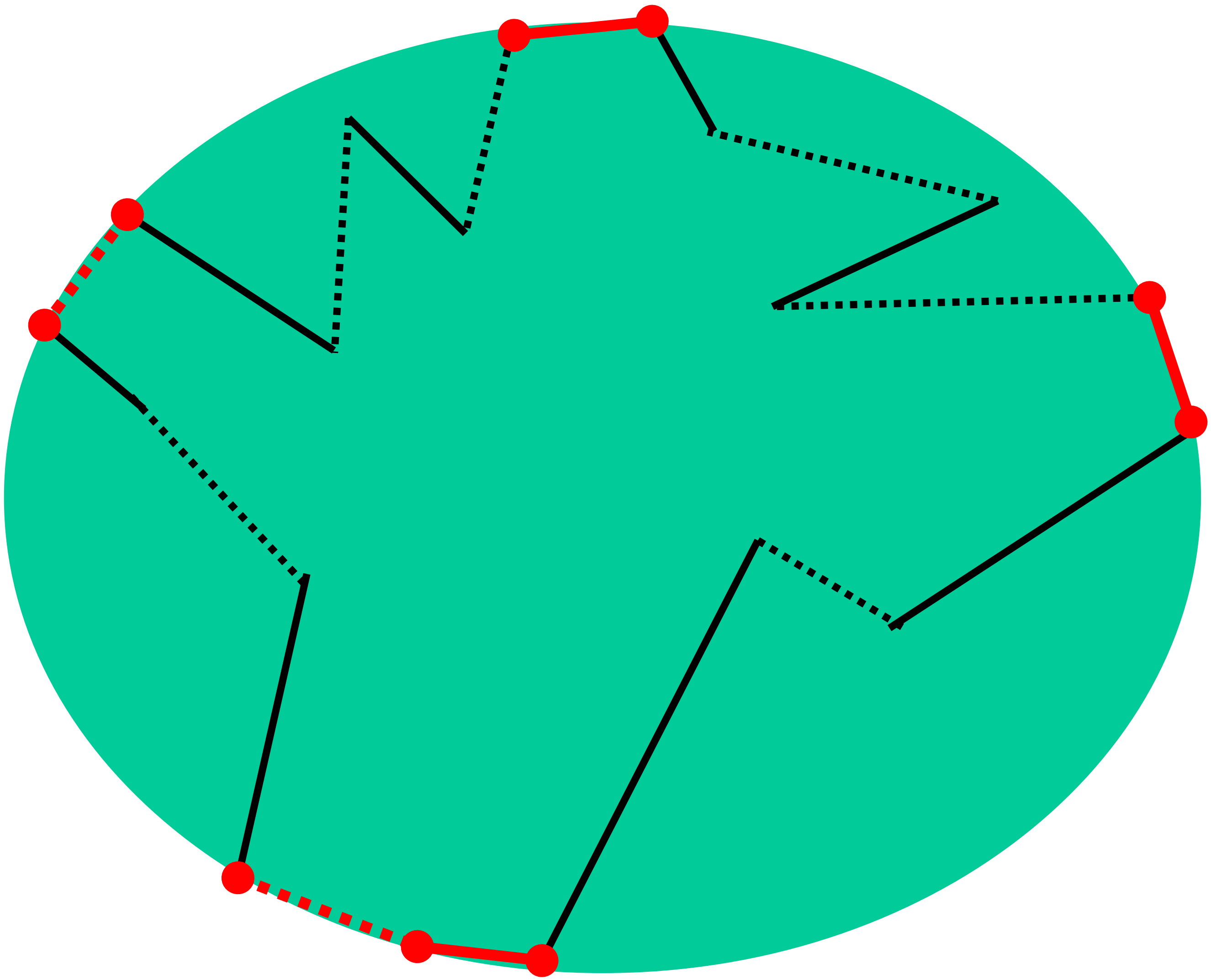
(5) 境界から内部へのジャンプ



(6) 境界から境界へのジャンプ



領域全体での一般拡散現象



今後の問題

拡散過程の構成問題

◆与えられた解析的データ(W, L)に対して、対応する拡散過程を構成すること。

◆多次元拡散過程を解析的に分類すること。

文献

- **Kazuaki Taira: Diffusion Processes and Partial Differential Equations Academic Press, 1988**
- **Kazuaki Taira: Semigroups, Boundary Value Problems and Markov Processes**

  Springer-Verlag, 2004

人口動態の数理

研究の目的

- 数理生態学における拡散的ロジスティック方程式を例にとって、マルサス及びフェアフルストの人口論の適用範囲の数学的な特徴付けを与えること。

マルサスの人口論

- 1798年、イギリスの経済学者マルサスは、論文「人口論」を発表した。
- 彼のアイデアによると、人口（一般に生物個体数）は、そのときの**総人口（総個体数）に比例**する。

フェアフルストの人口論

- ◆1837年、オランダの数理生物学者フェアフルストは、人口過密の要因を考慮に入れて、1つの修正されたマルサスの人口論を提唱した。
- ◆人口（一般には、生物の固体数）は、継続し得る限り増加し続けるのであるが、上限が存在する。

結論

- 生存競争が無く、食料も豊富な快適な居住地域におけるディリクレ問題の第1固有値がマルサスの人口論とフェアフルストの人口論の適用範囲の臨界値を与える。
- 快適な居住環境の形状は、分散型パッチよりも、集中型パッチの方が、生物の生存には適している。

