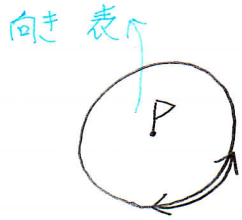
2015年10月26日(月)

微積分第18回講義ノート

積分定理

Stokesの定理

閉曲線γを境界とする
曲面Σがあったとする
ベクトル場$\mathbb{f}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$



$$\int_\gamma \mathbb{f}\,d\mathbb{r}=\int_\Sigma(\mathrm{rot}\,\mathbb{f})\,dS$$

線積分　　面積分

古典的 力の場　　流れの場

ベクトル場 ⟷ 2次の微分形式
⇕
1次の微分形式

2次の微分形式: 空間の各点に2次の交代形式を対応させる

1次の微分形式: 空間の各点に1次の交代形式(線形写像)を対応させる

1次の微分形式 ω

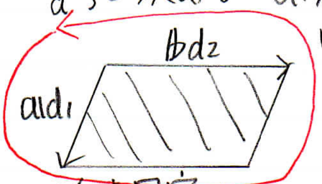
$$\int_\gamma\omega=\int_\Sigma \underset{2次}{d\omega}$$

$x\in\mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{f}(x)\in\mathbb{R}^3$
点　　　ベクトル

1次: 点$x\in\mathbb{R}^3$に $\mathbb{a}\in\mathbb{R}^3\longmapsto\mathbb{f}(x)\cdot\mathbb{a}\in\mathbb{R}$

2次: 点$x\in\mathbb{R}^3$に $(\mathbb{a},\mathbb{b})\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\longmapsto \mathbb{f}(x)\underset{内積}{\cdot}(\mathbb{a}\underset{ベクトル積}{\times}\mathbb{b})\in\mathbb{R}$

無限小のlevelで成り立つように
$\underset{d}{\mathrm{rot}}$を決める　$d_1,d_2\in D$　　二重線形　交代



xは固定

曲面　平行四辺形

$$\mathbb{f}(x)\cdot\mathbb{a}_1d_1+\mathbb{f}(x+\mathbb{a}d_1)\cdot\mathbb{b}d_2-\mathbb{f}(x+\mathbb{b}d_2)\cdot\mathbb{a}d_1-\mathbb{f}(x)\cdot\mathbb{b}d_2$$
$$=\{\mathbb{f}(x+\mathbb{a}_1d_1)-\mathbb{f}(x)\}\mathbb{b}d_2-\{\mathbb{f}(x+\mathbb{b}d_2)-\mathbb{f}(x)\}\mathbb{a}d_1$$
$$=\mathbb{f}'(x)(\mathbb{a}d_1)\cdot\mathbb{b}d_2-\mathbb{f}'(x)(\mathbb{b}d_2)\cdot\mathbb{a}d_1$$
$$=d_1d_2\{\mathbb{f}'(x)(\mathbb{a})\cdot\mathbb{b}-\mathbb{f}'(x)(\mathbb{b})\cdot\mathbb{a}\}$$ ← 2次の交代形式　$\exists!\,\mathbb{g}$ ベクトル

$(\mathbb{a},\mathbb{b})\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$　$\mathbb{a}=\mathbb{e}_1,\ \mathbb{b}=\mathbb{e}_2$
$\mathbb{e}_1\times\mathbb{e}_2=\mathbb{e}_3$

$\mathbb{g}(\mathbb{a}\times\mathbb{b})$　$\mathbb{a}=\mathbb{e}_2$
$\mathbb{b}=\mathbb{e}_3$
$\mathbb{e}_2\times\mathbb{e}_3=\mathbb{e}_1$

$$\underset{\text{ナブラ}}{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & f_2 \\ \frac{\partial}{\partial z} & f_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & f_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & f_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & f_1 \\ \frac{\partial}{\partial y} & f_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \mathbf{f}$$

<u>ベクトルのようなもの</u>

$f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

rot

Gaussの発散定理

<u>閉曲面</u>Σ … 境界のない曲面 (例：球面)

外向き　　内と外をきちんと分ける

閉曲面で囲まれる領域Ω

ベクトル場 $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

↓

$\operatorname{div}\mathbf{f}$ 発散　スカラー場

$$\underbrace{\int_\Sigma \mathbf{f}\, dS}_{\text{面積分}} = \underbrace{\int_\Omega (\operatorname{div}\mathbf{f})\, dV}_{\text{体積分}}$$

