微積分第5回講義ノート

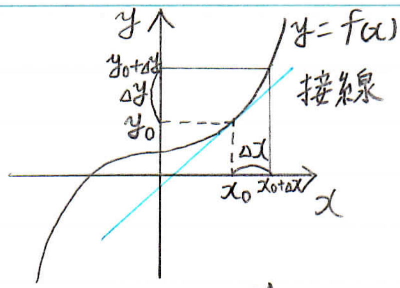
多変数の微分

conceptual

曲がっているのは嫌

⇓

真っ直ぐなもので置き換えよう



傾き

$f'(x_0)$ 微分係数

直線

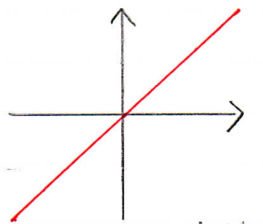
$\Delta x \longmapsto \Delta y$

複雑

$$\Delta y = a\Delta x \quad (aは\overset{比例}{定数})$$

比例関係　特徴づけられる

比例関数



原点を通る直線

比例関数　線型関数

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$　　$x, y, \alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) \\ f(\alpha x) = \alpha f(x) \end{cases}$$

比例関数の全体　空間

足し算　線型空間

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

スカラー倍 (定数倍)

$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$

$(f+g)+h = f+(g+h)$

$\alpha(f+g) = \alpha f + \alpha g$

1対1

$f \leftrightarrow a$

$f(x) = ax$

$$\left.\begin{matrix} f \leftrightarrow a \\ g \leftrightarrow b \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} f+g \leftrightarrow a+b \\ \alpha f \leftrightarrow \alpha a \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \end{matrix}$$

$\because$ $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = ax + bx = (a+b)x$

$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) = \alpha a x = (\alpha a)x$

$$\begin{aligned} (g\circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(ax) \\ &= b(ax) \\ &= bax \\ &= (ba)x \end{aligned}$$

$g\circ f \leftrightarrow ba$

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

太文字

$n, m \in \mathbb{N}$ (nとmは自然数), $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}) \\ f(\alpha \boldsymbol{x}) = \alpha f(\boldsymbol{x}) \end{array}\right\} \text{線型関数}$$

比例関数（$\mathbb{R}$から$\mathbb{R}$への線型関数（写像））は比例定数で表現される

$$\boxed{\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} = x_1 \boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n \boldsymbol{e}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i$$

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= f(x_1 \boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n \boldsymbol{e}_n) \\ &= f(x_1 \boldsymbol{e}_1) + \cdots + f(x_n \boldsymbol{e}_n) \\ &= x_1 \underbrace{f(\boldsymbol{e}_1)}_{\boldsymbol{a}_1} + \cdots + x_n \underbrace{f(\boldsymbol{e}_n)}_{\boldsymbol{a}_n} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^m$

下付き

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$[\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

関数fは$m \times n$の行列で表現される

$$= \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^n$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 線型 (形)　　　　線型空間 表現

$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ (足し算)　　$f \longleftrightarrow \overset{m\times n}{A}$

$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ ($\underline{\text{定数}}$倍) スカラー　　$g \longleftrightarrow B$

$f+g \longleftrightarrow A+B$

$\alpha f \longleftrightarrow \alpha A$

$m=n=2$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix}$$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ (線型)

$$(g\circ f)(x) = g(f(x))$$

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x+y) &= g(f(x+y)) \\ &= g(f(x)+f(y)) \\ &= g(f(x))+g(f(y)) \\ &= (g\circ f)(x)+(g\circ f)(y)\end{aligned}$$

$f \longleftrightarrow \overset{m\times n}{A}$

$g \longleftrightarrow \overset{m\times l}{B}$

$g\circ f$　(※ $f\circ g$ は成り立たない)

<u>レポート問題</u>

$l=m=n=2$ のとき

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ とする。

このときの 合成関数 $g\circ f$ を表す行列を求めなさい。