微積分第20回講義ノート

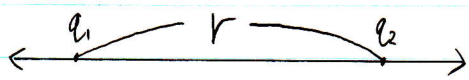
Coulombの法則 ⇒ Gaussの法則

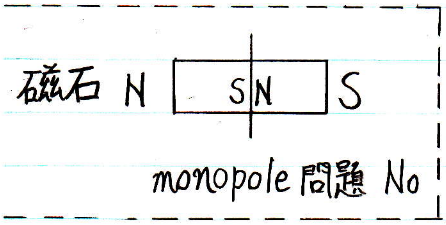
符号

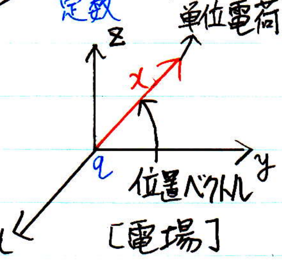
単位

$k \cdot \dfrac{q_1 q_2}{r^2}$

比例定数







$\|\mathbf{r}\| = r$ 単位ベクトル

$f(\mathbf{r})\ k\dfrac{q}{r^2} \cdot \dfrac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}$

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$f(\mathbf{r}) = kq(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

問 発散を計算せよ.

$\mathrm{div}\, f(\mathbf{r})$

$$= \frac{\partial}{\partial x} kq(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} x + \frac{\partial}{\partial y} kq(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} y + \frac{\partial}{\partial z} kq(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} z$$

$$= kq\left\{-3x^2 \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} + (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} - 3y^2 \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} + (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} - 3z^2 \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} + (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right\}$$

$$= kq\left\{3(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} - 3(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}\right\}$$

$$= 0$$

Gauss の発散定理

$\mathbb{f}$ 閉曲面 Σ

囲まれる領域 Ω

$$\int_\Sigma \mathbb{f}\cdot d\mathbb{S} = \int_\Omega \underbrace{(\mathrm{div}\,\mathbb{f})}_{\overset{\shortparallel}{0}} dV$$

面積分　　体積分

<u>逆二乗の法則</u>

<u>逆三乗の法則</u>

report

I. $\mathbb{f}(\mathbb{r}) = kq\,\mathbb{r}\,|\mathbb{r}|^k$ (kは実数)

神は数学者なのか？

q

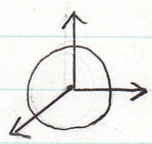
Σ

球面

原点中

半径 a

球 Ω



$$\frac{kq}{a^2} \times 4\pi a^2 = 4\pi kq$$

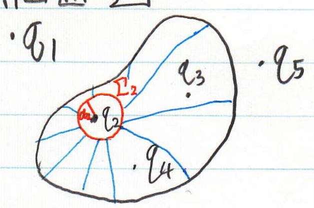
接平面

$\mathbb{f}\cdot d\mathbb{S}$

特異点

どこがおかしいのか…

閉曲面 Σ



<u>重ね合わせの原理</u>

$$\mathbb{f} = \mathbb{f}_1 + \mathbb{f}_2 + \mathbb{f}_3 + \mathbb{f}_4 + \mathbb{f}_5$$

$$\int_\Sigma \mathbb{f}\cdot d\mathbb{S} = \underbrace{\int_\Sigma \mathbb{f}_1\, d\mathbb{S}}_{\overset{\shortparallel}{0}} + \cdots + \underbrace{\int_\Sigma \mathbb{f}_5\, d\mathbb{S}}_{\overset{\shortparallel}{0}}$$

$\Sigma \cup \Sigma_2$

$$\int_{\Sigma\cup\Sigma_2} \mathbb{f}_2\, d\mathbb{S} = 0$$

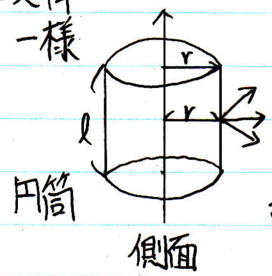
$$\int_\Sigma \mathbb{f}\cdot d\mathbb{S} - \int_{\Sigma_2} \mathbb{f}\, d\mathbb{S} = 0 \text{ より}$$

$$\int_\Sigma \mathbb{f}\cdot d\mathbb{S} = \underbrace{\int_{\Sigma_2} \mathbb{f}\, d\mathbb{S}}_{4\pi k q_2}$$

Ⅱ 無限に延びた針金

不文律

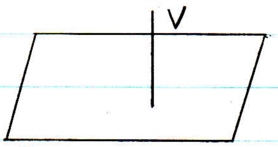
一様



単位長さあたり
σの電荷

$f \cdot \_\_ = 4\pi k\, \underline{l\sigma}$

Ⅲ 単位面積あたりσ



$f \times 4\pi r^2 = \delta$

$f = 0$

Ⅳ