拡散的ロジスティック方程式

拡散的ロジスティック問題

$$\frac{\partial w}{\partial t} - d\Delta w = m(x)w - h(x)w^2 \quad \text{in} \;\; \Omega \times (0, \infty)$$

$$w = 0 \quad \text{on} \;\; \partial\Omega \times (0, \infty)$$

$$w\big|_{t=0} = u_0 \quad \text{in} \;\; \Omega$$

各項の解釈

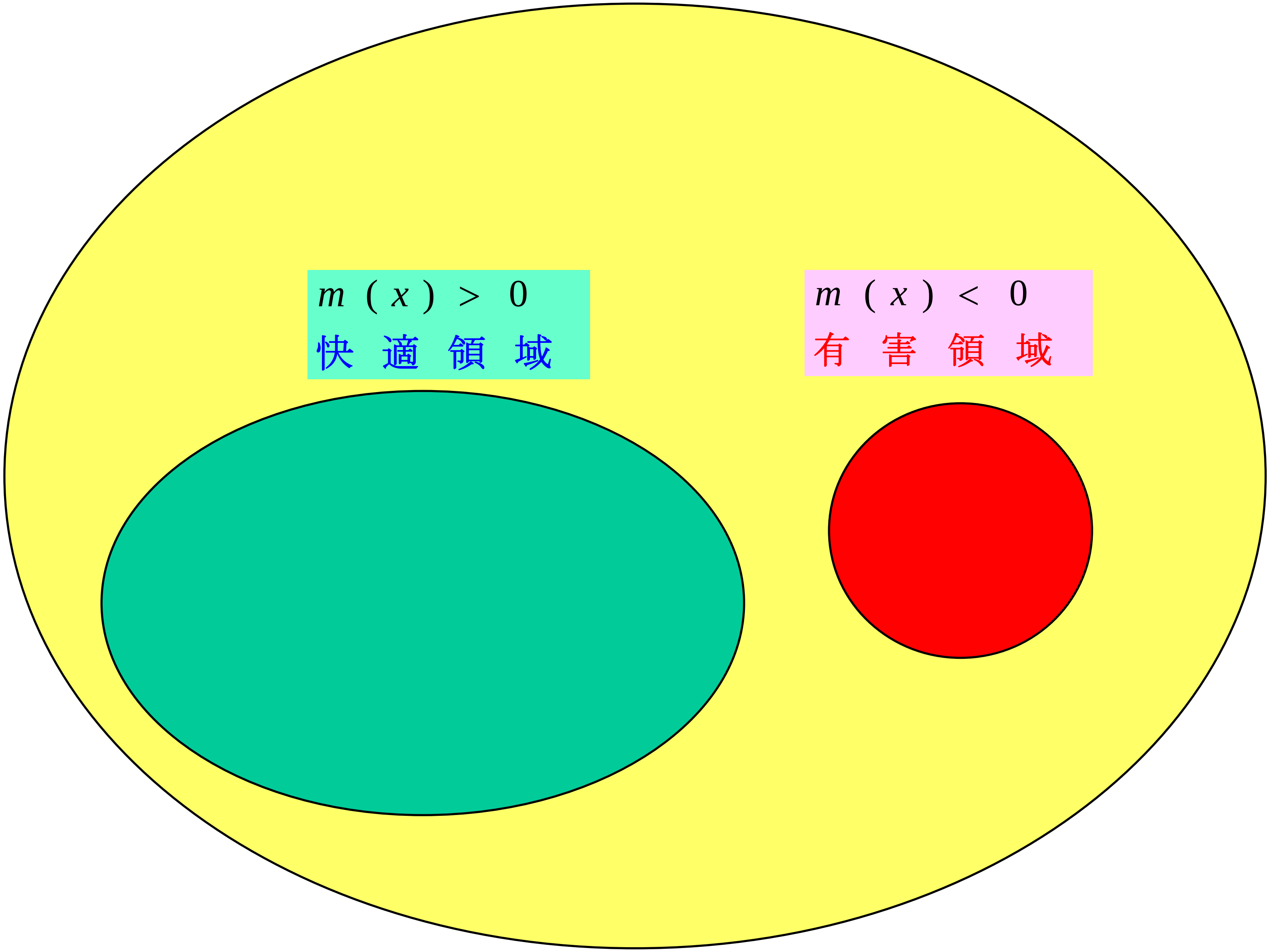
拡散係数のスケール変換

d倍

ブラウン運動の拡散速度

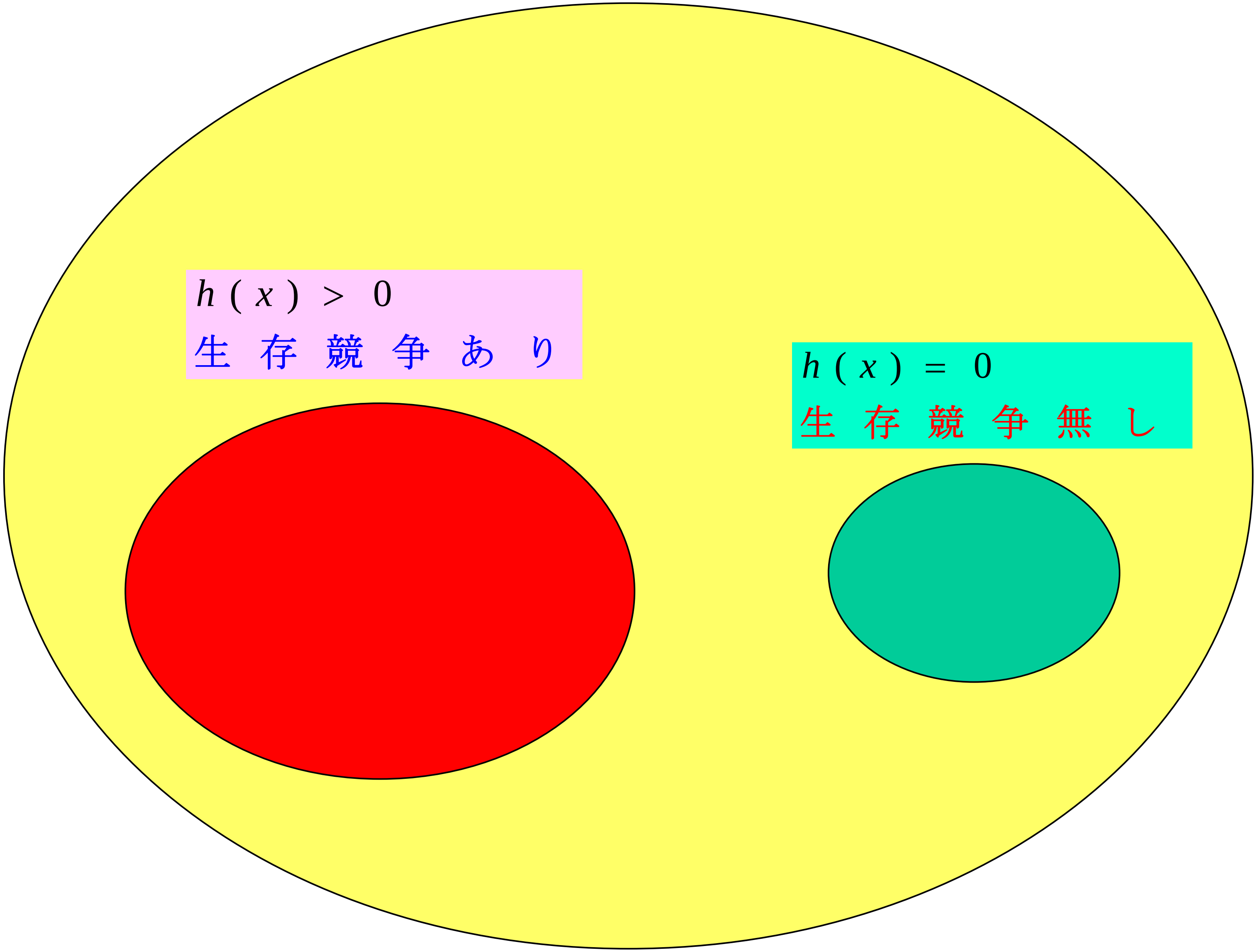
符号の意味

$$m(x)\begin{cases} >0 & (\text{快適領域}) \\ =0 & (\text{中立領域}) \\ <0 & (\text{有害領域}) \end{cases}$$


