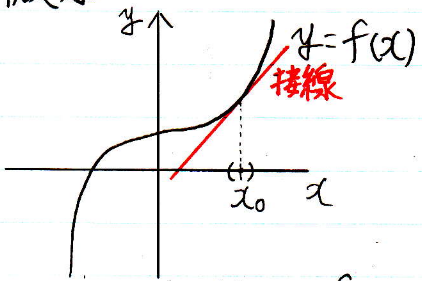
微積分第2回講義ノート

微分 ← 曲がっているのはイヤ まっすぐなものにおきかえましょう 基本テーゼ



19C〜 曲線 $y=f(x)$ は(接線に近づいていく)

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

17,18C Newton Euler
十分近づけば $y=f(x)$ と接線は一致する

$D=\{d\in\mathbb{R}\mid d^2=0\}$ $0\in D$

$$f(x_0+d)=f(x_0)+\underset{\uparrow\, f'(x_0)}{a}d \quad (\forall d\in D)(\exists! a\in\mathbb{R})$$

$d\in D,\ \alpha\in\mathbb{R}\Rightarrow \alpha d\in D$

$\because (\alpha d)^2=\alpha^2 d^2=0$

$d_1,d_2\in D \overset{\times}{\Rightarrow} d_1+d_2\in D$

$(d_1+d_2)^2=\underset{=0}{d_1^2}+2\underline{d_1d_2}+\underset{=0}{d_2^2}$

$(d_1+d_2)^3=\underset{=0}{d_1^3}+3\underset{=0}{d_1^2}d_2+3d_1\underset{=0}{d_2^2}+\underset{=0}{d_2^3}=0$

$D=D_1$

$D_2=\{d\in\mathbb{R}\mid d^3=0\}$

$d_1,d_2\in D_1\Rightarrow d_1+d_2\in D_2$

$D_n=\{d\in\mathbb{R}\mid d^{n+1}=0\}$

$d_1 \in D_m,\ d_2 \in D_n \Rightarrow d_1 + d_2 \in D_{m+n}$

∵ $(d_1+d_2)^{m+n+1} = 0$ を示せばよい (2項定理)

$$(d_1+d_2)^{m+n+1} = \sum_{r=0}^{m+n+1} {}_{m+n+1}C_r\, d_1^{m+n+1-r} d_2^{r}$$

$m+n+1-r \leqq m$ かつ $r \leqq n$ ならば $d_1^{m+n+1-r} d_2^{r} \neq 0$

このとき $n+1 \leqq r$ かつ $r \leqq n$ よって矛盾

したがって、$(d_1+d_2)^{m+n+1} = 0$ //

<u>report I</u>

$d_1, d_2, \cdots, d_n \in D = D_1 \Rightarrow d_1 + \cdots + d_n \in D_n$ を示しなさい
(Hint: n に関する帰納法)

$d_1 \in D = D_1 \Rightarrow d_1 \in D_1$

$d_1 \in D$

$f(x+d_1) = f(x) + f'(x) d_1$

$d_1, d_2 \in D$

$$\begin{aligned} f(x+d_1+d_2) &= f(x+d_1) + f'(x+d_1) d_2 \\ &= f(x) + f'(x) d_1 + \{f'(x) + f''(x) d_1\} d_2 \\ &= \boxed{f(x) + f'(x)(d_1+d_2) + f''(x) d_1 d_2} \quad \cdots (*) \\ &= f(x) + f'(x)(d_1+d_2) + f''(x) \frac{(d_1+d_2)^2}{2} \end{aligned}$$

$d_1, d_2, d_3 \in D$

$$\begin{aligned} f(x+d_1+d_2+d_3) &= f(x+d_1+d_2) + f'(x+d_1+d_2) d_3 \\ &= f(x) + f'(x)(d_1+d_2) + f''(x) d_1 d_2 + \{f'(x) + f''(x)(d_1+d_2) + f'''(x) d_1 d_2\} d_3 \quad (*) \\ &= f(x) + f'(x)(d_1+d_2+d_3) + f''(x)(d_1 d_2 + d_2 d_3 + d_3 d_1) + f'''(x) d_1 d_2 d_3 \\ &= f(x) + f'(x)(d_1+d_2+d_3) + f''(x) \frac{(d_1+d_2+d_3)^2}{2!} + f'''(x) \frac{(d_1+d_2+d_3)^3}{3!} \end{aligned}$$

<u>report II</u> $n=4$ の場合を示しなさい

report I, II は 4月27日(月)まで!

一般形

$$f(x+d_1+\cdots+d_n)$$

$$=f(x)+f'(x)(d_1+\cdots+d_n)+\frac{f''(x)}{2!}(d_1+\cdots+d_n)^2+\frac{f'''(x)}{3!}(d_1+\cdots+d_n)^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(d_1+\cdots+d_n)^n$$

動機付け

$y-x=d_1+\cdots+d_n$ で考える（x は固定）

$$f(y)=a_0+a_1(y-x)+a_2(y-x)^2+a_3(y-x)^3+\cdots+a_n(y-x)^n$$

<u>$a_0, a_1, \cdots, a_n$ を決定する</u>

$a_0=f(x)$ $\quad f'(y)=a_1+2a_2(y-x)+\cdots+na_n(y-x)^{n-1}$

$a_1=f'(x)$ $\quad f''(y)=2a_2+3!a_3(y-x)+\cdots+n(n-1)a_n(y-x)^{n-2}$

$a_2=\frac{f''(x)}{2}$ $\quad f'''(y)=3!a_3+4!a_4(y-x)+\cdots+n(n-1)(n-2)a_n(y-x)^{n-3}$

$a_3=\frac{f'''(x)}{3!}$