微積分第7回講義ノート

多変数の微分　多重線形代数

高階の微分

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x)$　xでの微分係数

$f': \mathbb{R} \to \mathbb{R}$　1階の微分

$f''(x)$

$f'': \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

内積

$\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^2$

$\mathbb{a} \cdot \mathbb{b} \in \mathbb{R}$

$(\mathbb{a}, \mathbb{b}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{a} \cdot \mathbb{b} \in \mathbb{R}$

(1) $(\mathbb{a}_1 + \mathbb{a}_2) \cdot \mathbb{b} = \mathbb{a}_1 \cdot \mathbb{b} + \mathbb{a}_2 \cdot \mathbb{b}$

(2) $(\alpha \mathbb{a}) \cdot \mathbb{b} = \alpha (\mathbb{a} \cdot \mathbb{b})$　$(\alpha \in \mathbb{R})$

(3) $\mathbb{a} \cdot (\mathbb{b}_1 + \mathbb{b}_2) = \mathbb{a} \cdot \mathbb{b}_1 + \mathbb{a} \cdot \mathbb{b}_2$

(4) $\mathbb{a} \cdot (\beta \mathbb{b}) = \beta \cdot (\mathbb{a} \cdot \mathbb{b})$　$(\beta \in \mathbb{R})$

$\_ \cdot \mathbb{b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$　線型

$\mathbb{a} \cdot \_ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$　線型

二重線形写像

行列式 $|\mathbb{a}\ \mathbb{b}|$　$\mathbb{a}$と$\mathbb{b}$で張られる平行四辺形の付号の付いた面積

反時計回り → +，時計回り → −

αが正(負)

$|\alpha \mathbb{a}\ \mathbb{b}| = \alpha |\mathbb{a}\ \mathbb{b}|$

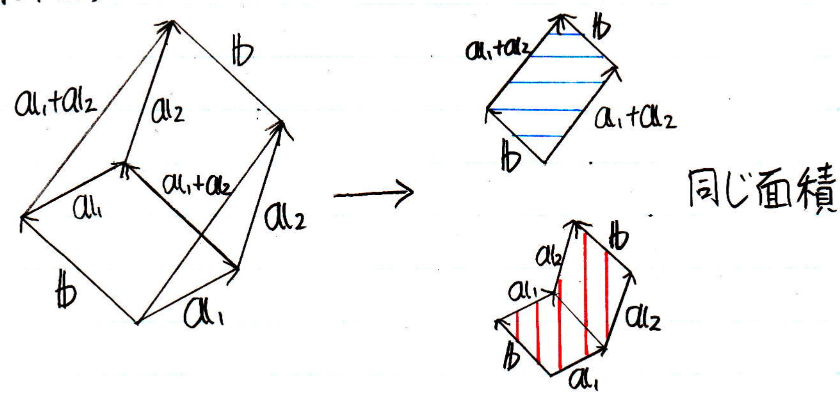
$|\mathbb{a}_1 + \mathbb{a}_2\ \mathbb{b}| = |\mathbb{a}_1\ \mathbb{b}| + |\mathbb{a}_2\ \mathbb{b}|$

二重線形

$|\mathbb{a}\ \mathbb{b}| = -|\mathbb{b}\ \mathbb{a}|$

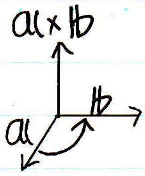
$\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1 \mathbb{e}_1 + a_2 \mathbb{e}_2$

$\mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = b_1 \mathbb{e}_1 + b_2 \mathbb{e}_2$



$$
\begin{aligned}
|\mathbb{a}\ \mathbb{b}| &= |a_1 \mathbb{e}_1 + a_2 \mathbb{e}_2\ \ b_1 \mathbb{e}_1 + b_2 \mathbb{e}_2| \\
&= |a_1 \mathbb{e}_1\ b_1 \mathbb{e}_1| + |a_1 \mathbb{e}_1\ b_2 \mathbb{e}_2| + |a_2 \mathbb{e}_2\ b_1 \mathbb{e}_1| + |a_2 \mathbb{e}_2\ b_2 \mathbb{e}_2| \\
&= a_1 b_1 \underbrace{|\mathbb{e}_1 \mathbb{e}_1|}_{=0} + a_1 b_2 |\mathbb{e}_1 \mathbb{e}_2| + a_2 b_1 |\mathbb{e}_2 \mathbb{e}_1| + a_2 b_2 \underbrace{|\mathbb{e}_2 \mathbb{e}_2|}_{=0} \\
&= \underbrace{|\mathbb{e}_1 \mathbb{e}_2|}_{=1} (a_1 b_2 - a_2 b_1) = a_1 b_2 - a_2 b_1
\end{aligned}
$$