m(x) > 0
快適領域
m(x) < 0
有害領域

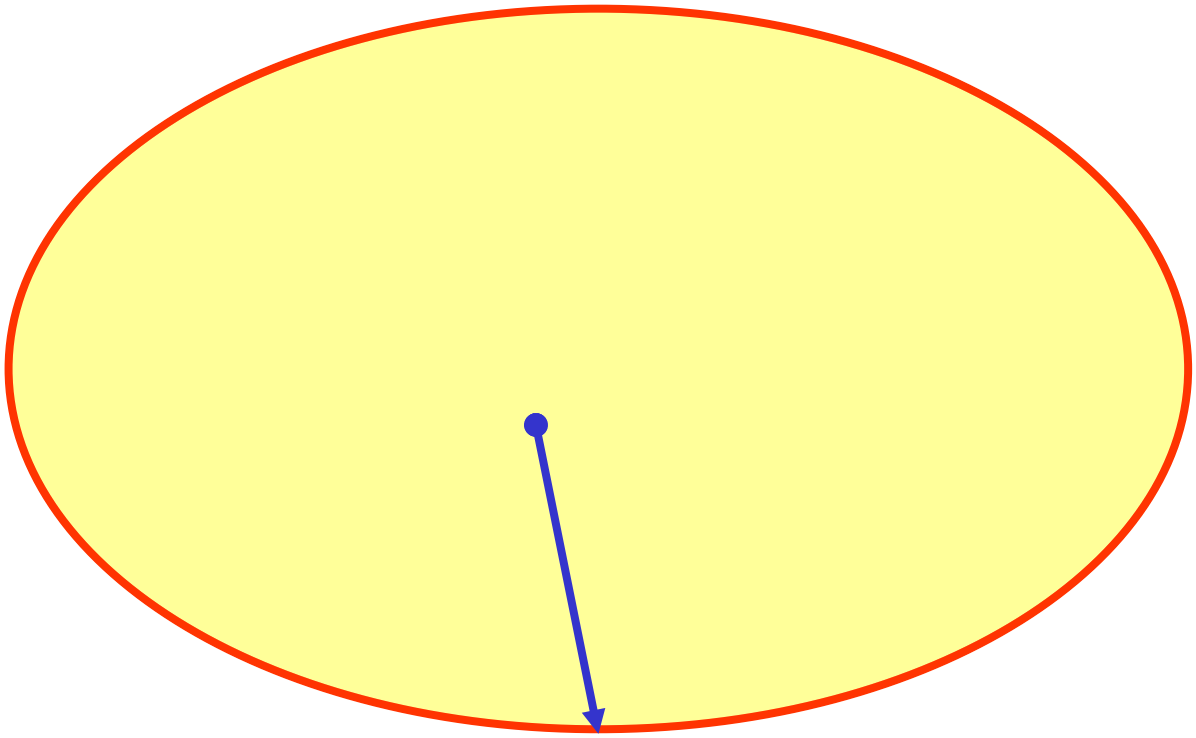
生存競争（自然淘汰）

$$h(x)\begin{cases} >0 & (\text{生存競争有り}) \\ =0 & (\text{生存競争無し}) \end{cases}$$


$h(x) > 0$
生存競争あり
$h(x) = 0$
生存競争無し

境界条件

危険壁

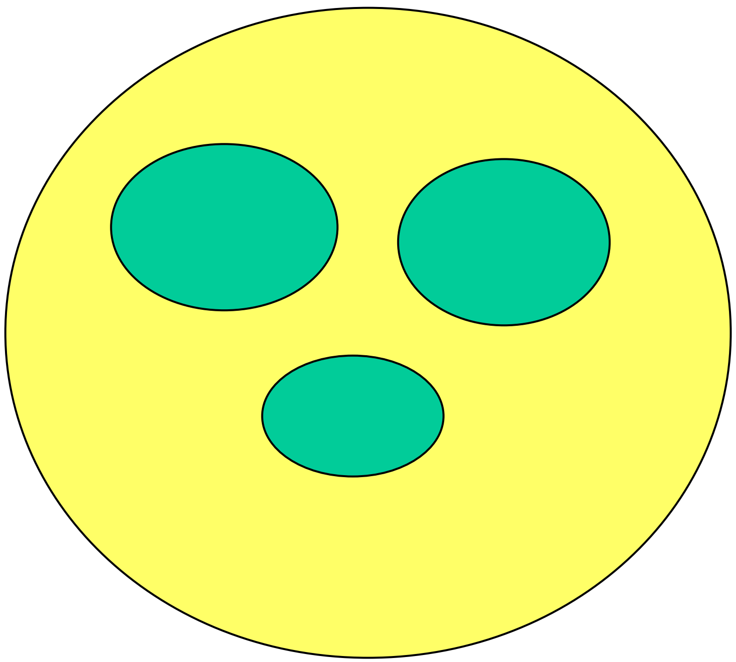


望ましい居住環境

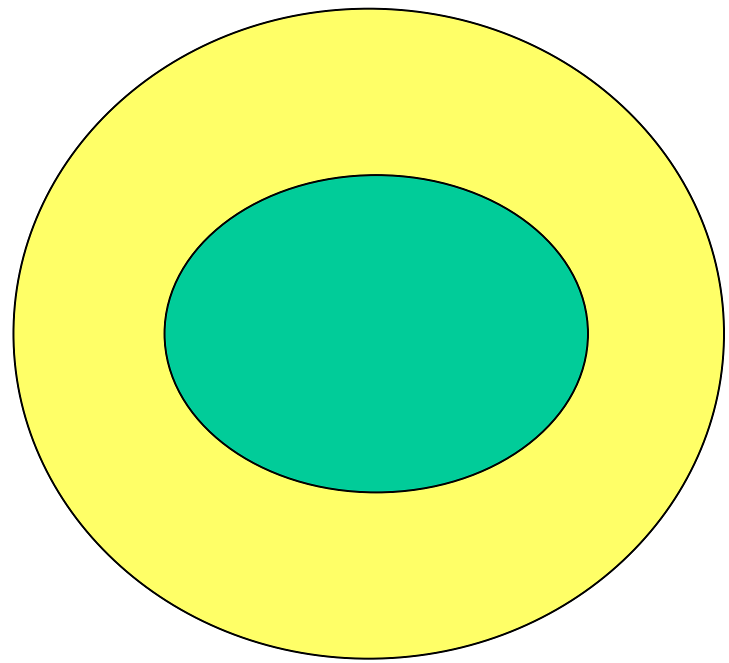
生存競争が無く、
食料も豊富な居住地域

望ましい居住環境の形は集中型

分散型パッチ



集中型パッチ



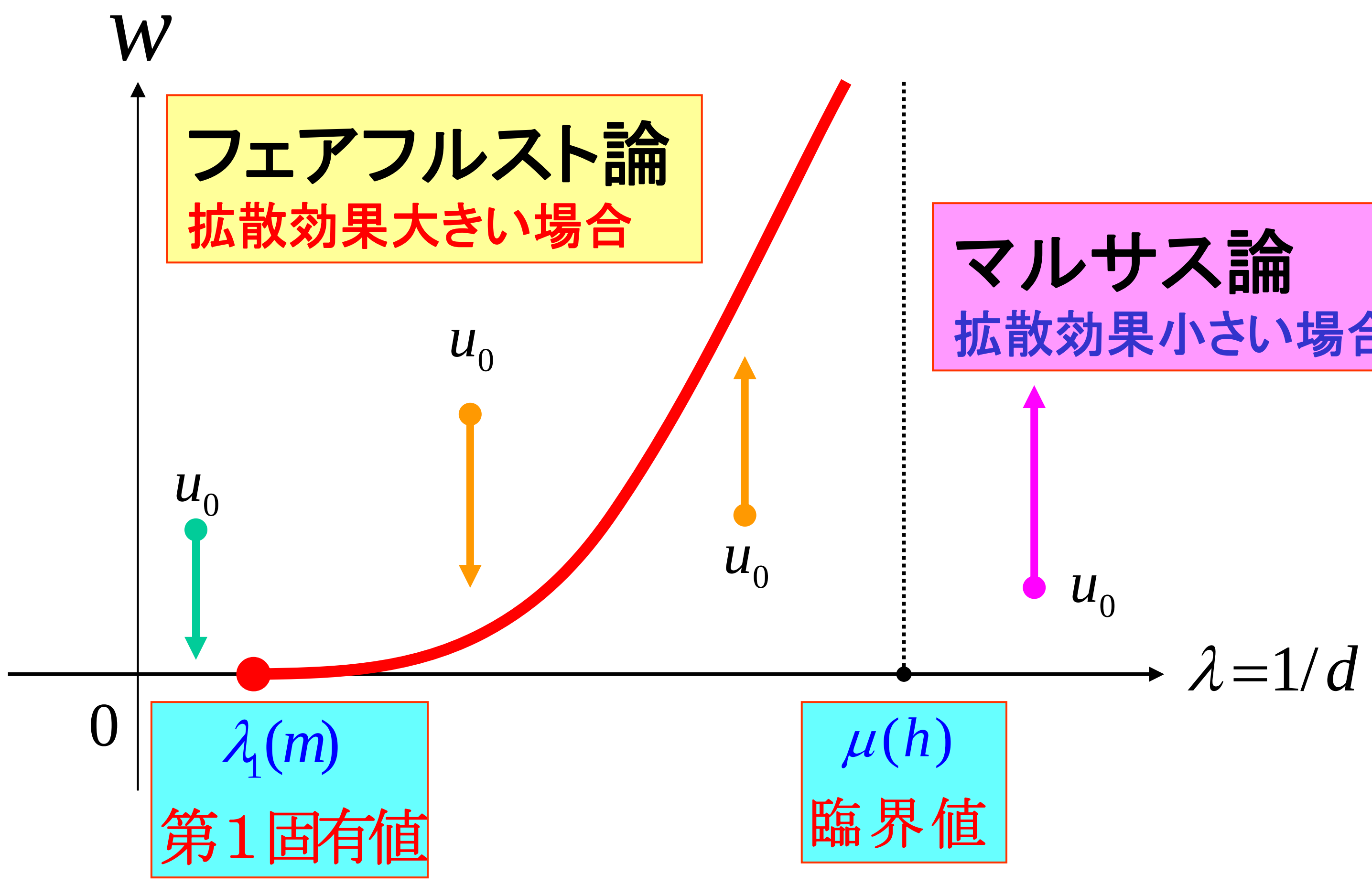
数学的根拠

分散型パッチと集中型パッチにおけるディリクレ問題の第1固有値の比較による。

人口論の適用範囲

◆人口の流動が小さい場合は、
マルサスの人口論に従う。
◆人口の流動が大きい場合は、
フェアフルストの人口論に従う。

人口動態論



w
フェアフルスト論
拡散効果大きい場合
マルサス論
拡散効果小さい場合
u_0
u_0
u_0
u_0
$\lambda = 1/d$
0
$\lambda_1(m)$
第１固有値
$\mu(h)$
臨界値

今後の問題

重要なパラメータの数値解析

$\lambda_1(m)$（第１固有値）

$\mu(h)$（臨界値）

文献

- **Kazuaki Taira:** **Logistic Dirichlet Problems with Discontinuous Coefficients**

  J. Math. Pures et Math., 82 (2003), 1137-1190
