2016年1月19日(火)

微積分第25回講義ノート

留数定理を用いた定積分の計算

前回 分数式

今回 三角関数

問題 $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta}\ (a>1)$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

$\because$ $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta}$

$$=\int_\gamma\frac{1}{a+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\frac{dz}{iz}$$

$$=\int_\gamma\frac{1}{a+\frac{1}{2z}(z^2+1)}\frac{dz}{iz}$$

$$=\int_\gamma\frac{2z}{2az+z^2+1}\frac{dz}{iz}$$

$$=\frac{2}{i}\int_\gamma\frac{dz}{z^2+2az+1}$$ — 分数式

$$=\frac{2}{i}\int_\gamma\frac{dz}{(z-\alpha)(z-\beta)}$$

$\gamma:[0,2\pi]\ni\theta\mapsto e^{i\theta}$

Eulerの関係式

$z=e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

$\frac{1}{z}=e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$

$\cos\theta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$

$\sin\theta=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$ (今回は使わない)

$\frac{dz}{d\theta}=ie^{i\theta}=iz$

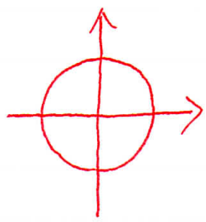
$d\theta=\frac{dz}{iz}$

$z^2+2az+1=0$

解 $z=-a\pm\sqrt{a^2-1}$

$\alpha=-a+\sqrt{a^2-1}$ (内)

$\beta=-a-\sqrt{a^2-1}$ (外)



Report

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\cos 2\theta\, d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}\ (a^2<1)$

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2}\ (a>1)$

(3) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\theta+\sin^2\theta}\ (a>0)$

微分方程式'　直線上の運動　一意性　ニュートン

(1) $x'=ax$ (aは定数)

$x=Ce^{at}$ (Cは定数)

$x'=Cae^{at}=a(Ce^{at})$

$=ax$

$t=0$　初期条件

0　1 →　$x=x(t)$　t:時刻

$x=x(t)$が(1)の微分方程式を満たしたとする

$x(t)e^{-at}=\frac{x(t)}{e^{at}}$

$f(t)=x'e^{-at}-xae^{-at}=axe^{-at}-xae^{-at}=0$

$x(t)=Ce^{at}$

決定論的世界観

線形方程式

$x=x(t)$

$y=y(t)$

$\left.\begin{array}{l} x'=2x+y \\ y'=x+2y \end{array}\right\}$ 連立方程式

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$　A: 2×2の行列

$y=\cos t$

$x=\sin t$

$x'=\cos t=y$

$y'=-\sin t=-x$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$f(x)=e^x$

Z

無限次の多項式

$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\cdots$

$e^A=E+A+\frac{1}{2}A^2+\frac{1}{3!}A^3+\cdots$　$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$　$\left(\begin{array}{l} x'=ax \\ \text{解}\ x=Ce^{at} \end{array}\right)$

という連立微分方程式を解け

ただし、Aは2×2の行列

$e^{At}=E+At+\frac{1}{2}(At)^2+\frac{1}{3!}(At)^3+\frac{1}{4!}(At)^4+\cdots$

$=E+At+\frac{1}{2}A^2t^2+\frac{1}{3!}A^3t^3+\frac{1}{4!}A^4t^4+\cdots$

$$(e^{At})' = A + A^2t + \frac{1}{2!}A^3t^2 + \frac{1}{3!}A^4t^3 + \cdots$$
$$= A(E + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \cdots)$$
$$= Ae^{At}$$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{At}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ (C_1とC_2は定数)

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = Ae^{At}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ 解ける

$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ 対角型

$A^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix}$ $e^A = E + \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} \alpha^3 & 0 \\ 0 & \beta^3 \end{pmatrix} + \cdots$

$A^3 = \begin{pmatrix} \alpha^3 & 0 \\ 0 & \beta^3 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^\beta \end{pmatrix}$

$A^4 = \begin{pmatrix} \alpha^4 & 0 \\ 0 & \beta^4 \end{pmatrix}$ $e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} & 0 \\ 0 & e^{\beta t} \end{pmatrix}$

$$e^{PAP^{-1}} = E\,(PAP^{-1}) + \frac{1}{2}(PAP^{-1})^2 + \frac{1}{3!}(PAP^{-1})^3 + \cdots = Pe^AP^{-1}$$

$PP^{-1} = P^{-1}P = E$

$(PAP^{-1})^2 = PA\underbrace{P^{-1}P}_{E}AP^{-1} = PA^2P^{-1}$

$(PAP^{-1})^n = PA^nP^{-1}$

対角化可能

$A = P\,B\,P^{-1}$

対角型