$\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^3$ 右手系
外積 左手系
$\mathbb{a} \times \mathbb{b} \in \mathbb{R}^3$ (ex)糖



$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 二重線型

$x, y \in \mathbb{R}^n$

$f(x, y) \in \mathbb{R}^m$

$f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y)$

$f(\alpha x, y) = \alpha f(x, y)$

$f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2)$

$f(x, \beta y) = \beta f(x, y)$

$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 線型

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \mathbb{e}_1 + \cdots + x_n \mathbb{e}_n$$

$$\begin{aligned} g(x) &= g(x_1 \mathbb{e}_1 + \cdots + x_n \mathbb{e}_n) \\ &= x_1 g(\mathbb{e}_1) + \cdots + x_n g(\mathbb{e}_n) \end{aligned}$$

$$g(\mathbb{e}_1) = \mathbb{a}_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

$$\vdots$$

$$g(\mathbb{e}_n) = \mathbb{a}_n = \begin{pmatrix} a_n^1 \\ \vdots \\ a_n^m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

$$\left(a_j^i\right) \begin{matrix} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{matrix}$$ mn個 行列

$$\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 \mathbb{e}_1 + \cdots + a_n \mathbb{e}_n$$

$$\mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = b_1 \mathbb{e}_1 + \cdots + b_n \mathbb{e}_n$$

$$f(\mathbb{a}, \mathbb{b}) = f(a_1 \mathbb{e}_1 + \cdots + a_n \mathbb{e}_n, b_1 \mathbb{e}_1 + \cdots + b_n \mathbb{e}_n)$$
$$= \sum_{1 \le j_1, j_2 \le n} f(a_{j_1} \mathbb{e}_{j_1}, b_{j_2} \mathbb{e}_{j_2}) = \sum_{1 \le j_1, j_2 \le n} a_{j_1} b_{j_2} \underline{f(\mathbb{e}_{j_1}, \mathbb{e}_{j_2})}$$

$$\mathbb{R}^m \ni f(\mathbb{e}_{j_1}, \mathbb{e}_{j_2}) = \begin{pmatrix} \alpha^1_{j_1 j_2} \\ \alpha^2_{j_1 j_2} \\ \vdots \\ \alpha^m_{j_1 j_2} \end{pmatrix} \qquad \left(\alpha^i_{j_1 j_2}\right)^{1 \le i \le m}_{1 \le j_1, j_2 \le n} \qquad mn^2 個$$

多重線形代数

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$x \in \mathbb{R}^n$

$f'(x) = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 線形写像

$\left(\alpha^i_j\right)^{1 \le i \le m}_{1 \le j \le n}$ mn個

$f''(x) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 二重線形写像

$\left(\alpha^i_{j_1 j_2}\right)^{1 \le i \le m}_{1 \le j_1, j_2 \le n}$ mn^2個

$f'''(x) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 三重線形写像

$\left(\alpha^i_{j_1 j_2 j_3}\right)^{1 \le i \le m}_{1 \le j_1, j_2, j_3 \le n}$ mn^3個

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \qquad \left(\alpha^i_j\right)^{1 \le i \le m}_{1 \le j \le n}$

$x \in \mathbb{R}^n$

$f'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ への線形写像

全体

線型空間 本質的

$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n ; \mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^{mn}$

$\shortparallel$

$f' : \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n ; \mathbb{R}^m)$

$f''(x) \qquad \mathcal{L}(\mathbb{R}^n ; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n ; \mathbb{R}^m))$

$= \mathcal{L}(\mathbb{R}^n ; \mathbb{R}^n ; \mathbb{R}^m)$

$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$