- **Kazuaki Taira:** **Diffusive Logistic Equations with Degenerate Boundary Conditions**

  Mediterranean Journal of Mathematics, 1 (2004), 315-365

化学反応の数理

研究の目的

- 化学反応論で良く知られている実験データを数学的に解明すること。
- フランク·カメネツキーのパラメータの臨界値（例えば発火点、消火点）の数値解析を実際に行うための理論的な裏付けを与えること。

結論

●フランク･カメネツキーのパラメータの臨界値(例えば発火点、消火点)と一般ロバン境界条件との関連を解明した。

反应扩散方程式

アレニウスの法則

◆化学反応速度論におけるアレニウスの法則は、指数関数型の非線型項に対応している。

ニュートンの冷却の法則

◆熱の交換は容器表面の内と外との温度差に比例するという**ニュートンの冷却の法則**は、**一般ロバン境界条件**に対応している。

反応拡散問題

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = \Delta \boldsymbol{u} + \lambda \exp\left[\frac{\boldsymbol{u}}{1+\varepsilon \boldsymbol{u}}\right] \quad \text{in} \quad \Omega \times (0,\infty)$$

$$\boldsymbol{a}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \mathbf{n}} + (1-\boldsymbol{a})\boldsymbol{u} = \mathbf{0} \quad \text{on} \quad \partial\Omega \times (0,\infty)$$