ベクトル場 ⟷ 1次の微分形式

↕

2次の微分形式　　2次の微分形式 ω

スカラー場 ⟷ 0次の微分形式

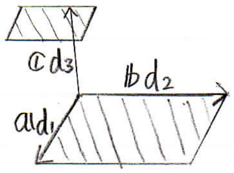
行列式↕

3次の微分形式

$$\int_\Sigma \omega = \int_\Omega d\omega$$

無限小のレベルで成り立てばよい

$d_1, d_2, d_3 \in D$ 平行六面体



$$
\begin{aligned}
&\mathbb{f}(x+\mathbb{c}d_3)\cdot(\mathbb{a}d_1\times\mathbb{b}d_2)-\mathbb{f}(x)\cdot(\mathbb{a}d_1\times\mathbb{b}d_2)\\
&+\mathbb{f}(x+\mathbb{a}d_1)\cdot(\mathbb{b}d_2\times\mathbb{c}d_3)-\mathbb{f}(x)\cdot(\mathbb{b}d_2\times\mathbb{c}d_3)\\
&+\mathbb{f}(x+\mathbb{b}d_2)\cdot(\mathbb{c}d_3\times\mathbb{a}d_1)-\mathbb{f}(x)\cdot(\mathbb{c}d_3\times\mathbb{a}d_1)\\
&=\{\mathbb{f}(x+\mathbb{c}d_3)-\mathbb{f}(x)\}\cdot(\mathbb{a}d_1\times\mathbb{b}d_2)+\{\mathbb{f}(x+\mathbb{a}d_1)-\mathbb{f}(x)\}\cdot(\mathbb{b}d_2\times\mathbb{c}d_3)\\
&+\{\mathbb{f}(x+\mathbb{b}d_2)-\mathbb{f}(x)\}\cdot(\mathbb{c}d_3\times\mathbb{a}d_1)\\
&=\mathbb{f}'(x)(\mathbb{c}d_3)\cdot(\mathbb{a}d_1\times\mathbb{b}d_2)+\mathbb{f}'(x)(\mathbb{a}d_1)\cdot(\mathbb{b}d_2\times\mathbb{c}d_3)+\mathbb{f}'(x)(\mathbb{b}d_2)\cdot(\mathbb{c}d_3\times\mathbb{a}d_1)\\
&=\underbrace{d_1d_2d_3\{\mathbb{f}'(x)(\mathbb{c})\cdot(\mathbb{a}\times\mathbb{b})+\mathbb{f}'(x)(\mathbb{a})\cdot(\mathbb{b}\times\mathbb{c})+\mathbb{f}'(x)(\mathbb{b})\cdot(\mathbb{c}\times\mathbb{a})\}}_{\text{三重線形}}
\end{aligned}
$$

$$\varphi(\mathbb{a},\mathbb{b},\mathbb{c})=\mathbb{f}'(x)(\mathbb{c})\cdot(\mathbb{a}\times\mathbb{b})+\mathbb{f}'(\mathbb{a})\cdot(\mathbb{b}\times\mathbb{c})+\mathbb{f}'(\mathbb{b})\cdot(\mathbb{c}\times\mathbb{a})$$

$\mathbb{a}$と$\mathbb{b}$を入れかえる

$$
\begin{aligned}
\varphi(\mathbb{b},\mathbb{a},\mathbb{c})&=\mathbb{f}'(x)(\mathbb{c})\cdot(\mathbb{b}\times\mathbb{a})+\mathbb{f}'(\mathbb{b})\cdot(\mathbb{a}\times\mathbb{c})+\mathbb{f}'(\mathbb{a})\cdot(\mathbb{c}\times\mathbb{b})\\
&=-\mathbb{f}'(x)(\mathbb{c})\cdot(\mathbb{a}\times\mathbb{b})-\mathbb{f}'(\mathbb{b})\cdot(\mathbb{c}\times\mathbb{a})-\mathbb{f}'(\mathbb{a})\cdot(\mathbb{b}\times\mathbb{c})\\
&=-\varphi(\mathbb{a},\mathbb{b},\mathbb{c})
\end{aligned}
$$

$\varphi(\mathbb{b},\mathbb{a},\mathbb{c})=-\varphi(\mathbb{a},\mathbb{b},\mathbb{c})$ より交代

スカラー

$\alpha \underbrace{V(\mathbb{a},\mathbb{b},\mathbb{c})}_{3\times3\text{の行列式}}$

$\mathbb{a}=\mathbb{e}_1$

$\mathbb{b}=\mathbb{e}_2$

$\mathbb{c}=\mathbb{e}_3$