$$\boldsymbol{u}\,\big|_{t=0} = \boldsymbol{u}_0 \quad \text{in} \quad \Omega$$

各項の解釈

活性化エネルギー

$$\boxed{\frac{1}{\varepsilon}}$$

- 化学反応が起こるために、越えなければならない**エネルギーの山**

活性化エネルギー（敷居エネルギー）

- 活性化エネルギーの山が高ければ、化学反応はゆっくりと進行する。
- 活性化エネルギーの山が低ければ、化学反応は速やかに進行する。

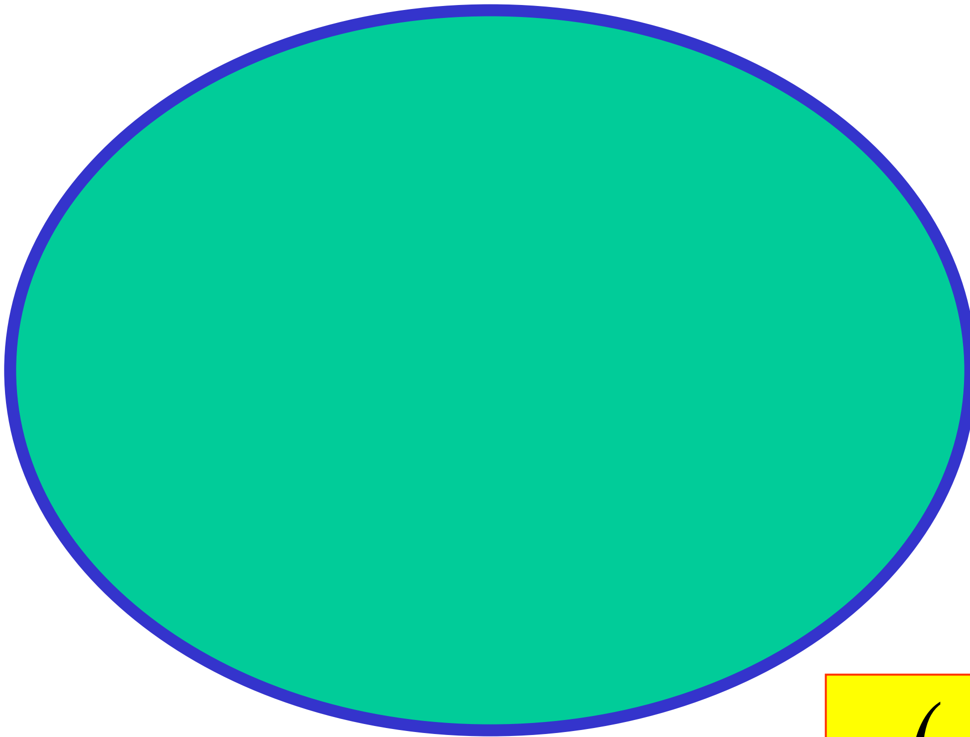
フランク･カメネツキーのパラメータ

$$\lambda$$

- 化学反応物の（無次元化された）初期濃度

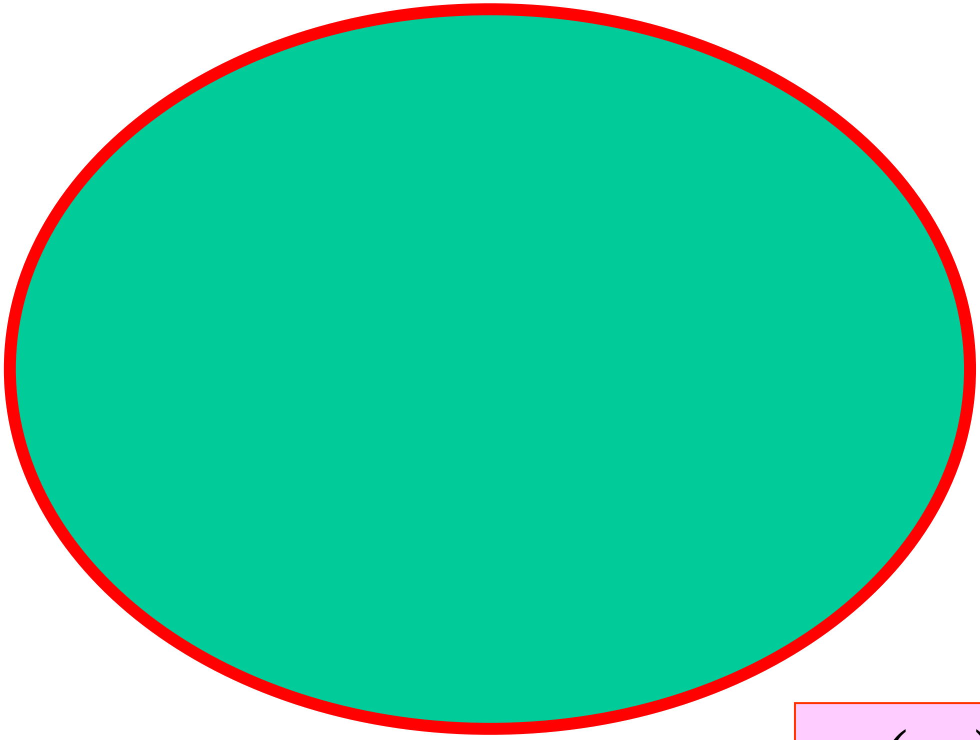
境界条件

等温(冷却)条件



$$\boldsymbol{a}\left(x\right)\equiv 0$$

断熱（保温）条件

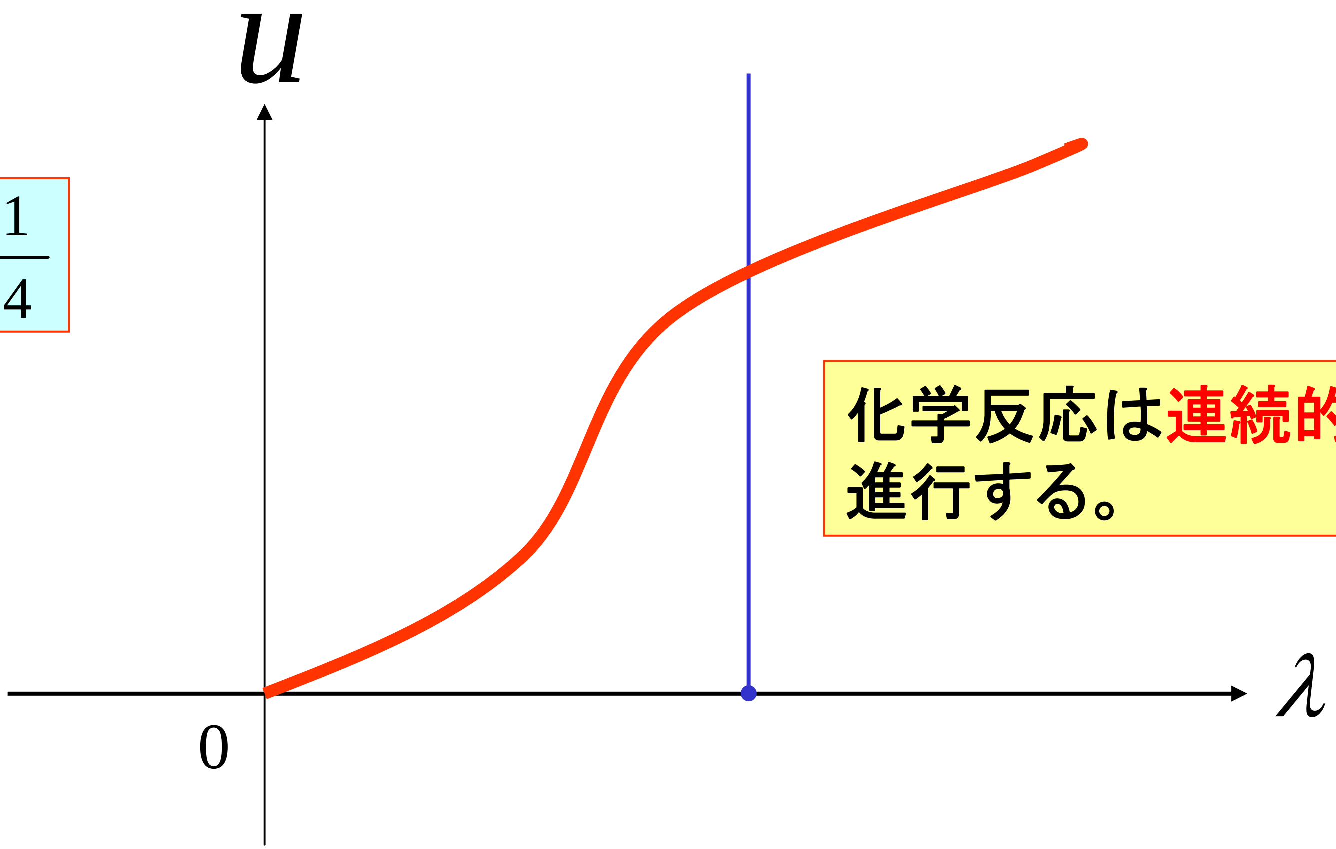


$$\boldsymbol{a}(x) \equiv 1$$

化学反応論

低い活性化エネルギー

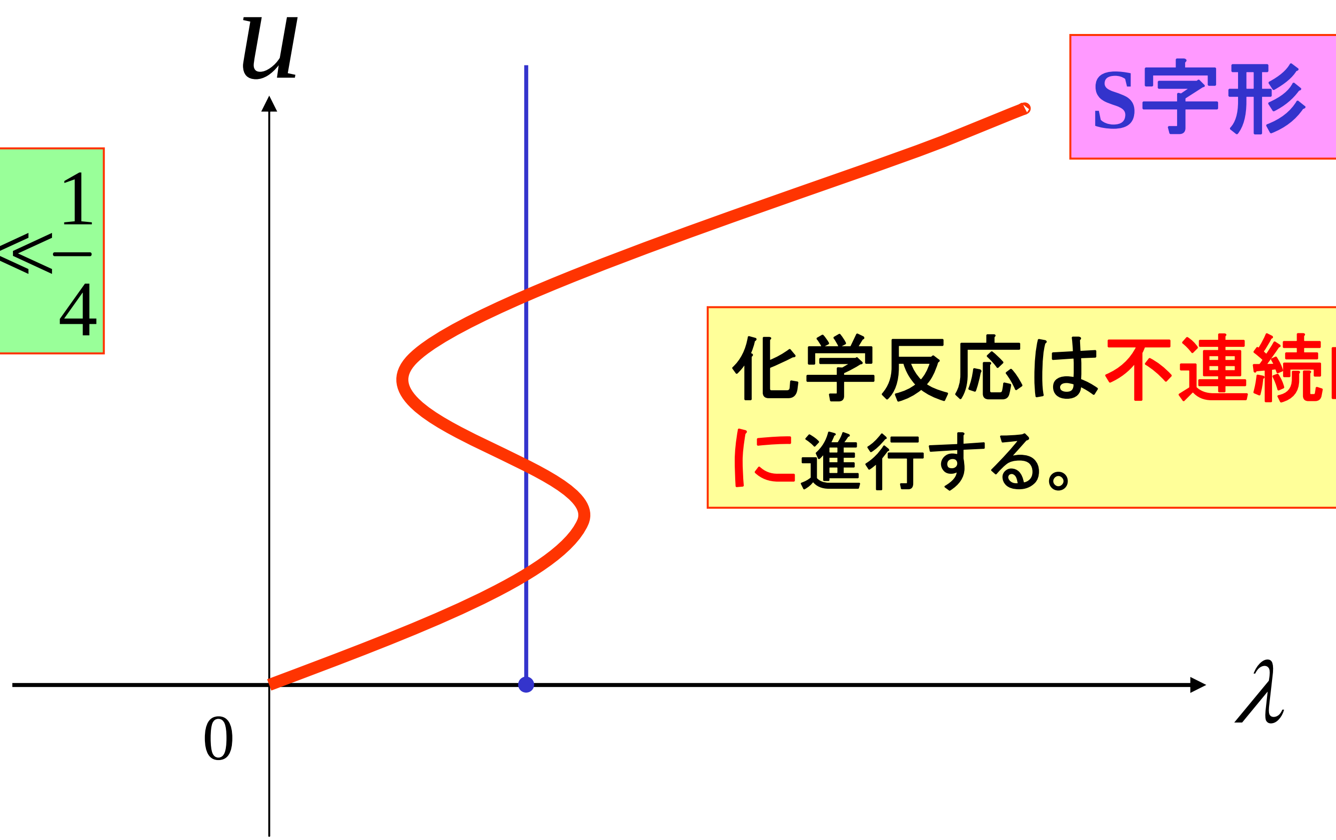
$$\varepsilon \geq \frac{1}{4}$$



化学反応は**連続的に**進行する。

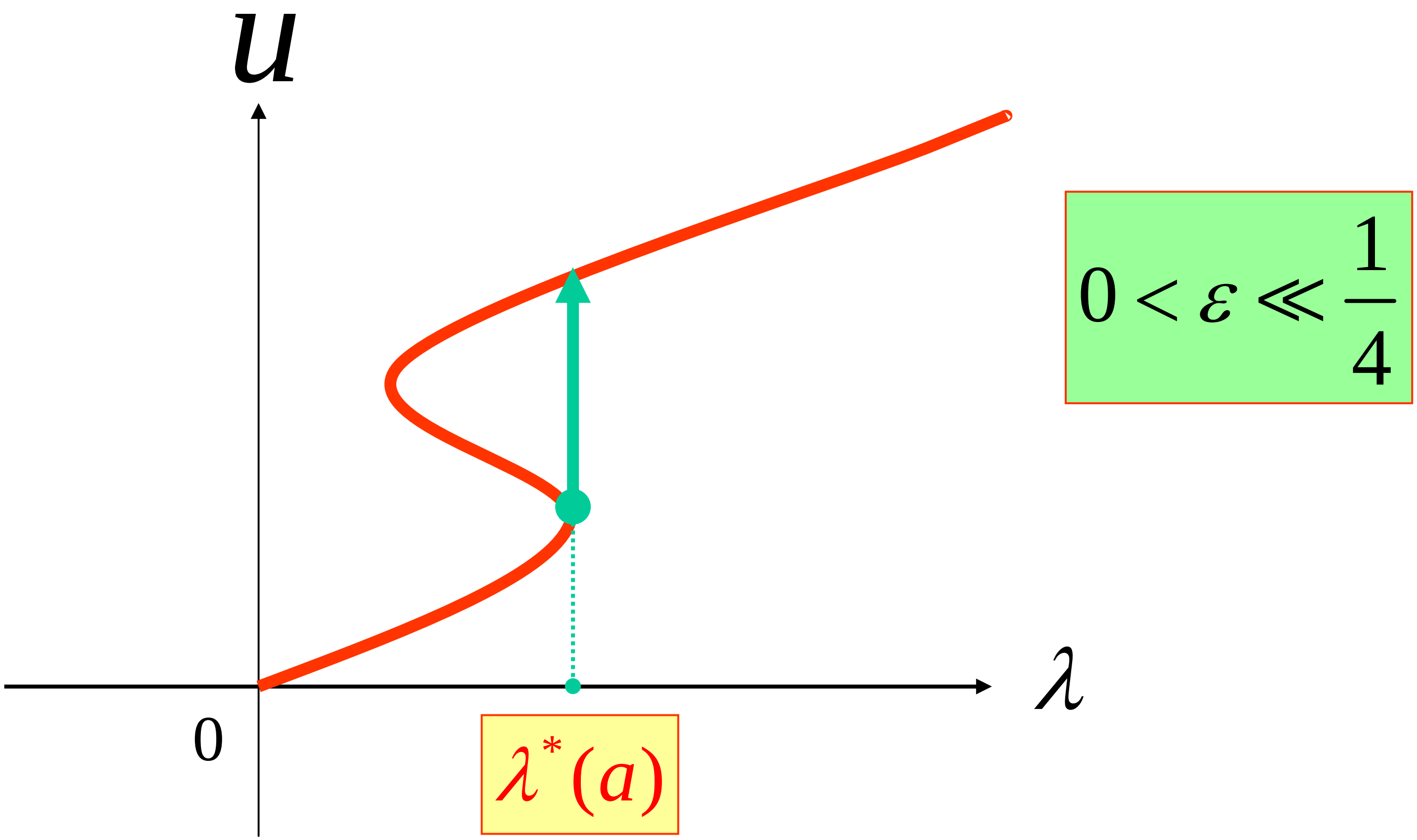
高い活性化エネルギー

$$0<\varepsilon\ll\frac{1}{4}$$

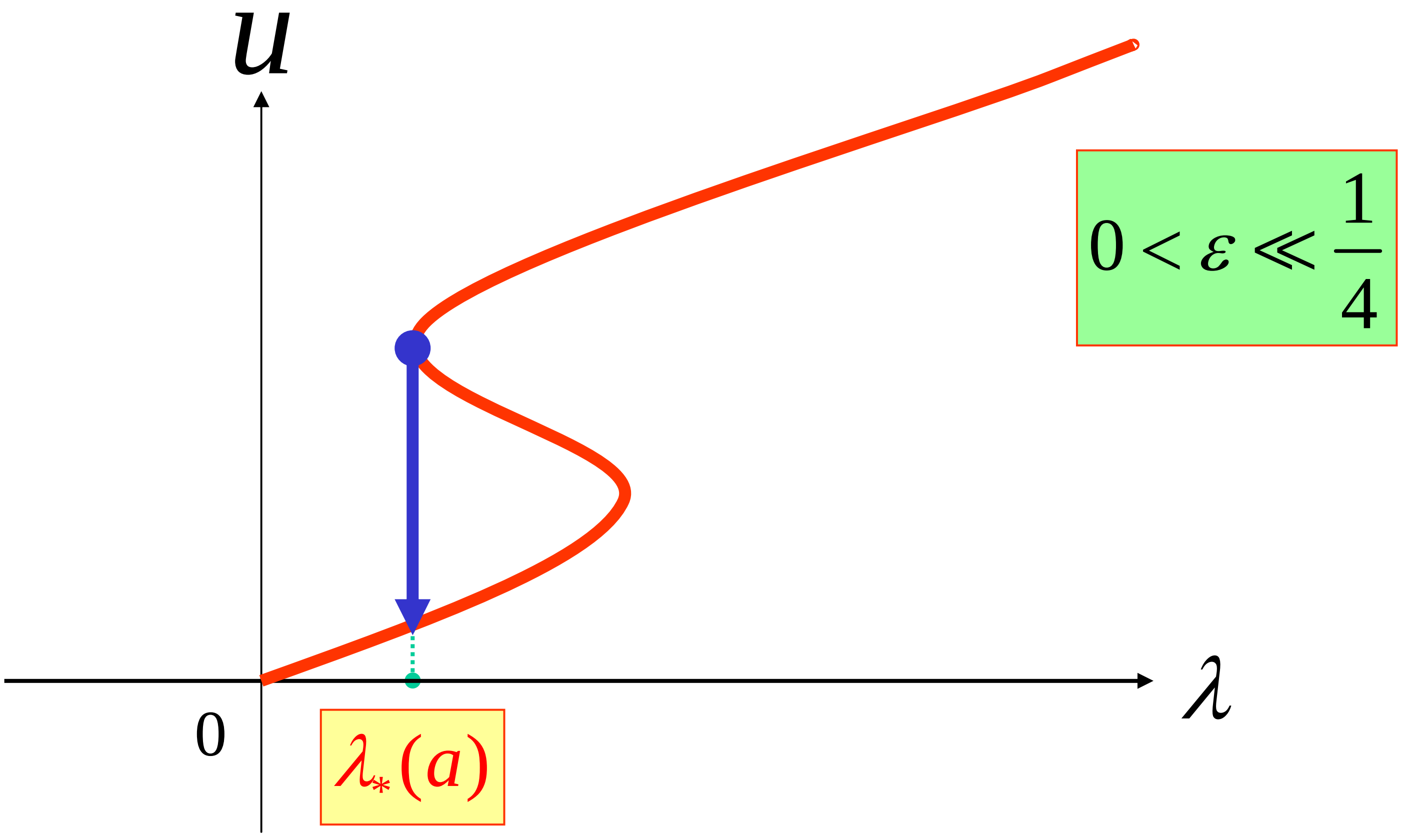


化学反応は**不連続的に**進行する。

発火点（熱爆発）



消火点(温度失活)



今後の問題

パラメータの数値解析

$\lambda^{*}(a)$（発火点）

$\lambda_{*}(a)$（消火点）

文献

- **Kazuaki Taira:** **A Mathematical Analysis of Thermal Explosions**

  International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 10 (2001), 581-607

- **Kazuaki Taira:** **Semilinear Parabolic Boundary Value Problems in Combustion Theory**

  Journal of Mathematical Sciences, University of Tokyo, 10 (2003), 455-494